К. Ю. Лавров, Подгруппы ортогональных групп четного порядка над локальным полем,
Зап. научн. сем. ПОМИ, 2005, том 321, 240–250

https://www.mathnet.ru/znsl417

Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 321, 2005 г.

К. Ю. Лавров

ПОДГРУППЫ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ГРУПП ЧЕТНОГО ПОРЯДКА НАД ЛОКАЛЬНЫМ ПОЛЕМ

1. Введение

Пусть R – кольцо дискретного нормирования v, R^* – его мультипликативная группа, K – поле частных и $\mathfrak{p}$ – единственный максимальный идеал R. В настоящей работе рассматривается описание подгрупп ортогональной группы $G = \mathrm{SO}(n, K)$ четной степени $n = 2l$ над K, содержащих максимальный расщепимый тор $T = T(2l, R)$.

В работе [1] получено описание подгрупп в полной линейной группе $G_K = \mathrm{GL}(n, K)$ степени n над полем K, $|K| \geqslant 7$, содержащих группу $\mathrm{D}_K = \mathrm{D}(n, K)$ диагональных матриц. Позднее это описание было распространено на случай произвольного (не обязательно даже коммутативного) полулокального кольца [3, 6]. Аналогичный вопрос для специальной линейной группы оказался значительно более трудным и был решен для случая поля в работе [8], для случая кольца дискретного нормирования в работе [15] и, наконец, для случая полулокального кольца в работе [9]. Кроме того, в работе [10] был получен результат для ортогональных групп, схожий с результатом настоящей работы – описание подгрупп в $\mathrm{SO}(n, R)$ и $\mathrm{GO}(n, R)$, содержащих максимальный расщепимый тор $T = T(n, R)$ в случае, когда R – полулокальное кольцо или поле. Данная работа продолжает работы [10, 13] и как в техническом, так и в идейном отношении тесно связана с работами [1, 3, 8, 9, 12, 13, 15].

Заметим, что результат настоящей работы переносит на ортогональные группы также несколько известных циклов работ, в частности, полученное Н. Ивахори, Х. Мацумото, Ф. Брюа и Ж. Титсом описание парахорических подгрупп. Более подробный обзор результатов по расположению подгрупп в линейных (классических) группах можно найти например в работе Н. А. Вавилова [11], где также имеются подробные ссылки на предыдущие обзоры А. Е. Залесского, О. Х. Кинга, А. С. Кондратьева и Ли Шанг Чжи.

2. Предварительные сведения

Для матрицы $a \in G$ через a_{ij} обозначается ее элемент на месте (i, j). Таким образом $a = (a_{ij})$. Через $a^{-1} = (a'_{ij})$ обозначается обратная к a матрица и ее элементы. Нам будет удобно занумеровать строки и столбцы матриц из G следующим образом: $1, \ldots, l, -l, \ldots, -1$. В дальнейшем мы будем всегда предполагать, что $2 \in R^*$. Это, как и во всех предыдущих работах, не является необходимым, так как результаты, аналогичные результатам настоящей работы, могут быть получены без указанного предположения, но в таком случае доказательства стали бы значительно сложнее.

Пусть $f = (f_{ij})$ – матрица порядка $n = 2l$, определенная равенствами $f_{ij} = \delta_{i,-j}$. То есть на побочной диагонали стоят единицы, а на всех остальных местах – нули. Ортогональная группа четного порядка $\mathrm{SO}(2l, K)$ – это группа всех матриц из $\mathrm{SL}(2l, K)$, сохраняющих квадратичную форму $x_1x_{-1}+\ldots+x_lx_{-l}$. Иными словами, $\mathrm{SO}(2l, K)$ состоит их тех $a \in \mathrm{SL}(2l, K)$, для которых $afa^t = f$ (здесь a^t – транспонированная матрица).

