УДК 550.361 ГЕОФИЗИКА

© Е.И. СУЕТНОВА

ЭВОЛЮЦИЯ ТЕПЛОВОГО РЕЖИМА ОСАДКОНАКОПЛЕНИЯ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОСТИ ГЛУБИННОГО ТЕПЛОВОГО ПОТОКА

(Представлено академиком В.А. Магницким 27 VII 1988)

Существенным элементом как в построении геодинамических моделей эволюции осадочных бассейнов, так и в изучении перспектив их нефтегазоносности является анализ их теплового режима. Исследованию этой задачи посвящено достаточно много работ, среди которых можно выделить два направления: первое – начатое работой Маккензи [1], второе – развитое в работах Бенфилда, Берча и др. [2–5]. В работах первого направления решается задача об остывании мгновенно поднявшегося до известной высоты аномально разогретого вещества, при этом полагается, что в результате остывания литосфера возвращается к исходному распределению температур.

В работах второго направления температуры и тепловые потоки рассчитываются для полупространства со стационарным распределением температур, которое нарушается за счет движения верхней границы. Получены решения для нескольких видов функции движения границы. Решения задачи об эволюции теплового режима в рамках обоих направлений имеют ряд недостатков, ограничивающих возможности их применения (критический разбор можно найти в работах [4–7]).

Существенно, что не получены решения для задачи о тепеловом режиме осадконакопления, учитывающие не только нарушения стационарного распределения температур за счет наращивания верхней границы, но и нестационарность поступающего в основание теплового потока.

В такой постановке задача была решена только для специального вида зависимости от времени скорости осадконакопления V и глубинного теплового потока q: $V = c_1\sqrt{t}$; $q = c_2\sqrt{t}$ [8, 9]. Однако, используя методы асимптотических разложений, можно построить решение задачи о тепловом режиме осадконакопления, не накладывая ограничений на вид функций V и q. При этом важным является то обстоятельство, что, как правило, для реальных режимов осадконакопления можно выделить два масштаба времени: первый – характерное время накопления осадочного слоя, второй – характерное время его прогрева l^2/a^2 (l – толщина слоя, a^2 – температуропроводность). Нетрудно проверить, что отношение характерного времени прогрева к характерному времени накопления является малой величиной (за исключением случаев "лавинной" седиментации) и колеблется в пределах 10^{-1}–10^{-3}. Например, в бассейне Северного моря осадочный слой толщиной 4 км накоплен за время порядка 65 млн. лет [1], и, следовательно, $(l^2/a^2)/T_* \simeq 0{,}01$ ($a^2 = 4$–$6) \cdot 10^{-7}$ м/с). Для осадочных бассейнов Паннонской впадины и Черного моря отношение характерного времени прогрева к времени накопления также лежит в интервале 10^{-1}–10^{-3}. Так как существование двух масштабов времени означает, что поведение решения будет различно на этих временах, то необходимым требованием к решению является его равномерная пригодность – справедливость на всем анализируемом интервале времени, от малых времен до больших. Ниже построено решение, удовлетворяющее этим требованиям. Используется метод разномасштабных разложений, который позволяет упростить анализ.

Уравнение, начальные и граничные условия, описывающие тепловой режим осадконакопления с переменным тепловым потоком на нижнюю границу, запишутся в виде (в одномерной постановке, без учета различия тепловых свойств осадков и основания)

$$
(1)\quad \begin{aligned}
&\frac{\partial v}{\partial T} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \qquad 0 \leqslant x \leqslant \zeta(T),\\
&\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} = \psi(T),\ \ v(x=\zeta(T)) = 0,\ \ v(x,\,T=0) = \varphi(x);
\end{aligned}
$$

T – время, v – температура, $\zeta(T)$ – положение границы, $\psi(T) = -q(T)/\lambda$, λ – теплопроводность среды, $\varphi(x)$ – начальное распределение температур, начало координат $x = 0$ лежит ниже поверхности основания, ось x направлена вверх.

