Челябинский физико-математический журнал. 2022. Т. 7, вып. 4. С. 434–446.

УДК 517.9 DOI: 10.47475/2500-0101-2022-17404

КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С НЕСКОЛЬКИМИ ПРОИЗВОДНЫМИ РИМАНА — ЛИУВИЛЛЯ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ПОРЯДКОВ

М. М. Туров

Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия
turov_m_m@mail.ru

Доказано существование единственного локального решения неполной задачи типа Коши для квазилинейного уравнения с несколькими дробными производными Римана — Лиувилля и с секториальным набором операторов при младших производных в линейной части в случае локальной липшицевости нелинейного оператора относительно суммы норм графиков неограниченных операторов из уравнения. При этом нелинейный оператор зависит от дробных производных Римана — Лиувилля младших порядков с произвольной дробной частью. Полученный абстрактный результат применяется при исследовании одной начально-краевой задачи для уравнения с несколькими дробными производными по времени.

Ключевые слова: *прозводная Римана — Лиувилля, уравнение с несколькими дробными производными, дефект задачи типа Коши, квазилинейное уравнение.*

Введение

В последние десятилетия дифференциальные уравнения дробного порядка играют всё более важную роль в математическом моделировании в таких областях, как физика, гидрогеология, математическая биология и др.; большое количество работ посвящено изучению и систематизации различных свойств интегродифференциальных операторов и их приложениям (см. монографии [1–4] и библиографию в них).

Основным объектом исследования в данной работе является квазилинейное дифференциальное уравнение

$$D^{\alpha}z(t)=\sum_{j=-r}^{m-1}A_jD^{\alpha-m+j}z(t)+\sum_{l=1}^{n}B_lD^{\alpha_l}z(t)+ \\ +F(t,D^{\alpha-m-\varrho}z(t),D^{\alpha-m-\varrho+1}z(t),\dots,D^{\alpha-1}z(t),D^{\gamma_1}z(t),D^{\gamma_2}z(t),\dots,D^{\gamma_q}z(t)) \tag{1}$$

с несколькими дробными производными Римана — Лиувилля $D^{\beta}z$ при $\beta>0$ и/или дробными интегралами Римана — Лиувилля $D^{\beta}z$ при $\beta\leqslant 0$ в линейной и нелинейной части. Здесь $m-1<\alpha\leqslant m\in\mathbb{N}$, $\alpha_1<\alpha_2<\dots<\alpha_n<\alpha$, $m_l-1<\alpha_l\leqslant m_l\in\mathbb{Z}$, $\alpha_l-m_l\neq\alpha-m$, $l=1,2,\dots,n$, $\gamma_1<\gamma_2<\dots<\gamma_n<\alpha$, $n_i-1<\gamma_i\leqslant n_i\in\mathbb{Z}$, $\gamma_i-n_i\neq\alpha-m$, $i=1,2,\dots,q$. Операторы A_j, $j=-r,-r+1,\dots,m-1$, B_l, $l=1,2,\dots,n$, линейные и замкнутые с областями определения в банаховом пространстве $\mathcal{Z}$, пересечение $\mathcal{D}$ которых плотно в $\mathcal{Z}$.

Работа поддержана грантом Президента РФ для поддержки ведущих научных школ, проект НШ-2708.2022.1.1.

В линейном ($F \equiv 0$) скалярном случае, т. е. при $\mathcal{Z} = \mathbb{R}$, однозначная разрешимость задачи типа Коши

$$D^{\alpha-m+k}z(t_0) = z_k,\ k = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{2}$$

уравнения (1) исследовалась в [1; 2; 5–8] при различных условиях на α_n. В работе [9] показано, что, если не используются какие-либо дополнительные ограничения на значение α_n, кроме $\alpha_n < \alpha$, для линейного уравнения (1) в банаховом пространстве задача типа Коши (2) может быть разрешена в том и только в том случае, когда $z_k = 0$, $k = 0, 1, \ldots, m^* - 1$. Так называемый дефект m^* задачи типа Коши определяется числами α, α_1, α_2, $\ldots$, α_n.

В работе [9] доказана однозначная разрешимость неполной задачи типа Коши

$$D^{\alpha-m+k}z(t_0) = z_k,\ k = m^*, m^*+1, \ldots, m-1, \tag{3}$$

для линейного неоднородного уравнения (1) ($F = f(t)$) с ограниченными операторами A_j, $j = -r, -r+1, \ldots, m-1$, B_l, $l = 1, 2, \ldots, n$, $f \in C((t_0, T); \mathcal{Z}) \cap L_1(t_0, T; \mathcal{Z})$. В [10; 11] определяется класс $\mathcal{A}_\alpha^{n,r}(\theta_0, a_0)$, $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$, $a_0 \geqslant 0$, наборов линейных замкнутых операторов. Доказано, что задача (1), (3) с

$$(A_{-r}, A_{-r+1}, \ldots, A_{m-1}, B_1, B_2, \ldots, B_n) \in \mathcal{A}_\alpha^{n,r}(\theta_0, a_0)$$

в линейном неоднородном случае $F \equiv f(t) \in C((t_0, T); \mathcal{D}) \cap L_1(t_0, T; \mathcal{D})$ имеет единственное классическое решение.

В случае $n = 1$, $\alpha_1 = 0$ мы имеем $(0, \ldots, 0, B_1) \in \mathcal{A}_\alpha^{1,r}(\theta_0, a_0)$ тогда и только тогда, когда $B_1 \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$ (см. определение в [12; 13]). Вопросы однозначной разрешимости задачи типа Коши для линейных и квазилинейных уравнений с одной производной Римана — Лиувилля и с оператором из $\mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$ в линейной части изучались в [14–18]. В работах [19; 20] изучались начальные задачи для уравнений с несколькими дробными производными Герасимова — Капуто.

В работе [21] исследовалось уравнение (1) при условии, что нелинейный оператор зависит только от дробных производных, порядки которых имеют такую же дробную часть, как у старшей дробной производной, т. е. имеет вид $F(t, D^{\alpha-m}z(t), D^{\alpha-m+1}, \ldots, D^{\alpha-1}z(t))$. В настоящей работе не вводится никаких ограничений на порядки младших дробных производных, от которых зависит нелинейный оператор. Аналогично тому, как вводится понятие дефекта в работе [9], в данной работе оно вводится с учётом наличия младших дробных производных в нелинейном операторе. Доказывается теорема об однозначной локальной разрешимости неполной задачи типа Коши при условии, что нелинейный оператор локально липищев по норме $\mathcal{D}$, которая представляет собой сумму норм графиков всех неограниченных операторов в линейной части уравнения. Для иллюстрации абстрактных результатов исследована начально-краевая задача для одного квазилинейного уравнения с несколькими производными Римана — Лиувилля по времени.