Как обычно, e – единичная матрица, e_{ij} – стандартная матричная единица, то есть матрица, у которой на месте (i, j) стоит единица, а на всех остальных местах – нули. Для $\varepsilon \in R^*$ и $i \neq j$ положим $d_{ij}(\varepsilon) = e + (\varepsilon - 1)e_{ii} + (\varepsilon^{-1} - 1)e_{jj}$. Тогда группа $T = T(n, R)$ порождается матрицами $D_i(\varepsilon) = d_{i,-i}(\varepsilon)$ для $1 \leqslant i \leqslant l$, $\varepsilon \in R^*$.

Как и в предыдущих работах [10, 13], для формулировки основного результата мы будем пользоваться понятием сети идеалов кольца, впервые введенного З. И. Боревичем в [1]. Считаем нужным напомнить определение.

Определение 1. *Таблица $\sigma = (c_{ij})$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, составленная из идеалов σ_{ij} кольца R, называется сетью идеалов в R порядка n, если $\sigma_{ir}\sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ij}$ для всех i, j, r. Сеть идеалов называется D-сетью, если, кроме этого, $\sigma_{ii} = R$ при всех i.*

В случае локального кольца и его поля частных вместо идеалов рассматривают R-подмодули поля K, отличные от нуля и K, имеющие вид $\mathfrak{p}^m$, где $m \in \mathbb{Z}$, они называются дробными идеалами. Как и в работах [12, 13, 14], нам будет удобно отступить от традиционного словоупотребления и называть дробными идеалами также нуль и K. При этом мы считаем, что $0 = \mathfrak{p}^{\infty}$, а $K = \mathfrak{p}^{-\infty}$, и, если положить дополнительно $-\infty + \infty = \infty$, то для всех $-\infty \leqslant l, m \leqslant \infty$ справедливо равенство $\mathfrak{p}^l \mathfrak{p}^m = \mathfrak{p}^{l+m}$. Кроме этого для изучаемой задачи, как и в [13], необходимо использовать не D-сети, а их обобщение – V-сети, впервые введенные в [14].

Определение 2. *Таблица $\sigma = (\sigma_{ij}) = (\mathfrak{p}^{m_{ij}})$, где $1 \leqslant i,j \leqslant n$, называется сетью дробных идеалов в K порядка n, если для всех $1 \leqslant i,j,r \leqslant n$ выполнено условие $\sigma_{ir}\sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ij}$ или, иными словами, $m_{ir} + m_{rj} \geqslant m_{ij}$. Сеть $\sigma = (\sigma_{ij})$ дробных идеалов в K порядка n называется V-сетью, если для всех i диагональный идеал σ_{ii} равен либо R, либо K, причем $\sigma_{ii} = K$ в том и только в том случае, когда найдется такой индекс $j \neq i$, что $\sigma_{ij} = \sigma_{ji} = K$.*

Сеть называется *симплектической*, если $\sigma_{ij} = \sigma_{-j,-i}$, для всех i, j, и *ортогональной* если, кроме того, $\sigma_{i,-i} = \sum \sigma_{ij}\sigma_{j,-i}$, $1 \leqslant j \leqslant l$, $j \neq \pm i$, для всех i. Следующие определения аналогичны определениям из работ [1, 3, 13].

Определение 3. *Для произвольной сети σ дробных идеалов в K порядка n через $M(\sigma)$ обозначим совокупность матриц $a = (a_{ij})$ из кольца $M(n,K)$ всех матриц порядка n над K, для которых $a_{ij} \in \sigma_{ij}$ при всех i,j.*

Из определения сети следует, что $M(\sigma)$ есть подкольцо кольца $M(n,K)$. Ясно, что для произвольной сети σ совокупность $e + M(\sigma)$, состоящая из матриц $e + a$, где $a \in M(\sigma)$, является мультипликативной системой.