Проведем процедуру обезразмеривания задачи:

$$
\tau = \frac{T}{T_*},\ \ z = \frac{x}{l_*},\ \ u = \frac{v}{v_*};
$$

звездочкой отмечены масштабы величин. Полагая $(l^2/a^2)/T_* = \epsilon \ll 1$, получаем запись исходной задачи (1) в безразмерных переменных:

$$
(2)\quad \begin{aligned}
&\epsilon \frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},\ \ 0 \leqslant z \leqslant \zeta_1(\tau),\\
&u(z,0) = \varphi_1(z),\ \ u(z=\zeta_1(\tau)) = 0,\\
&\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0} = \psi_1(\tau),\\
&\varphi_1 = \varphi(zl_*)/v_*,\ \ \psi_1(\tau) = \psi(T=\tau T_*)l_*/v_*,\\
&\zeta_1 = \zeta/l_*.
\end{aligned}
$$

Вводя $t = \tau/\epsilon$, перепишем уравнение (2) в виде

$$
(3)\quad \begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},\ \ 0 < z < \zeta_1(\epsilon t),\\
&\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0} = \psi_1(\epsilon t),\ \ u(\zeta_1(\epsilon t),t) = 0,\\
&u(z,0) = \varphi_1(z).
\end{aligned}
$$

Если решение искать в виде асимптотического ряда по степеням ϵ

$$
u = u_0(t) + \epsilon u_1(t) + \ldots,
$$

можно показать, что подстановка этого ряда в уравнение даст решение в виде прямого разложения, пригодное только на малых временах t, много меньших $1/\epsilon$, так как на временах порядка $1/\epsilon$ в разложении появляются секулярные члены, т.е. второй член разложения ϵu_1 оказывается одного порядка с первым и разложение перестает быть справедливым. Представление решения в виде прямого разложения удобно для описания начальных стадий поведения решения [10], однако в задаче осадконакопления необходимо строить решение, равномерно пригодное вплоть до больших времен ($t \sim 1/\epsilon$, т.е. $T/T_* \sim 1$).

Для построения такого решения используем метод разномасштабных разложений [11], т.е. найдем решение в виде ряда

$$
u = u_0(t_0, t_1, \ldots) + \epsilon u_1(t_0, t_1, \ldots) + \ldots,
$$

где $t_0 = t$, $t_1 = \epsilon t$, $t_2 = \epsilon^2 t, \ldots$ – масштабы времени, причем для получения равномерно пригодного разложения нулевого порядка (т.е. пригодного вплоть до времен $1/\epsilon$) необходимо исключить секулярность во втором члене разложения ϵu, для получения равномерно пригодного разложения вплоть до времен порядка $1/\epsilon^2$ необходимо исключить секулярность в члене $\epsilon^2 u_2$ и т.д. Так как в силу проведенного обезразмеривания задачи нас будут интересовать времена t порядка $1/\epsilon$, то достаточно построить равномерно пригодное разложение нулевого порядка. Введем новые переменные:

$$y = \frac{z}{\zeta_1(\epsilon t)}, \quad \theta = \int_0^t \frac{1}{(\zeta_1(\epsilon t'))^2} dt', \quad \theta_0 = \theta,$$
$$\theta_1 = \epsilon\theta_0, \quad \theta_2 = \epsilon^2\theta_0, \ldots$$

Уравнение (3) перепишется в виде

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1,$$
$$(4) \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = \psi_2(\epsilon\theta), \quad u(1,\theta) = 0, \quad u(y,0) = \varphi_2(y),$$
$$\psi_2(\epsilon\theta) = \zeta_1(\epsilon t)\psi_1(\epsilon t), \quad \varphi_2(y) = \varphi_1.$$

Подставляя в (4) искомое разложение $u = u_0(\theta_0, \theta_1, \ldots) + \epsilon u_1(\theta_0, \theta_1) + \ldots$ и группируя члены по степеням ϵ, получим уравнение для $u_0(\theta_0, \theta_1, \ldots)$

$$\frac{\partial u_0(\theta_0, \theta_1 \ldots)}{\partial \theta_0} = \frac{\partial^2 u_0(\theta_0, \theta_1, \ldots)}{\partial y^2},$$
$$(5) \qquad \left.\frac{\partial u_0(\theta_0, \theta_1, \ldots)}{\partial y}\right|_{y=0} = \psi_2(\epsilon\theta_0),$$
$$u_0(y,0) = \varphi_2(y), \quad u_0(1,\theta_0) = 0$$

