V. A. Chulaevskii, Inverse spectral problem for limit-periodic Schrödinger operators,
Funktsional. Anal. i Prilozhen., 1984, Volume 18, Issue 3, 63–66

Функциональный анализ и его приложения,
1984, т. 18, вып. 3, 63—66.

УДК 517.43 + 517.9

ОБРАТНАЯ СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПРЕДЕЛЬНО-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ ШРЁДИНГЕРА

В. А. Чулаевский

Интенсивное развитие теории нелинейных систем, интегрируемых методом обратной задачи теории рассеяния (ОЗТР), начавшееся около пятнадцати лет назад, послужило новым мощным стимулом для изучения обратных спектральных задач самых разных типов. Исследования последних лет показывают, что именно язык ОЗТР является адекватным для качественного и даже количественного описания важных классов операторов. В настоящей работе такой подход применяется к изучению одномерных операторов Шрёдингера с предельно-периодическим потенциалом.

В недавних работах [2—4] были построены примеры предельно-периодических операторов Шрёдингера, спектр которых с теоретико-множественной точки зрения представляет собой нигде не плотное совершенное множество ненулевой меры. Легко заметить, однако, что методами указанных работ удается доказать наличие всюду плотного множества «лакун» в спектре оператора лишь для некоторого топологически массивного (но описываемого неявно) множества потенциалов, либо же для потенциалов весьма частного вида. Вероятно, эта трудность является объективной, и более естественным кажется подход с использованием ОЗТР. Ниже мы получим результат, в известном смысле обратный результатам работ [2—4]. Именно, будет установлено, что в качестве множества «лакун» в спектре предельно-периодического оператора Шрёдингера может выступать любое семейство интервалов на вещественной оси (разумеется, ограниченное снизу), концы которых удовлетворяют некоторым аналитическим условиям, а длины достаточно быстро убывают (по отношению к естественной нумерации этих интервалов). В основе доказательства лежит использование уравнений Дубровина и формул следов (ср. [5—6]).

Напомним основные этапы решения ОЗТР для периодического потенциала. Пусть заданы

а) последовательность неотрицательных чисел $h = \{h_s\}$, занумерованных точками некоторой одномерной решетки $\{s\colon Ns \in \mathbf{Z}\}$, $N \in \mathbf{N}$, причем $h_0 = 0$, $h_{-s} = h_s$, $H = \sup\limits_s h_s < \infty$;

б) область $\Theta(h)$ в комплексной плоскости вида

$$\Theta(h) = \mathbf{C}_+ \setminus \bigcup_s \{\operatorname{Re} z = s,\ \operatorname{Im} z \in [0, h_s]\};$$

в) конформное отображение $\theta\colon \mathbf{C}_+ \to \Theta(h)$ вида

$$\theta(z) = \prod_s \frac{\sqrt{(z-\alpha_s^-)(z-\alpha_s^+)}}{z-\beta_s} = \prod_s \sqrt{\left(1-\frac{\alpha_s^- - \beta_s}{z-\beta_s}\right)\left(1-\frac{\alpha_s^+ - \beta_s}{z-\beta_s}\right)},$$

где $\alpha_s^{\pm} = \theta^{-1}(s \pm 0)$, $\beta_s = \theta^{-1}(s + ih_s)$. Тогда

А)

$$\left.\begin{aligned} 2(N \operatorname{ch} H)^{-1} \leqslant \alpha_{s+1/N}^- - \alpha_s^+ \leqslant 1/N, \\ 0 \leqslant \alpha_s^+ - \alpha_s^- \leqslant 2h_s. \end{aligned}\right\} \tag{1.1}$$

Далее, пусть $\{\gamma_s(t)\}$ — решение системы уравнений Дубровина

$$\left.\begin{aligned}\dot{\gamma}_s(t) &= \pm 2i\,\frac{\prod\limits_{r>0}\sqrt{(\gamma_s-\mu_r^-)(\gamma_s-\mu_r^+)}}{\prod\limits_{r\neq s}(\gamma_s-\gamma_r)},\\ \gamma_s(0) &= \hat{\gamma}_s,\end{aligned}\right\} \tag{1.2}$$

где $\mu^\pm = \mu_0 + (\alpha_s^\pm)^2$. Положим $q(t) = \sum\limits_{s>0}[\mu_s^+ + \mu_s^- - 2\gamma_s(t)]$. Тогда:

Б) функция q периодична с периодом N, и, следовательно, спектр оператора $L = -\partial^2 + q$ двукратный лебеговский;

В) спектральная мера $d\sigma(\lambda)$ оператора L сосредоточена на множестве $[\mu_0, +\infty) \setminus \bigcup\limits_{s>0}(\mu_s^-, \mu_s^+)$;

Г) спектр задачи Дирихле для оператора L на отрезке $[0, N]$ совпадает с множеством точек $\{\hat{\gamma}_s\}$.