1. Предварительные сведения

Пусть $\mathcal{Z}$ — банахово пространство, $\mathcal{L}(\mathcal{Z})$ — пространство линейных ограниченных операторов в $\mathcal{Z}$ и $\mathcal{C}l(\mathcal{Z})$ — множество линейных замкнутых плотно определённых в $\mathcal{Z}$ операторов, $\mathbb{R}_+ := \{a \in \mathbb{R} : a > 0\}$, $h : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{Z}$. Для $\beta > 0$ и $t > 0$ определим дробный интеграл Римана — Лиувилля

$$J^\beta h(t) := \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} h(s)ds,$$

J^0 будет означать тождественный оператор. Пусть $m-1<\alpha\leqslant m\in\mathbb{N}$, D^m — обычная производная порядка m, D^α — дробная производная Римана — Лиувилля, т. е. $D^\alpha h(t)=D^mJ^{m-\alpha}h(t)$. При $\beta<0$ будем использовать обозначение $D^\beta h(t):=J^{-\beta}h(t)$.

Пусть $m-1<\alpha\leqslant m\in\mathbb{N}$, $n,r\in\mathbb{N}$, $\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_n<\alpha$, $m_l-1<\alpha_l\leqslant m_l\in\mathbb{Z}$, $\alpha_l-m_l\neq\alpha-m$, $l=1,2,\ldots,n$, $A_{-r},A_{-r+1},\ldots,A_{m-1},B_1,B_2,\ldots,B_n$ — операторы из $\mathcal{C}l(\mathcal{Z})$ с областями определения $D_{A_{-r}}$, $D_{A_{-r+1}}$, …, $D_{A_{m-1}}$, D_{B_1}, D_{B_2}, …, D_{B_n} соответственно. Обозначим

$$\mathcal{D}:=\bigcap_{j=-r}^{m-1}D_{A_j}\cap\bigcap_{l=1}^{n}D_{B_l},\quad R_\lambda:=\left(\lambda^\alpha I-\sum_{j=-r}^{m-1}\lambda^{\alpha-m+j}A_j-\sum_{l=1}^{n}\lambda^{\alpha_l}B_l\right)^{-1}:\mathcal{Z}\to\mathcal{D}.$$

Снабдим множество $\mathcal{D}$ нормой

$$\|\cdot\|_{\mathcal{D}}=\|\cdot\|_{\mathcal{Z}}+\sum_{j=-r}^{m-1}\|A_j\cdot\|_{\mathcal{Z}}+\sum_{l=1}^{n}\|B_l\cdot\|_{\mathcal{Z}},$$

относительно которого $\mathcal{D}$ является банаховым пространством, поскольку является пересечением банаховых пространств $D_{A_{-r}},D_{A_{-r+1}},\ldots,D_{A_{m-1}}$, D_{B_1}, D_{B_2}, …, D_{B_n} с соответствующими нормами графиков операторов.

Определение 1. [10]. Набор операторов $(A_{-r},\ldots,A_{m-1},B_1,\ldots,B_n)\in(\mathcal{C}l(\mathcal{Z}))^{m+n+r}$ принадлежит классу $\mathcal{A}_\alpha^{n,r}(\theta_0,a_0)$ для некоторых $\theta_0\in(\pi/2,\pi)$, $a_0\geqslant 0$, если выполняются следующие условия:

1) $\mathcal{D}$ плотно в $\mathcal{Z}$;

2) для любых $\lambda\in S_{\theta_0,a_0}:=\{\mu\in\mathbb{C}:|\arg(\mu-a_0)|<\theta_0\}$, $p=0,1,\ldots,m-1$ справедливо включение

$$R_\lambda\cdot\left(I-\sum_{j=p+1}^{m-1}\lambda^{j-m}A_j\right)\in\mathcal{L}(\mathcal{Z});$$

3) для любых $\theta\in(\pi/2,\theta_0)$, $a>a_0$ существует такое $K(\theta,a)>0$, что для всех $\lambda\in S_{\theta,a}$, $p=0,1,\ldots,m-1$ имеем

$$\left\|R_\lambda\cdot\left(I-\sum_{j=p+1}^{m-1}\lambda^{j-m}A_j\right)\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}\leqslant\frac{K(\theta,a)}{|\lambda-a||\lambda|^{\alpha-1}}.$$

Замечание 1. По сравнению с работой [7] здесь операторы для краткости перегруппированы: операторы C_s при дробных интегралах в исследуемом уравнении теперь обозначены как A_{-r+k}, $k=0,1,\ldots,r$, в случае дробной части порядка интеграла β_s, совпадающей с дробной частью α, а также через B_l в противном случае. Все они по-прежнему являются операторами при дробных интегралах в уравнении, т. е. при дробных производных отрицательного порядка.

Обозначим через $\lceil\beta\rceil$ наименьшее целое число, не превосходимое числом $\beta\in\mathbb{R}$. Как в работе [9], обозначим $\underline{\alpha}:=\max\{\alpha_l:\alpha_l-m_l<\alpha-m,\ l=1,2,\ldots,n\}$, $\underline{m}:=\lceil\underline{\alpha}\rceil$, $\overline{\alpha}:=\max\{\alpha_l:\alpha_l-m_l>\alpha-m,\ l=1,2,\ldots,n\}$, $\overline{m}:=\lceil\overline{\alpha}\rceil$, $m^*:=\max\{\underline{m}-1,\overline{m}\}$, $m_0^*:=\max\{m^*,0\}$.

Замечание 2. При используемой перегруппировке (см. замечание 1) возникает возможность отрицательного m^*, когда исследуемое уравнение помимо старшей производной содержит только дробные интегралы. На этот случай определяется m_0^*.

Замечание 3. Заметим, что m^* полностью определяется числами $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, т. е. $m^* = m^*(\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$.

При $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a > a_0$, $k = 0, 1, \dots, m-1$ введём обозначения

$$Z_k(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \lambda^{m-\alpha} R_\lambda \left(\lambda^{\alpha-1-k} I - \sum_{j=k+1}^{m-1} \lambda^{\alpha-m-1+j-k} A_j \right) e^{\lambda t} d\lambda, \quad t > 0,$$

где $\Gamma := \Gamma^+ \cup \Gamma^- \cup \Gamma^0$, $\Gamma^0 := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - a| = r_0 > 0, \arg \lambda \in (-\theta, \theta)\}$, $\Gamma^\pm := \{\lambda \in \mathbb{C} : \arg(\lambda - a) = \pm\theta, |\lambda - a| \in [r_0, \infty)\}$, $r_0 > 0$.

