



E. P. Golubeva, On the Pellian equation, *Zap. Nauchn. Sem. POMI*, 2002, Volume 286, 36–39

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.172

March 21, 2025, 07:46:00



Е.. П. Голубева

## ОБ УРАВНЕНИИ ПЕЛЛЯ

Мы будем рассматривать уравнение Пелля вида

$$x^2 - dy^2 = 1,$$

где целое  $d > 0$  и не является полным квадратом. Пусть  $\varepsilon(d) = T + U\sqrt{d}$  — наименьшее решение этого уравнения.

Хорошо известно, что  $\varepsilon(d)$  лежит в границах  $\sqrt{d} < \varepsilon(d) < \exp(C\sqrt{d}\log d)$ , где  $C$  — абсолютная постоянная. Если  $d = x^2 - 1$ , то  $\varepsilon(d) = x + \sqrt{d}$ . Таким образом, в этом случае порядок значения  $\varepsilon(d)$  совпадает с нижней границей неравенства. Кроме этой последовательности существует и множество других (например,  $d = 4x^2 - 9x + 5$ , см. [1]), для которых  $\varepsilon(D) \asymp \sqrt{d}$ .

Вместе с тем, все результаты вычислительного характера (начиная с Гаусса) показывают, что для подавляющего большинства  $d$  значения  $\varepsilon(d)$  удовлетворяют неравенству  $\varepsilon(d) \geq \exp(\sqrt{d}/\log^2 d)$ .

Одновременно, все известные на настоящий момент факты крайне далеки от ожидаемых:

в работе [2] показано, что для почти всех  $d$   $\varepsilon(d) > d^{\frac{3}{2}-\delta}$ , где  $\delta > 0$  — произвольная постоянная;

там же доказано, что существует последовательность  $d$ , имеющая положительную плотность и такая, что  $\varepsilon(d) > d^{\frac{3}{2}}$ .

Основная цель настоящей работы — улучшить последнюю оценку.

Для более редких последовательностей известны лучшие результаты:

в работе [3] показано, что для всех простых  $p \equiv 3 \pmod{4}$ ,  $p \leq X$ , кроме, самое большее,  $X/\log^{1+\delta} X$  исключений, справедлива оценка  $\varepsilon(p) > p^3/\log^{1+\delta} p$  ( $\delta > 0$  произвольная постоянная).

Для еще более редких последовательностей, содержащих бесквадратные  $d$ , результаты еще лучше. Например, для  $d = x^2 + 3$  при  $x \geq 4$   $\varepsilon(d) > \exp(\log^2 x/2)$  (см. также [4, 5]).

Наилучшие результаты достигнуты в случае, когда  $d$  делится на большой квадрат. Например, если  $d = 5p^2$ , то почти всегда

$\varepsilon(d) > \exp(d^{1/4})$  (см. [4]).

Проще всего величина  $\varepsilon(d)$  ищется из разложения  $\sqrt{d}$  в обыкновенную непрерывную дробь:

$$\sqrt{d} = [n, \overline{r_1, \dots, r_l, r_{l+1}, r_l, \dots, r_1, 2n}]. \quad (1)$$

Малые значения  $\varepsilon(d)$  соответствуют коротким разложениям. По всем гипотезам и вычислениям, для большинства  $d$  длина периода является большой ( $l > \sqrt{d}/\log^2 d$ ).

В работе [6] было показано, что для почти всех  $d$  первые элементы в этом разложении являются небольшими. Отсюда сразу же вытекает, что для почти всех  $d$  разложение (1) не может быть особенно коротким, поскольку  $n = [\sqrt{d}]$ .

**Теорема.** Пусть  $X/2 \leq d \leq X$ . Существует не менее  $C(\delta)X$  значений  $d$  таких, что  $\varepsilon(d) > d^{2-\delta}$ , где  $\delta$  — произвольная постоянная, удовлетворяющая условию  $0 < \delta < \frac{1}{2}$ ,  $C(\delta) > 0$ .

Для доказательства этого результата там понадобятся три леммы.

**Лемма 1** (см. [6]). Пусть  $P_k/Q_k$  — подходящая дробь к  $\sqrt{d}$ . Существует постоянная  $\nu > 0$  такая, что для всех  $X/2 < d < X$ , кроме  $O(X/\log^2 X)$  возможных исключений, в разложении  $P_k/Q_k$  в непрерывную дробь

$$P_k/Q_k = [n, r_1, \dots, r_k]$$

все элементы  $r_i$  ( $1 \leq i \leq k$ ) удовлетворяют условию  $r_i < \log^{14} X$ , если  $Q_k < X/\log^\nu X$ .

**Лемма 2.** В предыдущих обозначениях значение  $\varepsilon(d)$  удовлетворяет оценке  $\varepsilon(d) > r_{l+1}\sqrt{d}Q_l^2/3$ .

Доказательство содержится в работе [7].