В работе [5] детально исследованы уравнения Дубровина. Следуя [6, 5], сделаем удобную подстановку в этих уравнениях $\gamma_s(t) = \mu_s^- + (\mu_s^+ - \mu_s^-)\sin^2 x_s(t)$. В результате система (1.2) преобразуется к виду

$$\dot{x}_s(t) = F_s(x), \quad x = (x_{1/N}, \quad x_{2/N}, \ldots), \tag{1.2a}$$

$$F_s(x) = f_s(\mu_{1/N}^- + (\mu_{1/N}^+ - \mu_{1/N}^-)\sin^2 x_{1/N}(t), \ldots),$$

$$f_s(\gamma_{1/N}, \gamma_{2/N}, \ldots) = \mp\sqrt{\gamma_s}\sqrt{\prod_{r\neq s}\left(1-\frac{\mu_r^- - \gamma_s}{\gamma_s-\gamma_r}\right)\left(1-\frac{\mu_r^+ - \gamma_s}{\gamma_s-\gamma_r}\right)},$$

или в векторных обозначениях

$$\dot{x} = F(x), \tag{1.3}$$

где $F = (F_{1/N}, F_{2/N}, \ldots)$.

Введем в пространстве X_N последовательностей $\{x_s\}$ норму $\|x\| = \|x\|_N = \sum\limits_{s>0}(\mu_s^+ - \mu_s^-)\,|x_s|$. Детальный анализ оценок из работы [5] позволяет установить следующее утверждение.

Лемма 1. *Вектор-функция $F(x)$ удовлетворяет условию Липшица*

$$\|F(x) - F(y)\| \leqslant \|x-y\|\,\mathrm{const}\sum_{s>0}\frac{\mu_s^+ - \mu_s^-}{R_s(M)}, \quad M = \{\mu_s\}, \tag{1.4}$$

где $R_s(M) = \min\limits_{r\neq s}\{|\mu_s^+ - \mu_r^-|, \ |\mu_s^-, \mu_r^+|\}$.

Отсюда ясно, что для любого начального условия уравнение (1.3) имеет глобальное решение, и притом ровно одно.

Пусть последовательность $\tilde{M} = \{\tilde{\mu}^+, \tilde{\mu}^-, \mu_0, \mu_{1/N}^-, \ldots\}$ получается расширением последовательности M, так что интервалы $(\tilde{\mu}^-, \tilde{\mu}^+)$, (μ_s^-, μ_s^+), $s > 0$, («лакуны»), как и прежде, попарно не пересекаются. Обозначим через $\tilde{F}$ отвечающую $\tilde{M}$ вектор-функцию того же вида, что и F. Следующее утверждение также уточняет соответствующий результат работы [5].

Лемма 2. *При всех $x \in X_N$ выполнена оценка*

$$\|\tilde{F}(x) - F(x)\| \leqslant \mathrm{const}\left(\frac{\tilde{\mu}^+ - \tilde{\mu}^-}{\tilde{R}(\tilde{M})} + \sum_{s>0}\frac{\mu_s^+ - \mu_s^-}{\tilde{R}_s(\tilde{M})}\right), \tag{1.5}$$

где $\tilde{R}$, $\tilde{R}_s$ определяются аналогично величинам R_s в лемме 1.

Опираясь на сформулированные выше утверждения, мы докажем основной результат настоящей работы.

Т е о р е м а. *Пусть задана последовательность натуральных чисел* $\{T_N\}$ *такая, что* $T_{N+1}/T_N \in \mathbf{N} \setminus \{1\}$. *Пусть, кроме того, задана последовательность неотрицательных чисел* $h = \{h_s\}$, $s = k/T_N$, $k \in \mathbf{Z}$, $N \in \mathbf{N}$, *удовлетворяющая условиям*

I. $h_{-s} = h_s$, $h_0 = 0$.

II. $T_N \sum\limits_{k:\,(k,\,T_N)=1} ((k/T_N)\, h_{k/T_N})^2 \leqslant A_N < \infty$.

III. $\sum\limits_{N=1}^{\infty} A_N \exp\{b_N T_{N+1}\} = A < \infty, \quad b_N \uparrow +\infty$.

При каждом натуральном N *выделим из* h *подпоследовательность* $h^N = \{h_s^N\} = \{h_{k/T_N}^N\}$ *и сопоставим ей последовательность* $M^N = \{\mu_s^{N,\pm}\}$ *и систему уравнений Дубровина*

$$\dot{\gamma}_s^N = F_s^N(\gamma_{1/T_N}^N, \ldots, \ldots), \quad \gamma_s^N(0) = \mu_s^{N,-} \tag{1.6}$$