Теорема 1. [11]. *Пусть* $m - 1 < \alpha \leqslant m \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \alpha$, $m_l - 1 < \alpha_l \leqslant m_l \in \mathbb{Z}$, $\alpha_l - m_l \neq \alpha - m$, $l = 1, 2, \dots, n$, $A_j \in \mathcal{C}l(\mathcal{Z})$, $j = -r, -r+1, \dots, m-1$, $B_l \in \mathcal{C}l(\mathcal{Z})$, $l = 1, 2, \dots, n$, $(A_{-r}, A_{-r+1}, \dots, A_{m-1}, B_1, B_2, \dots, B_n) \in \mathcal{A}_\alpha^{n,r}(\theta_0, a_0)$, $z_k \in \mathcal{D}$, $k = m_0^*, m_0^* + 1, \dots, m-1$, $f \in C((t_0, T); \mathcal{D}) \cap L_1(t_0, T; \mathcal{D})$. *Тогда функция*

$$z(t) = \sum_{k=m_0^*}^{m-1} Z_k(t - t_0) z_k + \int\limits_{t_0}^{t} Z_{m-1}(t - s) f(s) ds$$

является единственным решением задачи типа Коши

$$D^{\alpha-m+k} z(t_0) = z_k, \ k = m_0^*, m_0^* + 1, \dots, m-1,$$

для уравнения

$$D^\alpha z(t) = \sum_{j=-r}^{m-1} A_j D^{\alpha-m+j} z(t) + \sum_{l=1}^{n} B_l D^{\alpha_l} z(t) + f(t), \quad t \in (t_0, T). \tag{4}$$

2. Неполная задача типа Коши

Пусть $m - 1 < \alpha \leqslant m \in \mathbb{N}$, $n, r, q \in \mathbb{N}$. Рассмотрим квазилинейное уравнение

$$\begin{gathered} D^\alpha z(t) = \sum_{j=-r}^{m-1} A_j D^{\alpha-m+j} z(t) + \sum_{l=1}^{n} B_l D^{\alpha_l} z(t) + \\ + F(t, D^{\alpha-m-\varrho} z(t), D^{\alpha-m-\varrho+1} z(t), \dots, D^{\alpha-1} z(t), D^{\gamma_1} z(t), D^{\gamma_2} z(t), \dots, D^{\gamma_q} z(t)), \end{gathered} \tag{5}$$

где $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \alpha$, $m_l - 1 < \alpha_l \leqslant m_l \in \mathbb{Z}$, $\alpha_l - m_l \neq \alpha - m$, $l = 1, 2, \dots, n$, $\gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_q < \alpha$, $n_i - 1 < \gamma_i \leqslant n_i \in \mathbb{Z}$, $\gamma_i - n_i \neq \alpha - m$, $i = 1, 2, \dots, q$. Некоторые α_l и γ_i могут быть отрицательными.

Пусть $l_0 := \min\{l \in \{1, 2, \dots, n\} : \alpha_l > 0\}$, если $\{l \in \{1, 2, \dots, n\} : \alpha_l > 0\}$ не пусто, $i_0 := \min\{i \in \{1, 2, \dots, q\} : \gamma_i > 0\}$, если $\{i \in \{1, 2, \dots, q\} : \gamma_i > 0\}$ не пусто. Если же $\alpha_n \leqslant 0$, то положим $l_0 := n + 1$, а при $\gamma_q \leqslant 0$ будем считать, что $i_0 := q + 1$.

Определим $\mu^* := m^*(\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \gamma_1 + 1, \gamma_2 + 1, \dots, \gamma_q + 1)$, $\mu_0^* := \max\{\mu^*, 0\}$. Здесь в отличие от работы [9] приходится определять дефект μ^* не только по α_k, $k = 1, 2, \dots, n$, а ещё и по числам $\gamma_i + 1$, $i = 1, 2, \dots, q$. В силу следствий 1–4 [9] для решения задачи Коши

$$D^{\alpha-m+k} z(t_0) = z_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \tag{6}$$

для уравнения (5) с необходимостью выполняются условия

$$D^{\alpha-m+k}z(t_0)=0,\quad k=-r,-r+1,\dots,\mu^*-1;$$

$$D^{\alpha_l-m_l+k}z(t_0)=0,\quad k=0,1,\dots,m_l-1,\ l=1,2,\dots,n;$$
$$D^{\gamma_i-n_i+k}z(t_0)=0,\quad k=0,1,\dots,n_i-1,\ i=1,2,\dots,q.$$

Для исследования уравнения (5) потребуется существование конечных пределов $\lim\limits_{t\to t_0} D^{\gamma_i}z(t):=D^{\gamma_i}z(t_0)$, $i=1,2,\dots,q$, являющихся аргументами нелинейного оператора в начальный момент времени, поэтому μ^* определяется не по числам γ_i, а по γ_i+1, $i=1,2,\dots,q$. Поэтому, как вытекает из следствий 1–4 [9], задача

$$D^{\alpha-m+k}z(t_0)=z_k,\quad k=\mu_0^*,\mu_0^*+1,\dots,m-1, \tag{7}$$

будет рассматриваться также с необходимым условием на её решение $D^{\alpha-m+\mu_0^*}z(t_0)=0$ в случае $m^*(\alpha,\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n,\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_q)<\mu_0^*$. Если $m-1<\gamma_q<\alpha$, то $\mu_0^*=m$ и неполная задача Коши не содержит начальных условий и все z_k в условиях (6) с необходимостью равны нулю.

Пусть U открытое подмножество в $\mathbb{R}\times\mathcal{Z}^{m+\varrho+q}$, отображение $B:U\to\mathcal{Z}$ локально липшицево по норме $\mathcal{D}$, т. е. для каждого $(t,x_1,x_2,\dots,x_{m+\varrho+q})\in U$ существуют окрестность $V\subset U$, $C>0$, такие, что для всех $(t,y_1,y_2,\dots,y_{m+\varrho+q})$, $(t,v_1,v_2,\dots,v_{m+\varrho+q})\in V$

$$\|F(t,y_1,y_2,\dots,y_{m+\varrho+q})-F(t,v_1,v_2,\dots,v_{m+\varrho+q})\|_{\mathcal{D}}\leqslant C\sum_{k=1}^{m+\varrho+q}\|y_k-v_k\|_{\mathcal{Z}}. \tag{8}$$

Решением задачи (5), (7) на отрезке $[t_0,t_1]$ будем называть такую функцию $z:(t_0,t_1]\to\mathcal{D}$, что $J^{m-\alpha}z\in C^m((t_0,t_1];\mathcal{Z})\cap C^{m-1}([t_0,t_1];\mathcal{Z})$, $D^{\alpha-m+j}z\in C((t_0,t_1];D_{A_j})$, $j=-r,-r+1,\dots,m-1$, $D^{\alpha_l}z\in C((t_0,t_1];D_{B_l})$, $l=1,2,\dots,n$, $D^{\gamma_i}z\in C([t_0,t_1];\mathcal{Z})$, $i=1,2,\dots,q$, выполнены условия (7), включение $(t,D^{\alpha-m-\varrho}z(t),D^{\alpha-m-\varrho+1}z(t),\dots,D^{\alpha-1}z(t),D^{\gamma_1}z(t),D^{\gamma_2}z(t),\dots,D^{\gamma_q}z(t))\in U$ при $t\in[t_0,t_1]$ и равенство (5) при $t\in(t_0,t_1]$.