Определение 4. *Максимальная подгруппа в полной линейной группе $\mathrm{GL}(n,K)$, содержащаяся в мультипликативной системе $e + M(\sigma)$, называется сетевой подгруппой, соответствующей сети σ, и обозначается через $G(\sigma)$.*

Ортогональная сеть σ задает ортогональную сетевую подгруппу $\Gamma(\sigma) = G(\sigma) \cap G$ в группе $G = \mathrm{SO}(n,K)$. Через $N_\Gamma(\sigma)$, и $N_{\overline{\Gamma}}(\sigma)$ обозначим соответственно нормализаторы $\Gamma(\sigma)$ в G и $\overline{G} = \mathrm{GO}(n,K)$.

Основным результатом настоящей статьи является следующая теорема.

Теорема. *Пусть R – кольцо дискретного нормирования v, R^* – его мультипликативная группа, K – поле частных и $\mathfrak{p}$ – единственный максимальный идеал R. Предположим, что поле вычетов $F = R/\mathfrak{p}$ содержит не менее 9 элементов. Тогда для любой подгруппы H группы $\mathrm{SO}(2l, K)$, содержащей максимальный расщепимый тор $T = T(2l, R)$, существует единственная ортогональная V-сеть $\sigma = (\sigma_{ij})$ дробных идеалов в K порядка $n = 2l$ такая, что*

$$\Gamma(\sigma) \leqslant H \leqslant N_\Gamma(\sigma).$$

Как и в работе [10], из этой теоремы сразу же следует описание подгрупп в $\overline{G}$, содержащих T.

Следствие. *В условиях теоремы для любой подгруппы в $\overline{G} = \mathrm{GO}(2l, K)$, содержащей $\overline{T} = \overline{T}(2l, R)$, существует единственная ортогональная V-сеть дробных идеалов в K такая, что $\Gamma(\sigma) \leqslant H \leqslant N_{\overline{\Gamma}}(\sigma)$.*

3. Нормализатор сетевой подгруппы

Матрицы из G, входящие в сетевую подгруппу $\Gamma(\sigma)$, характеризуются довольно простыми конгруэнц-условиями. Важно иметь аналогичную характеризацию для матриц из нормализатора $N_\Gamma(\sigma)$. В этом параграфе мы приводим результаты, дающие такую характеризацию. Все они совершенно аналогичны соответствующим леммам из работы [10], поэтому мы приводим их без доказательств.

Первая лемма, как и в [10], – частный случай предложения 1 из [5]. Она гарантирует существование сети идеалов, ассоциированной с подгруппой.

Лемма 3.1. *Пусть $2 \in R^*$, R – локальное кольцо, которое порождается как кольцо группой R^* своих обратимых элементов, K – поле частных кольца R. Тогда для любой подгруппы H в G, нормализуемой группой T, существует единственная наибольшая ортогональная V-сеть σ дробных идеалов в K такая, что $\mathrm{E}_\Gamma(\sigma) \leqslant H$.*

В формулировке леммы через $\mathrm{E}_\Gamma(\sigma)$ обозначена содержащаяся в $\Gamma(\sigma)$ элементарная сетевая подгруппа, соответствующая сети σ, то есть подгруппа, порожденная всеми содержащимися в $\Gamma(\sigma)$ элементарными ортогональными трансвекциями – матрицами вида $T_{ij}(\alpha)$, $\alpha \in \sigma_{ij}$, $i \neq j$. Напомним, что такие матрицы при четном n имеют вид

$$T_{ij}(\alpha)=T_{-j,-i}(-\alpha)=e+\alpha e_{ij}-\alpha e_{-j,-i}, \text{ где } \alpha\in K, i\neq\pm j.$$

Сеть σ из леммы 3.1 такая, что $\mathrm{E}_\Gamma(\sigma)\leqslant H$, и называется *сетью, ассоциированной с подгруппой* H. Если дополнительно $T\leqslant H$, то $\Gamma(\sigma)\leqslant H$, и будем называть $\Gamma(\sigma)$ *сетевой подгруппой, ассоциированной с* H.

Таким образом, нам надо доказать включение $H\leqslant N_\Gamma(\sigma)$. Следующая лемма дает нам удобную характеризацию матриц из $N_\Gamma(\sigma)$, доказательство аналогичных лемм есть в [4, 10]. Здесь и далее R, R^*, K такие же, как и выше.

