V. I. Polovinkin, Realization of functionals on the spaces $L_p^m(E_n)$,
Sibirsk. Mat. Zh., 1997, Volume 38, Number 1, 166–172

Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 1997. Том 38, № 1

УДК 517.983.23

РЕАЛИЗАЦИЯ ФУНКЦИОНАЛОВ НА ПРОСТРАНСТВАХ $L_p^m(E_n)^{*)}$

В. И. Половинкин

В настоящей статье продолжаются исследования из [1, 2], посвященные вопросам, связанным с реализацией линейных функционалов на пространствах $L_p^m(E_n)$ через билинейные формы от производных порядка m. Аналогичные вопросы ранее рассмотрены в [3] для пространства $W_p^m(\Omega)$, где Ω — ограниченная область, граница которой — бесконечно дифференцируемое многообразие. Центральное место занимает теорема 2, которая дает конкретное описание необходимого способа реализации произвольных линейных функционалов на $L_p^m(E_n)$, $p \in (1, \infty)$. Она усиливает результаты [2], где рассматривались лишь финитные функционалы. Кроме того, в зависимости от значений p, m, n выводятся некоторые формулы для функций, реализующих линейные функционалы на $L_p^m(E_n)$, отличные от тех, которые дает упомянутая выше теорема 2.

Обозначим через p, q, m, n положительные числа такие, что $n, p, q > 1$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, m, n натуральные; далее E_n — n-мерное евклидово пространство; Q — совокупность векторов $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ с неотрицательными целыми компонентами такими, что $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = m$.

Пусть u_α — некоторые функции, зависящие от вектор-индексов $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in Q$. Тогда сокращенно будем писать

$$\sum_\alpha u_\alpha = m! \sum_{\alpha \in Q} (\alpha_1! \dots \alpha_n!)^{-1} u_\alpha$$

(здесь и далее равенство функций подразумевается как равенство почти всюду).

Для $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ положим

$$\int f(x)\,dx = \int\limits_{E_n} f(x_1, \dots, x_n)\,dx_1 \dots dx_n.$$

Ниже будут использованы многие хорошо известные результаты и обозначения теории обобщенных функций, которые приводятся в гл. 1 из [4]. В частности, знак $*$ (не в верхнем индексе) будет обозначать свертку в смысле [4, с. 64]; δ — функция Дирака. Под выражением «обобщенные функции» будут пониматься линейные непрерывные функционалы над пространством финитных основных функций $D = D(E_n)$.

Положим: W_p^m — линейное многообразие функций, обладающих в E_n суммируемыми в степени p обобщенными производными порядка

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Красноярского краевого фонда науки (код проекта 4F055).

m; $L_p^m = L_p^m(E_n)$ — линейное нормированное пространство, индуцированное на W_p^m полунормой, заданной формулой

$$\|f\|_{L_p^m} = \left(\int \left(\sum_\alpha (f^{(\alpha)}(x))^2\right)^{p/2} dx\right)^{1/p},$$

где

$$f^{(\alpha)}(x) = f^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)}(x_1,\ldots,x_n) = \frac{\partial^m f}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}(x).$$

Если l — функционал, заданный на W_p^m, равный 0 на многочленах степени ниже m, который индуцирует функционал из сопряженного к L_p^m пространства L_p^{m*}, то индуцированный функционал также будет обозначаться через l. Через l будем обозначать также соответствующую обобщенную функцию.

Полагая $L_q = L_q(E_n)$ состоящим из таких функций f, что $\int |f(x)|^q\,dx < \infty$, через g_β, $\beta \in Q$ будем обозначать функции из L_q, удовлетворющие условиям

$$(l,f) = \sum_\beta \int g_\beta(x) f^{(\beta)}(x)\,dx \quad \forall f \in W_p^m. \tag{1}$$

Один из возможных способов выбора функций g_β обеспечивает следующий результат, доказанный в [1] (при $p = q = 2$ он вытекает непосредственно из теоремы об общем виде линейного функционала в гильбертовом пространстве).