Лемма 1. *Пусть $m-1<\alpha\leqslant m\in\mathbb{N}$. Тогда линейное пространство*

$$C_\alpha(t_0,t_1;\mathcal{Z}):=\{x\in C((t_0,t_1];\mathcal{Z}):J^{m-\alpha}x\in C^{m-1}([t_0,t_1];\mathcal{Z})\cap C^m((t_0,t_1];\mathcal{Z}),\\ (t-t_0)^{m-\alpha}D^\alpha x(t)\in C([t_0,t_1];\mathcal{Z})\}$$

с нормой $\|x\|_{C_\alpha(t_0,t_1;\mathcal{Z})}:=\|J^{m-\alpha}x\|_{C^{m-1}([t_0,t_1];\mathcal{Z})}+\|(t-t_0)^{m-\alpha}D^\alpha x(t)\|_{C([t_0,t_1];\mathcal{Z})}$ является банаховым.

Доказательство. Все аксиомы нормы проверяются непосредственно. В частности, если $\|x\|_{C_\alpha(t_0,t_1;\mathcal{Z})}=0$, то $J^{m-\alpha}x(t)\equiv0$, $x(t)\equiv D^{m-\alpha}J^{m-\alpha}x(t)\equiv0$, поскольку $C_\alpha(t_0,t_1;\mathcal{Z})\subset L_1(t_0,t_1;\mathcal{Z})$.

Пусть последовательность $\{x_k\}$ фундаментальна в $C_\alpha(t_0,t_1;\mathcal{Z})$, тогда существуют $y:=\lim\limits_{k\to\infty}J^{m-\alpha}x_k\in C^{m-1}([t_0,t_1];\mathcal{Z})$, $y_1(t):=\lim\limits_{k\to\infty}(t-t_0)^{m-\alpha}D^\alpha x_k\in C([t_0,t_1];\mathcal{Z})$. В пространстве $C([t_0,t_1];\mathcal{Z})$ имеем

$$\lim_{k\to\infty}((t-t_0)D^{\alpha-1}x_k(t))'=\lim_{k\to\infty}(D^{\alpha-1}x_k(t)+(t-t_0)D^\alpha x_k(t))=$$

$$=D^{m-1}y(t)+(t-t_0)^{1-m+\alpha}y_1(t).$$

Поэтому $(t-t_0)D^{\alpha-1}x_k(t)$ имеет предел в $C^1([t_0,t_1];\mathcal{Z})$, равный $(t-t_0)D^{m-1}y(t)$, следовательно,

$$((t-t_0)D^{m-1}y(t))' = D^{m-1}y(t) + (t-t_0)D^m y(t) = D^{m-1}y(t) + (t-t_0)^{1-m+\alpha}y_1(t),$$

$D^m y(t) = (t-t_0)^{\alpha-m}y_1(t) \in L_1(t_0,t_1;\mathcal{Z}) \cap C((t_0,t_1];\mathcal{Z})$. Положим

$$x(t) := D^{m-\alpha}y(t) = (t-t_0)^{\alpha-m}y(t_0)/\Gamma(\alpha-m+1) + J^{\alpha-m+1}y'(t) \in C((t_0,t_1];\mathcal{Z}),$$

тогда $J^{m-\alpha}x = y \in C^{m-1}([t_0,t_1];\mathcal{Z})$, $(t-t_0)^{m-\alpha}D^\alpha x(t) = (t-t_0)^{m-\alpha}D^m y(t) = y_1(t) \in C([t_0,t_1];\mathcal{Z})$, $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$ в $C_\alpha(t_0,t_1;\mathcal{Z})$. Таким образом, $C_\alpha(t_0,t_1;\mathcal{Z})$ является банаховым пространством. □

Лемма 2. *Пусть* $m-1 < \alpha \leqslant m \in \mathbb{N}$, $x \in C_\alpha(t_0,t_1;\mathcal{Z})$, $n-1 < \beta \leqslant n \in \mathbb{Z}$, $\beta < \alpha$, $\alpha - m \neq \beta - n$. *Тогда* $D^\beta x \in C((t_0,t_1];\mathcal{Z})$.

Доказательство. Если $\beta - n < \alpha - m$, то для $x \in C_\alpha(t_0,t_1;\mathcal{Z})$ $J^{n-\beta}x = J^{n-\beta+\alpha-m}J^{m-\alpha}x$. Тогда при $k = 0,1,\ldots,m$

$$\begin{aligned} D^k J^{n-\beta+\alpha-m}J^{m-\alpha}x(t) = \sum_{l=0}^{k-1} \frac{(t-t_0)^{n-\beta+\alpha-m-k+l}D^{\alpha-m+l}x(t_0)}{\Gamma(n-\beta+\alpha-m-k+l+1)} + \\ + \int_{t_0}^{t} (t-s)^{n-\beta+\alpha-m-1}D^{\alpha-m+k}x(s)ds, \end{aligned} \tag{9}$$

при $k = 0,1,\ldots,m-1$

$$\left\| \int_{t_0}^{t} (t-s)^{n-\beta+\alpha-m-1}D^{\alpha-m+k}x(s)ds \right\|_{\mathcal{Z}} \leqslant \frac{\|x\|_{C_\alpha(t_0,t_1;\mathcal{Z})}(t-t_0)^{n-\beta+\alpha-m}}{n-\beta+\alpha-m}.$$

Кроме того, поскольку $n \leqslant m$,

$$\int_{t_0}^{t} (t-s)^{n-\beta+\alpha-m-1}\|D^\alpha x(s)\|_{\mathcal{Z}}ds \leqslant \|x\|_{C_\alpha(t_0,t_1;\mathcal{Z})} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{n-\beta+\alpha-m-1}(s-t_0)^{\alpha-m}ds \leqslant$$

$$\leqslant \|x\|_{C_\alpha(t_0,t_1;\mathcal{Z})}(t-t_0)^{n-\beta+\alpha-m}B(n-\beta+\alpha-m,\alpha-m+1),$$

где B — бета-функция Эйлера, то $D^\beta x \in C((t_0,t_1];\mathcal{Z})$.