Лемма 3.2. *Пусть* $2\in R^*$ *и найдется такой* $\theta\in R^*$, *что* $\theta^2-1\in R^*$, $\sigma=(\sigma_{ij})$ *и* $\tau=(\tau_{ij})$ *– две ортогональные сети дробных идеалов в* K. *Для того, чтобы для матрицы* $a=(a_{ij})\in G$ *имела место формула* $a\Gamma(\sigma)a^{-1}=\Gamma(\tau)$, *необходимо и достаточно, чтобы для любого набора индексов* i, j, r, s *выполнялось включение*

$$a_{ir}\sigma_{rs}a'_{sj}\subseteq\tau_{ij}.$$

Эти условия для всех наборов индексов i, j, r, s *эквивалентны тем же условиям для тех наборов, в которых* $r\neq -s$.

Согласно этой лемме, для того, чтобы убедиться, что некоторая матрица $a=(a_{ij})\in G$ принадлежит $N_\Gamma(\sigma)$, нужно проверить справедливость включений $a_{ir}\sigma_{rs}a'_{sj}\in\sigma_{ij}$, для всех индексов i, j, r, s, при $r\neq -s$, $i\neq j$. Однако, оказывается, что уже в случае полулокального кольца для доказательства того, что некоторая подгрупа $H\geqslant T$ содержится в $N_\Gamma(\sigma)$, достаточно проверить лишь, что $a_{ir}a'_{rj}\in\sigma_{ij}$ для всех матриц $a\in H$. В общем случае это было доказано в теореме 4 работы [3], доказательство факта, совершенно аналогичного нашему, можно найти в [10].

Лемма 3.3. *Пусть* R *– локальное кольцо,* $2\in R^*$ *и поле вычетов* R *содержит более трех элементов. Тогда для того, чтобы подгруппа* H, $T\leqslant H\leqslant G$, *содержалась в* $N_\Gamma(\sigma)$ *для некоторой ортогональной* V*-сети* σ *дробных идеалов в* K, *необходимо и достаточно, чтобы для всех* $a=(a_{ij})\in H$ *имело место включение* $a_{ir}a'_{rj}\in\sigma_{ij}$ *при всех* i, j, r, $i\neq\pm j$.

4. Извлечение ортогональных трансвекций

Все результаты этого параграфа имеют такой характер. Пусть H – подгруппа в G, содержащая T. Тогда, если H содержит матрицу a, подчиненную некоторым дополнительным условиям (например, наличие нулей на фиксированных местах), то H содержит некоторую ортогональную трансвекцию $T_{ij}(\alpha)$, где α сконструирован из элементов матрицы a (например, $\alpha = a_{ij}$, или $\alpha = a_{ir}a'_{rj}$). Цель этой деятельности состоит в том, чтобы доказать, что в H содержится достаточное количество элементарных ортогональных трансвекций. Фиксируем следующие обозначения: H – всегда подгруппа в G, содержащая T, а σ – ассоциированная с H сеть. Напомним, что $T_{ij}(\alpha) \in H$ эквивалентно тому, что $\alpha \in \sigma_{ij}$.

Следующая лемма стандартна, ее аналоги, в том числе и более общие, можно найти, например, в работах [5, 10, 13, 14]. Мы формулируем эту лемму конкретно, так, как это необходимо для решения задачи, рассматриваемой в данной работе.

Лемма 4.1. *Пусть R – кольцо дискретного нормирования, K – его поле частных, $2 \in R^*$ и R порождается как кольцо группой R^*. Если верхняя унитреугольная матрица $a = (a_{ij})$ принадлежит H, то для всех $i < j$ имеем $a_{ij} \in \sigma_{ij}$.*

Условие леммы 4.1 верно как и для более общих случаев колец, например, полулокальных, см. [2], так и для полей, кроме того, она легко вытекает из результатов работы [7]. Разумеется, эта лемма применима и ко всем матрицам, сопряженным с верхними унитреугольными при помощи соответствующих матриц перестановок.