по тому же правилу, что и выше. Положим

$$q^N(t) = \sum_{s>0} [\mu_s^{+,N} + \mu_s^{-,N} - 2\gamma_s^N(t)].$$

Тогда ряд $\sum\limits_{N=1}^{\infty} \| q^{N+1} - q^N \|_{C(\mathbf{R})}$ *сходится, т. е. в пространстве* $C(\mathbf{R})$ *существует предел по норме*

$$q = \lim_{N\to\infty} q^N. \tag{1.7}$$

При этом выполнены неравенства

$$\| q^{N+1} - q^N \|_{C(\mathbf{R})} \leqslant \mathrm{const}\, A_N. \tag{1.8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя оценки (1.1), нетрудно вывести из условия II следующие неравенства:

$$\sum_{\substack{s>0 \\ s=k/T_N,\, (k,\, T_N)=1.}} \frac{\mu_s^{N,+} - \mu_s^{N,-}}{R_s^N(M^N)} \leqslant \mathrm{const}\, A_N \sup_s h_s, \tag{1.9}$$

Это влечет за собой в силу лемм 1 и 2 следующие оценки для модифицированной системы Дубровина:

$$\| F^N(x^N) - F^N(y^N) \|_{T_N} \leqslant \mathrm{const}\, \| x^N - y^N \|_{T_N}, \tag{1.10}$$

$$\| F^{N+1}(x^N) - F^N(x^N) \|_{T_{N+1}} \leqslant \mathrm{const}\, A_N. \tag{1.11}$$

В (1.11) мы пользуемся естественным вложением пространства X_{T_N} с нормой $\|\cdot\|_{T_N}$ в пространство $X_{T_{N+1}}$ с нормой $\|\cdot\|_{T_{N+1}}$. Поскольку функция q^N при каждом N является T_N-периодической, достаточно сравнить $q^{N+1}(t)$ и $q^N(t)$ лишь при $t \in [0, T_{N+1}]$:

$$\| x^N(t) - x^{N+1}(t) \| \leqslant \int_0^t \| F^N(x^N(u)) - F^{N+1}(x^{N+1}(u)) \| \, du \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^t \| F^N(x^N(u)) - F^N(x^{N+1}(u)) \| \, du + \int_0^t \| F^{N+1}(x^{N+1}(u)) - F^N(x^{N+1}(u)) \| \, du \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \int_0^t \| x^N(u) - x^{N+1}(u) \| \, du + C_2 A_N \int_0^t du. \tag{1.12}$$

Итерируя интегральное неравенство (1.12), получим

$$\| x^N (t) - x^{N+1} (t) \| \leqslant \text{const}\, A_N \exp \{C_1 \mid t \mid \}. \tag{1.13}$$

Таким образом,

$$\sup_t \mid q^N (t) - q^{N+1} (t) \mid \leqslant \text{const}\, A_N \exp \{C_1 T_{N+1}\}.$$

Выбирая, например, $N \geqslant n_0 + 1$, где $b_{n_0} > C_1$, мы приходим к утверждению теоремы.

Следствие. а) Спектральная мера оператора Шрёдингера L с потенциалом q вида (1.7) абсолютно непрерывна относительно меры Лебега и двукратна.

б) Дополнение к спектру оператора L содержит всюду плотное множество интервалов.

Доказательство. Потенциал вида (1.7) удовлетворяет условиям основной теоремы работы [4], откуда непосредственно следует утверждение а). Далее, из равномерной резольвентной сходимости операторов $L^N = -\partial^2 + q^N$ к L вытекает сходимость спектральных проекторов этих операторов к спектральным проекторам предельного оператора L, что влечет за собой утверждение б).

ЦИТИРУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Марченко В. А.*, Операторы Штурма—Лиувилля и их приложения. Киев: Наукова думка, 1977.
2. *Moser J.* An example of Schrödinger operator with almost periodic potential and nowhere dense spectrum.— Comm. Math. Helv., 1981, v. 56, p. 198—224.
3. *Avron J.*, *Simon B.* Almost periodic Schrödinger operators.— Commun. Math. Phys., 1981, v. 82, p. 101—120.
4. *Чулаевский В. А.* О возмущениях оператора Шрёдингера с периодическим потенциалом.— УМН, 1981, т. 36, вып. 2, с. 203—204.
5. *Левитан Б. М.* Обратная задача для оператора Штурма — Лиувилля в случае конечно-зонных и бесконечно-зонных потенциалов.— Труды ММО, 1982, т. 45, с. 3—36.
6. *Trubowitz E.* The inverse problem for periodic potentials.— Commun. Pure Appl. Math., 1977, v. 30, p. 321—337.

Московский государственный университет

Поступила в редакцию 18 июля 1983 г.