Если же $\beta - n > \alpha - m$, то $n \leqslant m-1$ в силу условия $\beta < \alpha$. Следовательно, при $k = 0,1,\ldots,m-1$

$$\begin{aligned} D^k J^{n-\beta}x(t) &= D^k J^{n-\beta}D^{m-\alpha}J^{m-\alpha}x(t) = D^k J^{n-\beta}D^1 J^{\alpha-m+1}J^{m-\alpha}x(t) = \\ &= D^k J^{n-\beta}\left(\frac{(t-t_0)^{\alpha-m}}{\Gamma(\alpha-m+1)}J^{m-\alpha}x(t_0) + J^{\alpha-m+1}D^{\alpha-m+1}x(t)\right) = \\ &= \frac{(t-t_0)^{\alpha-m+n-\beta-k}J^{m-\alpha}x(t_0)}{\Gamma(\alpha-m+n-\beta-k+1)} + D^k J^{\alpha-m+n-\beta+1}D^1 J^{m-\alpha}x(t) = \\ &= \sum_{l=0}^{k} \frac{(t-t_0)^{n-\beta+\alpha-m-k+l}D^{\alpha-m+l}x(t_0)}{\Gamma(n-\beta+\alpha-m-k+l+1)} + \int_{t_0}^{t} (t-s)^{n-\beta+\alpha-m}D^{k+1}J^{m-\alpha}x(s)ds. \end{aligned}$$

При получении последнего равенства использовано равенство (9) и сдвиг нумерации в сумме. Повторяя рассуждения предыдущего абзаца, получим сходимость последнего интеграла при $k = 0,1,\ldots,m-1$, поэтому $D^\beta x \in C((t_0,t_1];\mathcal{Z})$. □

Введём в рассмотрение также пространство $C_{\alpha;\mu_0^*}(t_0,t_1;\mathcal{Z}) := \{x \in C_\alpha(t_0,t_1;\mathcal{Z}) : D^{\alpha-m+k}x(t_0)=0,\ k=0,1,\dots,\mu_0^*-1\}$.

Замечание 4. По построению μ_0^* для $x \in C_{\alpha;\mu_0^*}(t_0,t_1;\mathcal{Z})$ имеем равенства $D^{\alpha_l-m_l+k}x(t_0)=0,\ k=0,1,\dots,m_l-1,\ l=1,2,\dots,n,\ D^{\gamma_i-n_i+k}x(t_0)=0,\ k=0,1,\dots,n_i,\ i=1,2,\dots,q$.

Следствие 1. *Пусть $m-1<\alpha\leqslant m\in\mathbb{N}$, $x\in C_{\alpha;\mu_0^*}(t_0,t_1;\mathcal{Z})$ в условиях данного параграфа. Тогда $D^{\gamma_i}x\in C([t_0,t_1];\mathcal{Z})$, $i=1,2,\dots,q$, и существует такое $C_1>0$, что для всех $x\in C_{\alpha;\mu_0^*}(t_0,t_1;\mathcal{Z})$*

$$\|D^{\gamma_i}x\|_{C([t_0,t_1];\mathcal{Z})}\leqslant C_1\|x\|_{C_\alpha(t_0,t_1;\mathcal{Z})}. \tag{10}$$

Доказательство. Из замечания 4 и леммы 2 следует, что для $x\in C_{\alpha;\mu_0^*}(t_0,t_1;\mathcal{Z})$ выполняются включения $D^{\gamma_i}x\in C([t_0,t_1];\mathcal{Z})$, $i=1,2,\dots,q$. Из доказательства леммы 2 в силу равенств (9) и $D^{\gamma_i-n_i+k}x(t_0)=0$, $k=0,1,\dots,n_i$, $i=1,2,\dots,q$, получаем при $\gamma_i-n_i<\alpha-m$

$$D^{\gamma_i}x(t)=\int\limits_{t_0}^{t}(t-s)^{n_i-\gamma_i+\alpha-m-1}D^{n_i}J^{m-\alpha}x(s)ds,$$

а при $\gamma_i-n_i>\alpha-m$

$$D^{\gamma_i}x(t)=\int\limits_{t_0}^{t}(t-s)^{n_i-\gamma_i+\alpha-m}D^{n_i+1}J^{m-\alpha}x(s)ds,$$

и в обоих случаях выполняется неравенство (10). □

Замечание 5. Функция, удовлетворяющая условиям неполной задачи типа Коши (7), с точностью до $o(t-t_0)^{\alpha-1}$ ведёт себя как функция

$$\widetilde{z}(t)=\frac{(t-t_0)^{\alpha-m+\mu_0^*}z_{\mu_0^*}}{\Gamma(\alpha-m+\mu_0^*+1)}+\frac{(t-t_0)^{\alpha-m+\mu_0^*+1}z_{\mu_0^*+1}}{\Gamma(\alpha-m+\mu_0^*+2)}+\dots+\frac{(t-t_0)^{\alpha-1}z_{m-1}}{\Gamma(\alpha)},$$

поэтому $D^{\alpha-m-\varrho}\widetilde{z}(t_0)=D^{\alpha-m-\varrho+1}\widetilde{z}(t_0)=\dots=D^{\alpha-m+\mu_0^*-1}\widetilde{z}(t_0)=0$, $D^{\gamma_1}\widetilde{z}(t_0)=D^{\gamma_2}\widetilde{z}(t_0)=\dots=D^{\gamma_q}\widetilde{z}(t_0)=0$ по построению μ_0^*. Поэтому в начальный момент времени аргумент нелинейного оператора в уравнении (5) имеет вид $(t_0,0,0,\dots,0,z_{\mu_0^*},z_{\mu_0^*+1},\dots,z_{m-1},0,0,\dots,0)$.

Лемма 3. *Пусть $m-1<\alpha\leqslant m\in\mathbb{N}$, $\alpha_1<\alpha_2<\dots<\alpha_n<\alpha$, $m_l-1<\alpha_l\leqslant m_l\in\mathbb{Z}$, $\alpha_l-m_l\neq\alpha-m$, $\gamma_1<\gamma_2<\dots<\gamma_q<\alpha$, $n_i-1<\gamma_i\leqslant n_i\in\mathbb{Z}$, $\gamma_i-n_i\neq\alpha-m$, $i=1,2,\dots,q$, $A_j\in\mathcal{C}l(\mathcal{Z})$, $j=-r,-r+1,\dots,m-1$, $B_l\in\mathcal{C}l(\mathcal{Z})$, $l=1,2,\dots,n$, $(A_{-r},A_{-r+1},\dots,A_{m-1},B_1,B_2,\dots,B_n)\in\mathcal{A}_\alpha^{n,r}(\theta_0,a_0)$, $z_k\in\mathcal{D}$, $k=\mu_0^*,\mu_0^*+1,\dots,m-1$, U открыто в $\mathbb{R}\times\mathcal{Z}^{m+\varrho+q}$, $(t_0,0,0,\dots,0,z_{\mu_0^*},z_{\mu_0^*+1},\dots,z_{m-1},0,0,\dots,0)\in U$, $F\in C(U;\mathcal{D})$. Тогда функция $z\in C_{\alpha;\mu_0^*}(t_0,t_1;\mathcal{Z})$ является решением задачи (5), (7) на отрезке $[t_0,t_1]$ при некотором $t_1>t_0$ в том и только в том случае, когда при $t\in[t_0,t_1]$*

$$z(t)=\sum_{k=\mu_0^*}^{m-1}Z_k(t-t_0)z_k+\int\limits_{t_0}^{t}Z_{m-1}(t-s)F^z(s)ds, \tag{11}$$

где $F^z(s) = F(s, D^{\alpha-m-\varrho}z(s), D^{\alpha-m-\varrho+1}z(s), \dots, D^{\alpha-1}z(s), D^{\gamma_1}z(s), \dots, D^{\gamma_q}z(s))ds$.