При доказательстве следующих лемм мы будем использовать то, что для ортогональной матрицы $a = (a_{ij})$ четного поряка и обратной к ней $a^{-1} = (a'_{ij})$ верны соотношения ортогональности: $a'_{ij} = a_{-j,-i}$.

Лемма 4.2. *Пусть в условиях леммы 4.1 для некоторой матрицы $a = (a_{ij}) \in H$ при фиксированном r для всех $i \neq r$ справедливы равенства $a_{ri} = 0$. Тогда $a_{ir}a'_{rr} \in \sigma_{ir}$ для всех $i \neq r$.*

Доказательство. Очевидно, что для элементов обратной матрицы a^{-1} также имеем $a'_{ri} = 0$ для всех $i \neq r$. Из условий ортогональности матрицы a следует, что $a_{i,-r} = 0$ для всех $i \neq r$. Положим $b = aD_r(\varepsilon)a^{-1}$, где $\varepsilon \in R^*$, такой, что $\varepsilon - 1 \in R^*$. Тогда $b_{ij} = a_{ir}(\varepsilon-1)a'_{rj} + a_{i,-r}(\varepsilon^{-1}-1)a'_{-r,j} = 0$ при $i \neq r$. Таким образом, ненулевые элементы в матрице b имеются только в r-м столбце, и, следовательно, ее можно представить как произведение ортогональных трансвекций $b = \prod T_{ir}((\varepsilon - 1)a_{ir}a'_{rj})$, где произведение берется по всем $i \neq \pm r$. Теперь мы можем применить к b лемму 4.1, воспользовавшись обратимостью $\varepsilon - 1$, получить требуемые включения. □

Следующая лемма является аналогом леммы 8 из работы [10], но при ее доказательстве, как и в работе [12], мы будем существенно использовать то, что R является кольцом дискретного нормирования.

Напомним свойства дискретных нормирований, которыми будем пользоваться при доказательстве. Если v – дискретное нормирование, то:

$$v(1) = v(-1) = 0, \quad v(-x) = v(x),$$
$$\text{если } v(x) \neq v(y), \text{ то } v(x+y) = \min(v(x), v(y)).$$

Итак, основная лемма об извлечении трансвекций формулируется так.

Лемма 4.3. *Пусть в условиях леммы* 4.1 *поле вычетов кольца* R *содержит не менее* 9 *элементов. Если в матрице* $a = (a_{ij}) \in H$ *при фиксированных* r *и* q *выполнено равенство* $a_{q,-r} = a_{-q,r} = 0$, *то для любого* i $a_{ir}a'_{rq} \in \sigma_{iq}$.

Доказательство. Возьмем $\theta \in R^*$, такое, что $1 + \theta \in R^*$, и рассмотрим матрицу $b(\theta) = aD_r(1+\theta)a^{-1}$. Тогда элемент матрицы b, стоящий на месте (i, j), равен:

$$b(\theta)_{ij} = \delta_{ij} + a_{ir}\theta a'_{rj} + a_{i,-r}\bar{\theta}a'_{-r,j},$$

где $\bar{\theta} = -\theta(\theta+1)^{-1}$. Таким образом, $b(\theta)_{qj} = \delta_{qj} + a_{qr}\theta a'_{rj}$. В частности, $b(\theta)_{q,-q} = 0$ для всех θ. Это значит, что q-е строки матриц $b(\theta)$ и $b(\eta)$ (где η – другой такой элемент, что $\eta(\eta+1) \in R^*$) пропорциональны за исключением диагональных элементов. Положим теперь $c = b(\theta)D_q(\varepsilon)b(\eta)^{-1}$, где $\varepsilon = \theta\eta^{-1}(1+\eta x)(1+\theta x)^{-1}$, $x = a_{qr}a'_{rq}$ – коэффициент, на который нужно подправить q-й диагональный элемент матрицы $b(\theta)$, чтобы q-е строки матриц $b(\theta)$ и $b(\eta)$ стали полностью пропорциональны. Как и в работе [10], непосредственные вычисления показывают, что $c_{qj} = 0$ для всех $j \neq q$, а это значит, что к матрице c можно применить лемму 4.2. Откуда получаем, что $c_{iq}c'_{qq} \in \sigma_{iq}$ для всех $i \neq \pm q$. Дальнейшие, довольно длинные вычисления показывают, что