Теорема 1. *Для всякого функционала $l \in L_p^{m*}$ существует единственная с точностью до многочлена степени ниже m функция $u \in W_q^m$ такая, что*

$$(l,f) = \sum_\alpha \int u^{(\alpha)}(x) f^{(\alpha)}(x)\,dx \quad \forall f \in W_p^m. \tag{2}$$

Формула (1) показывает, что функционал l индуцирует на D обобщенную функцию

$$l = (-1)^m \sum_\beta (g_\beta)^{(\beta)} = (-1)^m \sum_\beta g_\beta * \delta^{(\beta)}. \tag{3}$$

Если $l \in L_p^{m*}$ и $f \in W_p^m$, то положим

$$(l \circ f)(x) = (l(y), f(x-y)). \tag{4}$$

Из (1) и (4) вытекает, что

$$\begin{aligned}(l \circ f)(x) &= (-1)^m \sum_\beta \int g_\beta(y) f^{(\beta)}(x-y)\,dy \\ &= (-1)^m \sum_\beta \big(g_\beta * f^{(\beta)}\big)(x) = (-1)^m \sum_\beta \big(g_\beta * (f * \delta^{(\beta)})\big)(x).\end{aligned} \tag{5}$$

Формулы (3), (5) показывают, что если при $\beta \in Q$

$$g_\beta * (f * \delta^{(\beta)}) = (g_\beta * \delta^{(\beta)}) * f, \tag{6}$$

то

$$l \circ f = l * f. \tag{7}$$

В частности, равенства (6), (7) выполняются, если f или g_β, $\beta \in Q$, финитны.

Обозначим через G фундаментальное решение в E_n полигармонического уравнения

$$\Delta^m v = 0. \tag{8}$$

Оно имеет следующий вид:

$$G(x) = \begin{cases} \varkappa_{m,n}|x|^{2m-n}\ln|x| \text{ при } n \text{ четном }, 2m \geqslant n, \\ \varkappa_{m,n}|x|^{2m-n} \text{ при остальных } m, n, \end{cases}$$

здесь $|x| = \left(x_1^2 + \dots + x_n^2\right)^{1/2}$, $\varkappa_{m,n}$ — соответствующие константы (их выражение см. в [5, с. 521] или в [1]).

Выберем произвольно функцию $\eta \in D$, равную 1 в некоторой окрестности начала координат. Например, за η можно взять «шапочку» из [4, с. 16].

Положим $\widehat{G} = G\eta$, $\overline{G} = G - \widehat{G}$.

Теорема 2. *Пусть $l \in L_p^{m*}$ и u — функция, соответствующая l в (2). Тогда при $\alpha \in Q$*

$$u^{(\alpha)} = (-1)^m[l * \widehat{G}^{(\alpha)} + l \circ \overline{G}^{(\alpha)}]. \tag{9}$$

Доказательство. Пусть функционал l и функция u удовлетворяют условиям леммы. Для $\alpha \in Q$ положим

$$\psi_\alpha = l \circ \overline{G}^{(\alpha)}, \quad \tau = l * \widehat{G}. \tag{10}$$

Покажем, что τ и все ψ_α, $\alpha \in Q$, определены как обобщенные функции.

Так как $\widehat{G}$ — финитная функция, то τ определена. Будем исследовать $l \circ \overline{G}^{(\alpha)}$. Из определения $\overline{G}$ вытекают оценки ее производных, соответствующих вектор-индексам $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$:

$$|\overline{G}^{(\gamma)}(x)| < K_\gamma |x|^{2m-n-\gamma_1-\dots-\gamma_n} |\ln|x||, \tag{11}$$

где K_γ — постоянные, зависящие от γ. Применяя (11) к производным $\overline{G}^{(\alpha)}$ порядка m, находим, что $\overline{G}^{(\alpha)} \in L_p^m$ при $\alpha \in Q$. Следовательно, ψ_α из (10) при таких α определены.