Доказательство. Если $z \in C_{\alpha;\mu_0^*}(t_0, t_1; \mathcal{Z})$ — решение задачи (5), (7) на отрезке $[t_0, t_1]$, то в силу замечания 4, следствия 1 и условий на F отображение $t \to F^z(t)$ непрерывно действует из $[t_0, t_1]$ в $\mathcal{D}$, а значит, удовлетворяет условиям теоремы 1. Следовательно, выполняется равенство (11).

Пусть $z \in C_{\alpha;\mu^{**}}(t_0, t_1; \mathcal{Z})$ удовлетворяет равенству (11). Тогда в силу замечания 4, следствия 1 и условий на F отображение $t \to F^z(t)$ непрерывно действует из $[t_0, t_1]$ в $\mathcal{D}$. Поэтому, как при доказательстве теоремы 1, можно напрямую доказать, что z — решение задачи (5), (7) на отрезке $[t_0, t_1]$. □

Теперь перейдём к основному утверждению.

Теорема 2. *Пусть* $m-1 < \alpha \leqslant m \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \alpha$, $m_l - 1 < \alpha_l \leqslant m_l \in \mathbb{Z}$, $\alpha_l - m_l \neq \alpha - m$, $\gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_q < \alpha$, $n_i - 1 < \gamma_i \leqslant n_i \in \mathbb{Z}$, $\gamma_i - n_i \neq \alpha - m$, $i = 1, 2, \dots, q$, $A_j \in \mathcal{C}l(\mathcal{Z})$, $j = -r, -r+1, \dots, m-1$, $B_l \in \mathcal{C}l(\mathcal{Z})$, $l = 1, 2, \dots, n$, $(A_{-r}, A_{-r+1}, \dots, A_{m-1}, B_1, B_2, \dots, B_n) \in \mathcal{A}_\alpha^{n,r}(\theta_0, a_0)$, $z_k \in \mathcal{D}$, $k = \mu_0^*, \mu_0^*+1, \dots, m-1$, U *открыто в* $\mathbb{R} \times \mathcal{Z}^{m+\varrho+q}$, $(t_0, 0, 0, \dots, 0, z_{\mu_0^*}, z_{\mu_0^*+1}, \dots, z_{m-1}, 0, 0, \dots, 0) \in U$, *отображение* $F \in C(U; D)$ *локально липшицево по норме* $\mathcal{D}$. *Тогда существует такое* $t_1 > t_0$, *что задача* (5), (7) *имеет единственное решение на* $[t_0, t_1]$.

Доказательство. Возьмём $t_1 > t_0$, $\varepsilon > 0$, такие, что в окрестности

$$V := \{(t, x_1, x_2, \dots, x_{m+\varrho+q}) \in \mathbb{R} \times \mathcal{Z}^{m+\varrho+q} : t \in [t_0, t_1],$$
$$\|x_k\|_{\mathcal{Z}} \leqslant \varepsilon, k = 1, 2, \dots, \varrho + \mu_0^*, \varrho + m + 1, \varrho + m + 2, \dots, \varrho + m + q,$$
$$\|x_l - z_{l-\varrho-1}\|_{\mathcal{Z}} \leqslant \varepsilon, \ l = \varrho + \mu_0^* + 1, \varrho + \mu_0^* + 2, \dots, \varrho + m\}$$

точки $(t_0, 0, 0, \dots, 0, z_{\mu_0^*}, z_{\mu_0^*+1}, \dots, z_{m-1}, 0, 0, \dots, 0)$ неравенство (8) выполняется при некотором $C > 0$.

Рассмотрим множество

$$\mathfrak{M}_{t_1} := \{x \in C_{\alpha;\mu_0^*}(t_0, t_1; \mathcal{Z}) : \|D^{\alpha-m+k}x(t)\|_{\mathcal{Z}} \leqslant \varepsilon, \ k = -\varrho, -\varrho+1, \dots, \mu_0^* - 1,$$

$$\|D^{\alpha-m+k}x(t) - z_k\|_{\mathcal{Z}} \leqslant \varepsilon, \ k = \mu_0^*, \mu_0^*+1, \dots, m-1, \ t \in [t_0, t_1]\},$$

которое в силу леммы 1 является метрическим пространством с метрикой, задаваемой как норма разности в $C_\alpha(t_0, t_1; \mathcal{Z})$. Определим в $\mathfrak{M}_{t_1}$ оператор

$$G(x)(t) = \sum_{k=\mu_0^*}^{m-1} Z_k(t - t_0)z_k + \int_{t_0}^{t} Z_{m-1}(t-s)F^x(s)ds.$$

Рассуждая, как при доказательстве леммы 3, с учётом замечания 4, следствия 1 и теоремы 1 получим, что $G(x) \in \mathfrak{M}_{t_1}$ для любого $x \in \mathfrak{M}_{t_1}$ при $t_1 > t_0$, достаточно близком к t_0.