и для $u_1(\theta_0, \theta_1, \ldots)$

$$\frac{\partial u_1(\theta_0, \theta_1, \ldots)}{\partial \theta_0} = \frac{\partial^2 u_1(\theta_0, \theta_1, \ldots)}{\partial y^2} - \frac{\partial u_0(\theta_0, \theta_1, \ldots)}{\partial \theta_1} + 2\frac{\partial u_0}{\partial y} y \frac{\dot\zeta}{\zeta},$$
$$(6) \qquad \left.\frac{\partial u_1}{\partial y}\right|_{y=0} = 0, \quad u_1(y,0) = 0,$$
$$u_1(1,\theta_0) = 0, \quad \dot\zeta = \frac{\partial \zeta}{\partial \theta_1}.$$

Используя методы, изложенные в [12], построим решение уравнения (5):

$$(7) \qquad u_0(y, \theta_0, \theta_1, \ldots) = \psi_2(\epsilon\theta_0)(y-1) + \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(\beta_k y) e^{-\beta_k^2\theta_0},$$
$$\beta_k = \frac{2k+1}{2}\pi,$$

где A_k – неопределенные коэффициенты, описывающие зависимость u_0 от θ_1 и от начального условия. Для нахождения вида коэффициентов A_k рассмотрим уравнение (6).

Решение на отрезке 0,1 может быть представлено в виде $u_1 = \sum_{n=0}^{\infty} u_{1n} \cos \beta_n y$ [12], т.е. собственные значения и собственные функции у задач (5) и (6) одни и те же. Таким образом, для нахождения решения правая часть уравнения (6) должна быть представлена в виде ряда по собственным функциям:

$$(8) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial u_{1n}}{\partial \theta_0} \cos \beta_n y - \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n^2 u_{1n} \cos \beta_n y =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} 2 \left\{ \int_0^1 \left[2\psi_2 \xi \frac{\dot{\zeta}_1}{\zeta_1} - \frac{\partial \psi_2}{\partial \theta_1} (\xi - 1) \right] \cos \beta_n \xi d\xi \; + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\beta_k \theta_0} \int_0^1 \left(2A_k \frac{\partial \cos \beta_k \xi}{\partial \xi} \xi \frac{\dot{\zeta}}{\zeta_1} - \dot{A}_k \cos \beta_k \xi \right) \cos \beta_n \xi d\xi \right\} \cos \beta_n y.$$

$$\dot{A}_k = \frac{\partial A_k}{\partial \theta_1}.$$

Из (8) следуют уравнения для u_{1n}:

$$(9) \qquad \frac{\partial u_{1n}}{\partial \theta_0} + \beta_n^2 u_{1n} = 2 \int_0^1 \left[2\psi_2 \xi \frac{\dot{\zeta}_1}{\zeta_1} - \frac{\partial \psi_2}{\partial \theta_1} (\xi - 1) \right] \cos \beta_n \xi d\xi \; +$$

$$+ 2 \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\beta_k \theta_0} \left\{ \int_0^1 \left(2A_k \frac{\partial \cos \beta_k \xi}{\partial \xi} \xi \frac{\dot{\zeta}_1}{\zeta_1} - \dot{A}_k \cos \beta_k \xi \right) \cos \beta_n \xi d\xi \right\}.$$

Из (9) видно, что секулярность в решении появляется за счет слагаемого правой части вида

$$e^{-\beta_n \theta_0} \int_0^1 \left(2A_n \frac{\dot{\zeta}_1}{\zeta_1} \xi \frac{\partial \cos \beta_n \xi}{\partial \xi} - \dot{A}_n \cos \beta_n \xi \right) \cos \beta_n \xi d\xi,$$

которому соответствует решение $B \cdot \theta_0 e^{-\beta_n^2 \theta_0}$, и, следовательно, на временах порядка $O(1/\epsilon)$ ϵu_1 становится порядка $O(1)$. Условие асимптотической пригодности искомого разложения, таким образом, эквивалентно условию

$$\int_0^1 \left(2A_n \xi \frac{\dot{\zeta}_1}{\zeta_1} \frac{\partial \cos \beta_n \xi}{\partial \xi} - \dot{A}_n \cos \beta_n \xi \right) \cos \beta_n \xi d\xi = 0.$$

Интегрируя, получаем уравнение для $A_n - \dfrac{\dot{\zeta}_1}{\zeta_1} A_n = \dot{A}_n$, решение которого выписывается просто: $A_n = c/\sqrt{\zeta_1(\epsilon\theta_0)}$. Конкретный вид A_n получается из решения уравнения теплопроводности на отрезке 0,1 с граничными и начальными условиями (5):

$$A_n = \frac{\sqrt{\zeta_1(0)}}{\sqrt{\zeta_1(\epsilon\theta_0)}} 2 \int_0^1 (\varphi_2(\xi) - \psi_2(0)(\xi - 1)) \cos \beta_n \xi d\xi.$$