Лемма 1. *Для $\varphi \in D$*

$$(l, \varphi) = (-1)^m \sum_\alpha (\tau^{(\alpha)} + \psi_\alpha, \varphi^{(\alpha)}). \tag{12}$$

Доказательство. Пусть $\varphi \in D$. Из определения обобщенных производных следует, что

$$(-1)^m \sum_\alpha (\tau^{(\alpha)}, \varphi^{(\alpha)}) = (\Delta^m \tau, \varphi) = (l * \Delta^m \widehat{G}, \varphi). \tag{13}$$

Положим

$$\lambda(x) = \begin{cases} (\Delta^m \widehat{G})(x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Тогда $\Delta^m \widehat{G} = \lambda + \delta$. Отсюда и из (13) находим, что

$$(-1)^m \sum_\alpha (\tau^{(\alpha)}, \varphi^{(\alpha)}) = (l * \delta, \varphi) + (l * \lambda, \varphi) = (l, \varphi) + (l * (-\Delta^m \overline{G}), \varphi). \tag{14}$$

Далее, из (10) и (5) имеем

$$\sum_{\alpha}(\psi_\alpha,\varphi^{(\alpha)}) = (-1)^m\sum_{\alpha}\Big(\sum_{\beta} g_\beta * \overline{G}^{(\alpha+\beta)},\varphi^{(\alpha)}\Big) = \sum_{\alpha}\Big(\sum_{\beta}(g_\beta * \overline{G}^{(\alpha+\beta)})^{(\alpha)},\varphi\Big). \tag{15}$$

Но

$$\sum_{\alpha}\sum_{\beta}(g_\beta * \overline{G}^{(\alpha+\beta)})^{(\alpha)} = \sum_{\beta} g_\beta * \Delta^m\overline{G}^{(\beta)} = \sum_{\beta} g_\beta * (\delta * \Delta^m\overline{G}^{(\beta)}).$$

Так как $\Delta^m\overline{G} \in D$, последнее равенство и формулы (6), (7), где надо считать $f = \Delta^m\overline{G}$, и (15) показывают, что при $\varphi \in D$

$$(-1)^m\sum_{\alpha}(\psi_\alpha,\varphi^{(\alpha)}) = (l\circ\Delta^m\overline{G},\varphi) = (l * \Delta^m\overline{G},\varphi). \tag{16}$$

Складывая формулы (16) и (14), получаем лемму 1.

Лемма 2. *Существует регулярная обобщенная функция ψ такая, что $\psi^{(\alpha)} = \psi_\alpha$ при $\alpha \in Q$.*

Доказательство. Пусть $i \in \{1,2,\dots,n\}$. Формулы (5) и (10) показывают, что

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\psi_\alpha = (-1)^m\sum_{\beta}\frac{\partial}{\partial x_i}(g_\beta * \overline{G}^{(\alpha+\beta)}) = (-1)^m\sum_{\beta} g_\beta * \frac{\partial}{\partial x_i}\overline{G}^{(\alpha+\beta)}. \tag{17}$$

Поскольку все g_β принадлежат L_q, $\beta \in Q$, из (11) вытекает, что все слагаемые в последней формуле являются регулярными обобщенными функциями.

Положим $e_i = (e_i^1,\dots,e_i^n)$, где $e_i^j = 1$ при $i = j$, $e_i^j = 0$ при $i \neq j$, $i,j \in \{1,2,\dots,n\}$. Пусть векторы $\alpha(1),\alpha(2) \in Q$ и $i,j \in \{1,2,\dots,n\}$ таковы, что $\alpha(1) + e(i) = \alpha(2) + e(j)$. Тогда из (17) следует, что

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\psi_{\alpha(1)} = \frac{\partial}{\partial x_j}\psi_{\alpha(2)}. \tag{18}$$

Равенства (18) показывают, что $\{\psi_\alpha\}_{\alpha\in Q}$ является обобщенным градиентом порядка m. Отсюда и из [5, теорема IV.5] следует лемма 2.