**Лемма 3.** Пусть  $X/2 < d < X$  и  $d = d_1 p$ , где  $p$  — простое,  $p > X^{\frac{1}{2}+\lambda}$  и  $\lambda$  — произвольная постоянная, удовлетворяющая условию  $0 < \lambda < 1/2$ . Тогда для достаточно больших  $X$  имеем  $r_{l+1} > X^\lambda/8$ .

**Доказательство.** Пусть  $\xi_i$  — приведенная квадратичная иррациональность, эквивалентная  $\sqrt{d}$ , которая соответствует подходящей дроби  $P_i/Q_i$ . Тогда

$$\left| \sqrt{d} - \frac{P_i}{Q_i} \right| = \frac{1}{Q_i(Q_i \xi_i + Q_{i-1})}.$$

Пусть  $\xi_i = (b_i + \sqrt{d})/a_i$ . В работе [7] было показано, что

$$d = a_{l+1} \left( \frac{r_{l+1}^2 a_{l+1}}{4} + a_l \right).$$

Таким образом,  $a_{l+1} | 2d$ . Поскольку  $\xi_{l+1}$  является приведенной иррациональностью,  $2 \leq a_{l+1} < 2\sqrt{d} \leq 2\sqrt{X}$ .

Так как  $p > X^{\frac{1}{2}\lambda}$ , отсюда следует, что  $a_{l+1} | 2d_L$ . Значит,  $a_{l+1} \leq 2X^{\frac{1}{2}-\lambda}$ . Поскольку

$$r_{l+1} \geq \left[ \frac{\sqrt{d}}{a_{l+1}} \right],$$

отсюда вытекает, что для достаточно больших  $X$   $r_{l+1} > X^\lambda/8$ , и лемма доказана.

**Следствие.** Пусть  $N(X, \lambda)$  — количество  $d$  таких, что  $X/2 < d < X$  и элемент  $r_{l+1}$  в разложении (1) удовлетворяет условию  $r_{l+1} > X^\lambda/8$ .

Тогда для достаточно больших  $X$  мы имеем

$$N(X, \lambda) > \frac{1}{4} \log \frac{2}{1+2\lambda} X.$$

**Доказательство.** Рассмотрим значения  $d$ , удовлетворяющие условиям леммы 3. Очевидно,

$$N(X, \lambda) \geq \sum_{X^{\frac{1}{2}+\lambda} < p < \frac{X}{2}} \frac{X}{2p}.$$

Отсюда следует требуемое утверждение.

**Доказательство теоремы.** Рассмотрим  $d$ , удовлетворяющие условиям леммы 3. В силу следствия к этой лемме, их количество не меньше, чем  $\log(2/(1+2\lambda))/4X$ , если  $X$  достаточно велико.

Для таких  $d$  элемент  $r_{l+1}$  в разложении (1) удовлетворяет оценке  $r_{l+1} > X^\lambda/8$ .

Пусть  $\nu$  — постоянная из леммы 1. Выберем из этих значений  $d$  те, для которых элементы  $r_1, \dots, r_k$  при  $Q_k < X/\log^\nu X$  удовлетворяют условию  $r_i < \log^{14} X$  ( $1 \leq i \leq k$ ). В силу утверждения леммы 1, таковыми будут почти все  $d$ . Очевидно, что для них  $k \leq l$ .

Из леммы 2 следует, что тогда

$$\varepsilon(d) > \frac{1}{24} X^{\frac{3}{2}+\lambda} / \log^{2\nu} X,$$

и теорема доказана.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Е. П. Голубева, *О неопределенных бинарных квадратичных формах с большим числом классов*, Зап. научн. семин. ЛОМИ **185** (1990), 13–21.
2. С. Hooley, *On the Pellian equation and the class number of indefinite binary quadratic forms*, J. reine und angew Math. **353** (1984), 98–131.
3. Е. П. Голубева, *О числах классов вещественных квадратичных полей дискриминанта  $4p$* , Зап. научн. семин. ПОМИ **204** (1993), 11–36.
4. Е. П. Голубева, *О длинах периодов разложения в непрерывную дробь квадратичных иррациональностей и числах классов вещественных квадратичных полей*, Зап. научн. семин. ЛОМИ **160** (1987), 72–81.
5. Y. Yamamoto, *Real quadratic number fields with large fundamental units*, Osaka J. Math. **8**, No. 2, 261–270.
6. Е. П. Голубева, *О длинах периодов разложения в непрерывную дробь квадратичных иррациональностей и числах классов вещественных квадратичных полей. II*, Зап. научн. семин. ЛОМИ **168** (1988), 11–22.
7. Е. П. Голубева, *Квадратичные иррациональности с фиксированой длиной периода разложения в непрерывную дробь*, Зап. Научн. семин. ПОМИ **196** (1991), 5–30.

Государственный университет  
телекоммуникаций  
им. М. А. Бонч-Бруевича  
E-mail: elena\_golubeva@mail.ru

Поступило 29 августа 2002 г.