Сделаем замену в интеграле

$$x_F(t) := \int_{t_0}^{t} Z_{m-1}(t-s)F^x(s)ds = \int_{0}^{t-t_0} Z_{m-1}(t-t_0-\tau)F^x(t_0+\tau)d\tau.$$

В работе [10] показано, что

$$D^{\alpha-m+k}x_F(t) = \int_{0}^{t-t_0} V_{\alpha-m+k}(t-t_0-\tau)F^x(t_0+\tau)d\tau = \int_{t_0}^{t} V_{\alpha-m+k}(t-s)F^x(s)ds,$$

где

$$V_\kappa(t) := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \lambda^\kappa R_\lambda e^{\lambda t}d\lambda,\ \|V_\kappa(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leqslant ce^{bt},\ \kappa < \alpha - 1,\ \|V_{\alpha-1}(t)x_0\|_{\mathcal{Z}} \leqslant ce^{bt}\|x_0\|_{\mathcal{D}}$$

для всех $t > 0$, $x_0 \in \mathcal{D}$, при некоторых $c, b > 0$, не зависящих от t, x_0. Поэтому для $x, y \in \mathfrak{M}_{t_1}$ в силу следствия 1 при $k = 0, 1, \ldots, m-2$

$$\|D^{\alpha-m+k}G(x)(t) - D^{\alpha-m+k}G(y)(t)\|_{\mathcal{Z}} = \left\|\int\limits_{t_0}^{t} V_{\alpha-m+k}(t-s)(F^x(s) - F^y(s))ds\right\|_{\mathcal{Z}} \leqslant$$

$$\leqslant Cc(t-t_0)e^{b(t-t_0)}\left(\sum_{k=-\varrho}^{m-1}\max_{t\in[t_0,t_1]}\|D^{\alpha-m+k}x(t) - D^{\alpha-m+k}y(t)\|_{\mathcal{Z}} + \right.$$

$$\left. + \max_{t\in[t_0,t_1]}\sum_{i=1}^{q}\|D^{\gamma_i}x(t) - D^{\gamma_i}y(t)\|_{\mathcal{Z}}\right) \leqslant (t_1 - t_0)C_2\|x - y\|_{C_\alpha(t_0,t_1;\mathcal{Z})}.$$

Кроме того,

$$\|D^{\alpha-1}G(x)(t) - D^{\alpha-1}G(y)(t)\|_{\mathcal{Z}} = \left\|\int\limits_{t_0}^{t} V_{\alpha-1}(t-s)(F^x(s) - F^y(s))ds\right\|_{\mathcal{Z}} \leqslant$$

$$\leqslant c(t-t_0)e^{b(t-t_0)}\max_{t\in[t_0,t_1]}\|F^x(t) - F^y(t)\|_{\mathcal{D}} \leqslant$$

$$\leqslant Cc(t-t_0)e^{b(t-t_0)}\left(\sum_{k=-\varrho}^{m-1}\max_{t\in[t_0,t_1]}\|D^{\alpha-m+k}x(t) - D^{\alpha-m+k}y(t)\|_{\mathcal{Z}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{q}\max_{t\in[t_0,t_1]}\|D^{\gamma_i}x(t) - D^{\gamma_i}y(t)\|_{\mathcal{Z}}\right) \leqslant (t_1 - t_0)C_2\|x - y\|_{C_\alpha(t_0,t_1;\mathcal{Z})}.$$

Таким образом, оператор G — сжимающий в полном метрическом пространстве $\mathfrak{M}_{t_1}$ при достаточно малом $t_1 - t_0$, и существует его единственная неподвижная точка $z \in \mathfrak{M}_{t_1}$. Согласно лемме 3 z — решение задачи (5), (7) на отрезке $[t_0, t_1]$.

Если существует два решения задачи (5), (7), то по лемме 3 каждое из них является неподвижной точкой оператора G в пространстве $\mathfrak{M}_{t_1}$. Но неподвижная точка единственна, поэтому решения совпадают. □

3. Приложение к одной дробной модели

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$, рассмотрим уравнение при $(\xi, t) \in \Omega \times (t_0, T]$

$$D_t^1 v(\xi,t) - \kappa D_t^{3/2}\Delta v(\xi,t) = a\Delta^2 v(\xi,t) + h(\xi, D_t^{-1/2}v(\xi,t), D_t^{4/3}v(\xi,t)), \qquad (12)$$

где $a, \kappa \in \mathbb{R}$, $\Delta := D_{\xi_1}^2 + D_{\xi_2}^2 + \cdots + D_{\xi_d}^2$ — оператор Лапласа по пространственным переменным $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_d$, D_t^β — дробная производная Римана — Лиувилля по t, если $\beta > 0$, или дробный интеграл Римана — Лиувилля по t в случае $\beta \leqslant 0$. При граничном условии Дирихле

$$v(\xi,t) = 0,\ \ (\xi,t) \in \partial\Omega \times (0,T], \qquad (13)$$

оператор Лапласа непрерывно обратим, поэтому в случае $\kappa \neq 0$ уравнение (12) можно переписать в виде

$$D_t^{3/2}v(\xi,t) = \kappa^{-1}D_t^1\Delta^{-1}v(\xi,t) - a\kappa^{-1}\Delta v(\xi,t) - \kappa^{-1}\Delta^{-1}h(\xi, D_t^{-1/2}v(\xi,t), D_t^{4/3}v(\xi,t)). \tag{14}$$

Поэтому $\alpha = 3/2$, $m = 2$, $r = 0$, $A_0 = A_1 = 0$, $n = 2$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$, $B_1 = -a\kappa^{-1}\Delta$, $B_2 = \kappa^{-1}\Delta^{-1}$, $\varrho = 0$, $q = 1$, $\gamma_1 = 4/3$, $\mu^* = m^*(3/2, 0, 1, 7/3) = 2 = \mu_0^*$, поэтому начальных условий рассматриваемая задача не содержит, начальные данные с необходимостью являются нулевыми: $D_t^{-1/2}(\xi, t_0) \equiv 0$, $D_t^{1/2}(\xi, t_0) \equiv 0$.

Из предыдущего абзаца следует, что $m + \varrho + q = 3$, $F(t, x_1, x_2, x_3) = -\kappa^{-1}\Delta^{-1}h(\cdot, x_1(\cdot), x_3(\cdot))$, таким образом, аргумент этого отображения в начальный момент времени $(t_0, 0, \ldots, 0, z_{\mu_0^*}, z_{\mu_0^*+1}, \ldots, z_{m-1}, 0, \ldots, 0) = (0, 0, 0)$, так как от t_0 оно не зависит и при этом $\mu_0^* = 2 > 1 = m - 1$. Возьмём $l \in \mathbb{N}$, $l > d/2$, $\mathcal{Z} = H^l(\Omega)$ — пространство Соболева, $D_{B_1} = H_0^{2+l}(\Omega) := \{w \in H^{2+l}(\Omega) : w(\xi) = 0, \xi \in \partial\Omega\} = \mathcal{D}$, $D_{B_2} = \mathcal{Z}$. Рассуждая, как при доказательстве теоремы 4 [10], получим, что при $a\kappa < 0$ в условиях данного параграфа $(0, 0, B_1, B_2) \in \mathcal{A}_\alpha^{2,0}(\theta_0, a_0)$ при некоторых $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$, $a_0 > 0$.