Лемма 3 [4, с. 62]. *Если числа $\lambda,\mu \geqslant 1$, таковы, что $\lambda^{-1} + \mu^{-1} \geqslant 1$ и $f \in L_\lambda$, $g \in L_\mu$, то существует $f * g \in L_t$, где число t определяется из равенства $t^{-1} = \lambda^{-1} + \mu^{-1} - 1$.*

Лемма 4. *Функция ψ принадлежит W_s^m при $s > q$.*

Доказательство. Пусть $s > q$. Положим $\lambda = (s^{-1} - q^{-1} + 1)^{-1}$. Тогда $\lambda > 1$, $\lambda^{-1} + q^{-1} - 1 = s^{-1}$.

Функции g_β из (5) принадлежат L_q, $\beta \in Q$. Из оценок (11) также вытекает, что $\overline{G}^{(\alpha+\beta)} \in L_\lambda$, когда $\alpha,\beta \in Q$. Поэтому, применяя лемму 3 с $f = \overline{G}^{(\alpha+\beta)}$, $\mu = q$, $g = g_\beta$, $\alpha,\beta \in Q$ и учитывая (5), получаем, что $l\circ\overline{G}^{(\alpha)} = \psi_\alpha \in L_s$. Следовательно, лемма 4 верна.

Лемма 5. *Функция τ принадлежит L_q.*

Доказательство. Из формул (10) и (5) и финитности $\widehat{G}$ следует, что

$$\tau = (-1)^m \sum_\beta (g_\beta * \delta^{(\beta)}) * \widehat{G} = (-1)^m \sum_\beta g_\beta * (\widehat{G} * \delta^{(\beta)}) = (-1)^m \sum_\beta g_\beta * \widehat{G}^{(\beta)}.$$

При $\beta \in Q$ функции g_β принадлежат L_q, $\widehat{G}^{(\beta)} \in L_1$. Отсюда и из леммы 3, где надо считать $f = g_\beta$, $\lambda = q$, $\widehat{G} = g$, $\mu = 1$, вытекает лемма 5.

Обозначим через A множество обобщенных функций медленного роста (определение и необходимые ниже свойства таких функций см. в [4, § 5]).

Определим функцию v равенством

$$v = (-1)^m u - \tau - \psi. \tag{19}$$

Лемма 6. *Имеет место соотношение $v \in A$.*

Доказательство. Выберем произвольно число $s > q$. Тогда $\psi \in W_s^m$. Поскольку $u \in W_q^m$, $\psi \in W_s^m$, а W_s^m и W_q^m содержатся в A [2], то $\psi, u \in A$. Кроме того, $\tau \in A$, так как $\tau \in L_q$, а $L_q \subset A$. Отсюда и из (19) вытекает лемма 6.

Лемма 7. *Функция v является многочленом.*

Доказательство. Из равенств (2), (12) и (19) при $\varphi \in D$ имеем

$$\sum_\alpha (v^{(\alpha)}, \varphi^{(\alpha)}) = 0. \tag{20}$$

Формула (20) показывает, что v удовлетворяет уравнению в обобщенных функциях (8). Отсюда и из леммы 6 так же, как в аналогичном случае в [2, с. 138], вытекает справедливость леммы.

Приведем определения рассмотренных в [5, 6] весовых классов $L_{\alpha,\gamma,\varkappa}$, $L_{\alpha,\gamma}$, $W^m_{\alpha,\gamma}$, $W^m_{\alpha,\gamma,1}$, где $\alpha, \gamma, \varkappa$ — числа, $\alpha \geqslant 1$, $\varkappa \in \{0,1\}$. Класс $L_{\alpha,\gamma,\varkappa}$ состоит из определенных в E_n функций φ, для которых конечен интеграл

$$\int |\varphi(x)|^\alpha |\bar{x}|^{\gamma\alpha} [1 + \ln|\bar{x}|]^{-\alpha\varkappa}\, dx,$$

где $|\bar{x}| = (1 + |x|^2)^{1/2}$; обозначим $L_{\alpha,\gamma} = L_{\alpha,\gamma,0}$. Классы $W^m_{\alpha,\gamma,1}$, $W^m_{\alpha,\gamma}$ суть множества функций, у которых существуют все обобщенные производные порядка m, принадлежащие соответственно $L_{\alpha,\gamma,1}$ и $L_{\alpha,\gamma}$.