$$c_{iq} = a_{ir}a'_{rq}\lambda(\theta,\eta) + a_{i,-r}a'_{-r,q}\mu(\theta,\eta),$$

где $\lambda(\theta,\eta) = (\theta-\eta)(\theta-\overline{\eta})\eta^{-1}(1+\theta x)^{-1}$, а $\mu(\theta,\eta) = (\eta-\theta)(1+\theta)^{-1}(1+\theta x)^{-1}(1+\eta)^{-1}(1+\eta x)^{-1}\eta^{-1}[\eta(1+\eta+\eta(1+\theta)x)+\theta(1+\eta+\eta(1+\eta)x)]$; см. [10]. Заметим, что в силу ортогональности a из условия следует, что $a'_{-r,q} = 0$, а это значит, что

$$c_{iq} = \frac{a_{ir}a'_{rq}(\theta-\eta)(\theta-\overline{\eta})}{\eta(1+\theta x)}.$$

Сходные, чуть более простые, вычисления дают выражение для c'_{qq}:

$$c'_{qq} = \frac{\eta}{\theta} + \frac{(\theta-\eta)x}{1+\theta}.$$

Если теперь элемент $x \in R$, то, учитывая условие на кольцо, можно выбрать обратимые элементы θ и η так, чтобы все элементы $1+\theta$, $1+\eta$, $\theta-\eta$, $\theta-\overline{\eta}$, $1+\theta x$, $1+\eta x$, $\eta(1+\theta)+\theta(\theta-\eta)x$ также были обратимы. А это значит, что $a_{ir}a'_{rq} \in \sigma_{iq}$.

Если же $x \notin R$, то $v(x) = -m < 0$. Тогда, как и в случае целого x, выберем θ, η так, чтобы $1+\theta$, $1+\eta$, $\theta-\eta$, $\theta-\overline{\eta}$ были обратимы. Следовательно,

$$v(c_{iq}c'_{qq}) = v(a_{iq}a'_{rq}\lambda(\theta,\eta)c'_{qq}) = v(a_{iq}a'_{rq}) - v(1+\theta x) + v(c'_{qq}).$$

Так как $x \notin R$, то $v(1+\theta x) = v(x) = -m$, при этом $v(c'_{qq}) = v(x) = -m$. А это значит, что $v(a_{ir}a'_{pq}) = v(c_{iq}c'_{qq})$. Иными словами, $a_{ir}a'_{rq} \in \sigma_{iq}$ и для случая не целого x. Лемма доказана. $\square$

5. Доказательство теоремы

Теперь можем приступать к доказательству теоремы. Вспомним, что группа $\overline{T} = \overline{T}(2l,K)$ диагональных матриц, содержащихся в $\overline{G} = \mathrm{GO}(2l,K)$, порождается T и матрицами вида $h(\varepsilon) = \mathrm{diag}(\varepsilon,\ldots,\varepsilon,1,\ldots,1)$, где ε повторяется l раз. Тогда матрица $h(\varepsilon^2)$ лишь на скалярный множитель ε отличается от матрицы $D(\varepsilon) = \prod D_i(\varepsilon)$, где $1 \leqslant i \leqslant l$. Кроме того, в доказательстве нам удобно будет для матрицы $a \in G$ через $\Delta_{ij}^{kl}(a)$ обозначать ее минор $a_{ik}a_{jl} - a_{il}a_{jk}$.