Таким образом, равномерно пригодное вплоть до времен порядка $O(1/\epsilon)$ асимптотическое решение (4) нулевого порядка имеет вид

$$u = \psi_2(\epsilon\theta_0)(y - 1) + \frac{\sqrt{\zeta_1(0)}}{\sqrt{\zeta_1(\epsilon\theta_0)}} 2 \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 (\varphi_2(\xi) - \psi_2(0)(\xi - 1)) \times$$

$$\times \cos \beta_k \xi d\xi \cdot e^{-\beta_n^2 \theta_0} \cos \beta_k y] + O(\epsilon).$$

Переходя к исходным безразмерным переменным, получаем равномерно пригодное асимптотическое решение уравнения (3) в виде

$$u(z, t) = \psi_1(\epsilon t)(z - \zeta_1(\epsilon t)) + \frac{\sqrt{\zeta_1(0)}}{\sqrt{\zeta_1(\epsilon t)}} 2 \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\zeta_1(0)} (\varphi_1(\tilde{z}) -$$

$$- \psi_1(0)(\tilde{z} - \zeta_1(0)) \cos\frac{\beta_k \tilde{z}}{\zeta_1(0)} d\frac{z}{\zeta_1(0)} \exp\left(-\beta_k^2 \int_0^t \frac{d\tilde{t}}{(\zeta_1(\epsilon t))^2}\right) \cos\frac{\beta_k z}{\zeta_1(\epsilon t)} + O(\epsilon).$$

Полученное решение наглядно демонстрирует, что на начальных этапах осадконакопления (на малых временах) существенно влияние начального распределения температур в основании и его соотношение с тепловым возмущением, поступающим из глубинных зон, а на больших временах изменение глубинного теплового режима является определяющим.

Решение в случае зависимости условия на нижней границе от "быстрого" времени, т.е. когда ψ меняется в масштабе времени θ_0, строится аналогичным образом и имеет вид

$$\bar{u} = \psi_2(\theta_0)(y - 1) + \frac{2\sqrt{\zeta_1(0)}}{\sqrt{\zeta_1(\epsilon\theta_0)}} \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 (\varphi_2(\xi) - \varphi_2(0)(\xi - 1)) \times$$

$$\times \cos\beta_k \xi d\xi e^{-\beta_k^2 \theta_0} \cos\beta_k y - \frac{2\sqrt{\zeta_1(0)}}{\sqrt{\zeta_1(\epsilon\theta_0)}} \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\theta_0} \int_0^1 \frac{\partial\psi_2(\theta_0)}{\partial\theta_0} (\xi - 1) \cos\beta_k \xi e^{-\beta_k^2(\theta_0 - \tilde{\theta}_0)} d\xi d\tilde{\theta}_0 \cos\beta_k y + O(\epsilon).$$

Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта
Академии наук СССР
Москва

Поступило
12 VIII 1988

ЛИТЕРАТУРА

1. *McKenzie D.* – Earth Planet. Sci. Lett., 1978, vol. 40, p. 25–32. 2. *Benfield A.E.* – J. Appl. Phys., vol. 20, p. 35–49. 3. *Birch F. et al.* Studies of Applachian Geology. Northern and Maritime. L. etc. Intersci. Publ., 1968, p. 40–60. 4. *Галушкин Ю.И., Смирнов Я.Б.* – Геология и геофизика, 1987, № 11, с. 105–112. 5. *Кутас Р.И.* – Геофиз. сб. АН УССР, 1965, № 1 (12), с. 106–118. 6. *Mareschal J.-C., Lee C.K.* – Geophys. J. Roy. Astron. Soc., 1983, vol. 74, p. 689–712. 7. *Cohran J.R.* – Earth. Planet. Sci. Lett., 1983, vol. 66, p. 289–302. 8. *Turcott D.L., Ahern J.L.* – J. Geophys. Res., 1977, vol. 82, p. 3762–3766. 9. *Гольмшток А.Я.* – Изв. АН СССР. Физика Земли, 1985, № 12, с. 57–65. 10. *Глико А.О.* – Там же, 1986, № 4, с. 3–13. 11. *Коул Дж.* Методы возмущений в прикладной математике. М.: Мир, 1972. 274 с. 12. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 735 с.