Если B и C — множества функций, то $B \to C$ означает следующее: либо $B \subset C$, либо для любой функции $b \in B$ найдется многочлен $\pi(b)$ степени ниже m такой, что $(b + \pi(b)) \in C$.

Ниже при доказательстве леммы 9 будут применяться теоремы вложения для весовых классов, доказательства которых имеются в [5, гл. 5] и [6, гл. 3]. Для настоящей работы данные теоремы являются вспомогательными и будут сформулированы в виде следующего утверждения.

Лемма 8. *Пусть числа λ, μ, η, ξ таковы, что $\lambda > \mu > 1$, $\eta > \xi > 0$. Тогда*

а) $W^m_\lambda \to W^m_{\mu, n(1/\lambda - 1/\mu), 1}$;
б) $W^m_\lambda \to W^m_{\lambda, -\eta, 1}$;
в) $W^m_{\lambda, -\xi, 1} \to W^m_{\lambda, -\eta}$;
г) $W^m_{\lambda, -\eta} \to L_{\lambda, -\eta - m, 1}$;
д) $L_{\lambda, -\xi, 1} \to L_{\lambda, -\eta}$;
е) $L_\lambda \to L_{\lambda, -\eta}$.

Лемма 9. *Степень многочлена v ниже m.*

Доказательство. Выберем $\delta \in (m, m + nq^{-1})$. Тогда многочлены степени выше $m - 1$ не принадлежат классам $L_{q,-\delta}$.

Зафиксируем такие числа ρ, s, чтобы выполнялись условия

$$\rho + m < \delta; \quad s > q; \quad n(q^{-1} - s^{-1}) < \rho.$$

Из утверждений а) и б) леммы 8 следует, что

$$W_s^m \to W^m_{q,n(1/s-1/q),1}; \quad W_q^m \to W^m_{q,n(1/s-1/q),1}. \tag{21}$$

Так как $u \in W_q^m$, $\psi \in W_s^m$, из (21) вытекает вложение

$$\{u, \psi\} \to W^m_{q,n(1/s-1/q),1}. \tag{22}$$

Кроме того, утверждения в), г), д) леммы 8 дают

$$W^m_{q,n(1/s-1/q),1} \to W^m_{q,-\rho} \to L_{q,-\rho-m,1} \to L_{q,-\delta}. \tag{23}$$

Сравнивая формулы (22) и (23), находим, что

$$\{u, \psi\} \to L_{q,-\delta}.$$

По утверждению е) леммы 8 $L_q \to L_{q,-\delta}$. Отсюда и из леммы 5 получаем, что $\tau \in L_{q,-\delta}$.

Так как $\{u, \psi, \tau\} \to L_{q,-\delta}$, а класс $L_{q,-\delta}$ не содержит многочленов степени выше $m - 1$, то лемма 9 верна.

Теорема 2 является непосредственным следствием леммы 9 и формулы (19).

Далее будем применять знак $\circ$, определенный формулой (4), не только в случае, когда $f \in W_p^m$, $l \in L_p^{m*}$, но и тогда, когда $f \in W_\lambda^m \cup W_p^m$, $l \in L_p^{m*} \cap L_\lambda^{m*}$, λ — параметр из $(1, \infty)$, не обязательно равный p.

Теорема 3. *Пусть числа $\lambda > 1$, $\mu = \lambda(\lambda - 1)^{-1}$ таковы, что*

$$\mu m > n, \tag{24}$$

l — функционал и u — функция из формулировки теоремы 1. Кроме того, $l \in L_\lambda^{m*}$. Тогда при $\alpha \in Q$

$$u^{(\alpha)} = (-1)^m[(l \circ \widehat{G})^{(\alpha)} + l \circ \overline{G}^{(\alpha)}].$$

Доказательство. В условиях теоремы неравенство (24) равносильно тому, что $(m - n)\lambda > -n$. Отсюда вытекает, что $\widehat{G} \in L_\lambda^m$. Следовательно, выражение $l \circ \widehat{G}$ определено.