Доказательство теоремы. Пусть $T \leqslant H \leqslant G$ и σ – ассоциированная с H сеть. По лемме 3.3, достаточно проверить что для любой матрицы $a \in H$ выполнены включения $a_{ir}a'_{rj} \in \sigma_{ij}$, $i \neq \pm j$.

Докажем вначале, что для любой матрицы $b \in H$ и любых индексов $i \neq \pm j$ будет $\sum b_{is}b'_{sj} \in \sigma_{ij}$, $1 \leqslant s \leqslant l$. Возьмем $\varepsilon \in R^*$ такое, что $\varepsilon^2 - 1 \in R^*$, и положим $c = bD(\varepsilon)b^{-1}$. Несложное вычисление показывает, что $c_{j,-j} = c_{-j,j} = 0$ для любого j. Таким образом, мы можем применить к матрице лемму 4.3 и заключить, что $c_{ij}c'_{jj} \in \sigma_{ij}$. Но ε можно выбрать так, чтобы элемент c'_{jj} был обратим, в силу того, что элемент локального кольца обратим, когда обратим его образ в поле вычетов, то есть он не лежит в максимальном идеале. Чтобы образ c'_{jj} был обратим в поле вычетов, нужно, чтобы образ ε не был решением одного квадратного уравнения, что вместе с предыдущими условиями запрещает не более 5 значений, а поле вычетов содержит не менее 9 элементов. Дальнейшие вычисления показывают, что $c_{ij} = (\varepsilon - \varepsilon^{-1})\sum b_{is}b'_{sj}$, $1 \leqslant s \leqslant l$.

Докажем теперь, что при всех r и $i \neq \pm j$ для любой матрицы $a \in H$ справедливо включение $\Delta_{i,-j}^{r,-r}(a) \in \sigma_{ij}$. Для этого возьмем $\xi \in R^*$ такой, что $1 + \xi \in R^*$, и рассмотрим матрицу $b = aD_r(1+\xi)a^{-1}$. Применив к ней только что доказанное включение и подставив в него выражение для коэффициентов матрицы b через коэффициенты матрицы a:

$$b_{ij} = \delta_{ij} + a_{ir}\xi a'_{rj} + a_{i,-r}\overline{\xi}a'_{-r,j},$$

где $\overline{\xi}$ имеет тот же смысл, что и в лемме 4.3, получим $\Delta_{i,-j}^{r,-r}(a)\overline{\xi}(1 + x\xi) \in \sigma_{ij}$, где $x = \sum a'_{js}a_{sj}$, $1 \leqslant s \leqslant l$. Осталось заметить, что если $x \in R$, то ξ можно выбрать так, чтобы $1 + x\xi \in R^*$, а если $x \notin R$, то $v(1 + x\xi) = v(x) = -m < 0$ и, следовательно, $v(\Delta_{i,-j}^{r,-r}(a)) = v(\sigma_{ij}) + m$, что и значит, что $\Delta_{i,-j}^{r,-r}(a) \in \sigma_{ij}$.

Завершим теперь доказательство включений $a_{ir}a'_{rj} \in \sigma_{ij}$. Снова рассмотрим матрицу $b = aD_r(1+\xi)a^{-1}$. Для нее имеет место включение $\Delta_{i,j}^{r,-r}(b) \in \sigma_{ij}$, или, что то же самое,

$$a_{ir}a'_{rj}\overline{\xi}(1 + y\xi) - a_{i,-r}a'_{-r,j}\xi(1 - y\overline{\xi}) \in \sigma_{ij},$$

где $y = \Delta_{i,-i}^{r,-r}(a)$. Аналогичное включение для b^{-1} будет выглядеть так:

$$a_{ir}a'_{rj}\xi(1+y\overline{\xi}) - a_{i,-r}a'_{-r,j}\overline{\xi}(1-y\xi) \in \sigma_{ij}.$$

Определитель этой системы включений равен $\bar{\xi}^2 - \xi^2$, и можно выбрать $\xi \in R^*$ так, чтобы он был обратим. Тем самым требуемые включения, а вместе с ними и теорема, доказаны.

В заключение сделаем замечания общего характера о возможностях дальнейшего развития этой работы.

Не вызывает сомнений, что аналог теоремы верен и для ортогональных групп нечетного порядка, он очевидным образом, как и в работе [10], сводится к теореме доказанной, в этой работе. Автор предполагает в ближайшее время провести соответствующие вычисления.

Кроме того, не вызывает сомнений также возможность решения схожей задачи для симплектических групп. После этого, учитывая работу [13], можно будет заключить, что стандартное описание подгрупп верно для всех бесконечных серий групп Шевалле (в их классическом понимании) над полем частного кольца дискретного нормирования.

Литература

1. З. И. Боревич, *Описание подгрупп полной линейной группы, содержащих группу диагональных матриц.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **64** (1976), 12–29.
2. З. И. Боревич, *О параболических подгруппах в специальной линейной группе над полулокальным кольцом.* — Вестн. Ленингр. Ун-та No. 19 (1976), 29–34.
3. З. И. Боревич, Н. А. Вавилов, *Подгруппы полной линейной группы над полулокальным кольцом, содержащие группу диагональных матриц.* — Тр. Матем. ин-та АН СССР **148** (1978), 43–57.
4. З. И. Боревич, Е. В. Дыбкова, Л. Ю. Колотилина, *О сопряженности сетевых подгрупп в линейных группах.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **86** (1979), 11–18.
5. Н. А. Вавилов, *О параболических подгруппах групп Шевалле над полулокальным кольцом.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **75** (1978), 43–58.
6. Н. А. Вавилов, *О подгруппах полной линейной группы над полулокальным кольцом, содержащих группу диагональных матриц.* — Вестн. Ленингр. ун-та No. 1 (1981), 10–15.
7. Н. А. Вавилов, *Параболические подгруппы групп Шевалле над коммутативным кольцом.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **116** (1982), 20–43.

8. Н. А. Вавилов, *О подгруппах специальной линейной группы, содержаших группу диагональных матриц,* I–IV. — Вестн. Ленингр. ун-та, Сер. I, No. 22 (1985), 3–7 ; No. 2, вып. 1 (1986), 10–15; вып. 2 (1987), 3–8; вып. 3 (1988), 10–15.
9. N. A. Vavilov, *Subgroups of* SL_n *over a semilocal ring.* — Preprint Universität Bielefeld, No. 111 (1998), 1–13.
10. Н. А. Вавилов, *О подгруппах расщепимых ортогональных групп.* — Сиб. мат. журнал **24** (1988), 12–25.
11. N. A. Vavilov, *Intermediate subgroups in Chevalley groups.* — in: Proc. Conf. Groups of Lie type and their Geometries (Como – 1993). Cambridge Univ. Press. 1995, p. 233–280.
12. Н. А. Вавилов, И. Хамдан, *О подгруппах полной линейной группы над локальным полем.* — Изв. вузов. Математика **12** (1989), 8–15.
13. К. Ю. Лавров, *Подгруппы полной линейной группы над локальным полем.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **272** (2000), 242–258.
14. И. Хамдан, *Подгруппы полной линейной группы над полем частных полулокального кольца.* — Канд. дисс., Ленинград (1987).
15. И. Хамдан, *О подгруппах специальной линейной группы над локальным кольцом главных идеалов.* — В кн.: Сб. научн. трудов. (Кольца и линейные группы.) Кубанский гос. ун-т. (1988), с. 119–126.

Lavrov K. G. Subgroups of the orthogonal groups of even degree over a local field.

In this paper, we obtain the description of subgroups of orthogonal linear groups $\mathrm{SO}(2l, K)$ and $\mathrm{GO}(2l, K)$ over the field of fractions K of a local principal ideal domain R containing the maximal split tori $T = T(2l, R)$ with entries from R. Similar result for overgroups T in case of semilocal ring and field was obtained earlier by N. Vavilov. Result of the present paper generalizes also some known results.

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 28 декабря 2004 г.