Обозначим через g_β, $\beta \in Q$, функции из L_μ такие, что верна формула, полученная из (1) заменой буквы p на λ. Так как $D \subset W_p^m \cap W_\lambda^m$, независимо от способа реализации l в виде (1) подобная формула будет определять одну и ту же обобщенную функцию при реализации l как на W_p^m, так и на W_λ^m.

Поскольку функция $\widehat{G}$ финитна, полагая в (7) $f = \widehat{G}$, приходим к равенству $l * \widehat{G} = l \circ \widehat{G}$. Отсюда и из формулы (9) следует теорема 3.

Замечание. В случае $\lambda = p$, $\mu = q$ формулировка теоремы 3, как и следующей ниже теоремы 4, может быть очевидным образом сокращена.

Теорема 4. *Пусть числа λ, μ, функция u, функционал l удовлетворяют всем условиям теоремы* 3, *кроме неравенства* (24). *Предполагаем, что $m\mu < n$. Тогда*

$$u^{(\alpha)} = (-1)^m l * G^{(\alpha)}, \quad \alpha \in Q. \tag{25}$$

Доказательство. Предположим, что условия теоремы выполнены. Неравенство $m\mu < n$ равносильно тому, что $(m-n)\lambda < -n$. Отсюда и из (11) вытекает, что $\overline{G}^{(\alpha)} \in L_\lambda$ при $\alpha \in Q$.

Обозначим через g_β, $\beta \in Q$, функции, аналогичные соответствующим функциям в доказательстве теоремы 3. Так как $g_\beta \in L_\mu$, $\overline{G}^{(\alpha)} \in L_\lambda$, существуют $g_\beta * \overline{G}^{(\alpha)}$ при $\alpha, \beta \in Q$. Отсюда и из определения двойной свертки можно непосредственно получить, что существует $g_\beta * \overline{G}^{(\alpha)} * \delta^{(\beta)}$, $\alpha, \beta \in Q$. Поэтому

$$(g_\beta * \overline{G}^{(\alpha)}) * \delta^{(\beta)} = g_\beta * (\overline{G}^{(\alpha)} * \delta^{(\beta)}) \tag{26}$$

(об ассоциативности сверток, у которых два свертывателя обладают сверткой, а третий финитен, см. также в [7, теорема 6.4.8]). Из (26) и (6) с $f = \overline{G}^{(\alpha)}$ находим, что $l \circ \overline{G}^{(\alpha)} = l * \overline{G}^{(\alpha)}$, откуда по формуле (9) будем иметь (25) вместе с теоремой 4.

В [2] формулы (25) были доказаны в случае, когда l — финитный функционал. Анализируя доказательство этого результата, можно убедиться в справедливости следующего утверждения.

Теорема 5. *Пусть l, u — функционал и функция, удовлетворяющие условию теоремы* 1; *кроме того, существует $(l * G) \in A$. Тогда*

а) $u = (-1)^m l * G + v$, где v — многочлен,

б) если $l * G \in W_q^m$, то справедливы равенства (25).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Половинкин В. И.* О реализации функционалов ошибок кубатурных формул в пространствах типа L_p^m //Краевые задачи для уравнений с частными производными. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1988. С. 125–136.
2. *Половинкин В. И.* О реализации финитных функционалов в $L_p^m(E_n)$ // Теоремы вложения и их приложения к задачам математической физики. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1989. С. 137–139.
3. *Соломяк М. З.* О пространствах, сопряженных к пространствам W_p^l С. Л. Соболева // Докл. АН СССР. 1962. Т. 143, № 6. С. 1289–1292.
4. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1976.
5. *Соболев С. Л.* Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974.
6. *Соболев С. Л.* Избранные вопросы теории функциональных пространств и обобщенных функций. М.: Наука, 1989.
7. *Антосик П., Микусинский Я., Сикорский Р.* Теория обобщенных функций: секвенциальный подход. М.: Мир, 1976.

г. Красноярск

Статья поступила 1 июня 1993 г.