Если $h \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^2; \mathbb{R})$, то в силу предложения 1 [22, с. 197] отображение $(x_1(\xi), x_2(\xi), x_3(\xi)) \to h(\xi, x_1(\xi), x_3(\xi))$ принадлежит классу $C^\infty((H^l(\Omega))^3; H^l(\Omega))$, следовательно,

$$F(x_1, x_2, x_3)(\xi) = -\kappa^{-1}\Delta^{-1}h(\xi, x_1(\xi), x_3(\xi)) \in C^\infty((H^l(\Omega))^3; H_0^{2+l}(\Omega)),$$

$$\|F(y_1, y_2, y_3) - F(z_1, z_2, z_3)\|_{\mathcal{D}} \leqslant c_1\|h(\xi, y_1(\xi), y_3(\xi)) - h(\xi, z_1(\xi), z_3(\xi))\|_{\mathcal{Z}} \leqslant$$

$$\leqslant c_1 \sup_{(w_1,w_2,w_3)\in V} \|h'(\xi, w_1(\xi), w_3(\xi))\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \sum_{j=1}^{3} \|y_j - z_j\|_{\mathcal{Z}},$$

где h' — производная Фреше отображения $h(\xi, x_1(\xi), x_2(\xi))$, определяемая частными производными по фазовым переменным x_1, x_3, а V — некоторая окрестность выбранной точки в пространстве $(H^l(\Omega))^3$. Таким образом, отображение F локально липшицево по норме $\mathcal{D}$ и в случае $a\kappa < 0$ по теореме 2 существует такое $t_1 > t_0$, что задача (13), (14) имеет единственное решение в цилиндре $\Omega \times [t_0, t_1]$.

Список литературы

1. **Нахушев А. М.** Дробное исчисление и его применение. М. : Физматлит, 2003.
2. **Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J.** Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Amsterdam, Boston, Heidelberg : Elsevier Science Publishing, 2006.
3. **Tarasov V. E.** Fractional Dynamics: Applications of Fractional Calculus to Dynamics of Particles, Fields and Media. New York : Springer, 2011.
4. **Учайкин В. В.** Метод дробных производных. Ульяновск : Артишок, 2008.
5. **Luchko Yu. F., Srivastava H. M.** The exact solution of certain differential equations of fractional order by using operational calculus // Computers & Mathematics with Applications. 1995. Vol. 29, no. 8. P. 73–85.
6. **Hadid S. B., Luchko Yu. F.** An operational method for solving fractional differential equations of an arbitrary real order // Panamerican Mathematical Journal. 1996. Vol. 6, no. 1. P. 57–73.
7. **Ozturk I.** On the theory of fractional differential equation // Докл. Адыг. (Черкес.) Междунар. академии наук. 1988. Т. 3, № 1. С. 35–39.

8. **Псху А. В.** Начальная задача для линейного обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка // Мат. сб. 2011. Т. 202, № 4. С. 111–122.
9. **Федоров В. Е., Туров М. М.** Дефект задачи типа Коши для линейных уравнений с несколькими производными Римана — Лиувилля // Сиб. мат. журн. 2021. Т. 62, № 5. С. 1143–1162.
10. **Fedorov V. E., Du W. S., Turov M. M.** On the unique solvability of incomplete Cauchy type problems for a class of multi-term equations with the Riemann — Liouville derivatives // Symmetry. 2022. Vol. 14, no. 1. P. 75.
11. **Fedorov V. E., Turov M. M.** Sectorial tuples of operators and quasilinear fractional equations with multi-term linear part // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2022. Vol. 43, no. 6. P. 1502–1512.
12. **Bajlekova E. G.** Fractional Evolution Equations in Banach Spaces. PhD thesis. Eindhoven : Eindhoven University of Technology, University Press Facilities, 2001.
13. **Романова Е. А., Федоров В. Е.** Разрешающие операторы линейного вырожденного эволюционного уравнения с производной Капуто. Секториальный случай // Мат. заметки СВФУ. 2016. Т. 24, вып. 4. С. 58–72.
14. **Федоров В. Е., Авилович А. С.** Задача типа Коши для вырожденного уравнения с производной Римана — Лиувилля в секториальном случае // Сиб. мат. журн. 2019. Т. 60, № 2. С. 461–477.
15. **Fedorov V. E., Avilovich A. S., Borel L. V.** Initial problems for semilinear degenerate evolution equations of fractional order in the sectorial case // Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. 2019. Vol. 292. P. 41–62.
16. **Авилович А. С., Гордиевских Д. М., Федоров В. Е.** Вопросы однозначной разрешимости и приближённой управляемости для линейных уравнений дробного порядка с гёльдеровой правой частью // Челяб. физ.-мат. журн. 2020. Т. 5, вып. 1. С. 5–21.
17. **Fedorov V. E., Nagumanova A. V., Avilovich A. S.** A class of inverse problems for evolution equations with the Riemann — Liouville derivative in the sectorial case // Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2021. Vol. 44, no. 15. P. 11961–11969.
18. **Fedorov V. E., Avilovich A. S.** Semilinear fractional-order evolution equations of Sobolev type in the sectorial case // Complex Variables and Elliptic Equations. 2021. Vol. 66. P. 1108–1121.
19. **Fedorov V. E., Kostić M.** On a class of abstract degenerate multi-term fractional differential equations in locally convex space // Eurasian Mathematical Journal. 2018. Vol. 9, no. 3. P. 33–57.
20. **Федоров В. Е., Бойко К. В., Фуонг Т. Д.** Начальные задачи для некоторых классов линейных эволюционных уравнений с несколькими дробными производными // Мат. заметки СВФУ. 2021. Т. 28, вып. 3. С. 85–104.
21. **Fedorov V. E., Turov M. M., Kien B. T.** A class of quasilinear equations with Riemann — Liouville derivatives and bounded operators // Axioms. 2022. Vol. 11, no. 3. P. 96.
22. **Хэссард Б., Казаринов Н., Вэн И.** Теория и приложения бифуркации рождения цикла. М. : Мир, 1985.

Поступила в редакцию 11.07.2022.
После переработки 13.10.2022.

Сведения об авторе

Туров Михаил Михайлович, младший научный сотрудник, старший преподаватель кафедры математического анализа, Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия; e-mail: turov_m_m@mail.ru.

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2022. Vol. 7, iss. 4. P. 434–446.

DOI: 10.47475/2500-0101-2022-17404

QUASILINEAR MULTI-TERM EQUATIONS WITH RIEMANN — LIOUVILLE DERIVATIVES OF ARBITRARY ORDERS

M.M. Turov

Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia
turov_m_m@mail.ru

The existence of a unique local solution of the incomplete Cauchy type problem is proved for a quasilinear equation with several fractional Riemann — Liouville derivatives and with a sectorial tuple of operators at lower derivatives in the linear part in the case of the local Lipschitz continuity of a nonlinear operator with respect to the sum of the norms of graphs of unbounded operators from the equation. In this case, the nonlinear operator depends on the fractional Riemann—Liouville derivatives of lower orders with arbitrary fractional parts. The obtained abstract result is used in the study of an initial boundary value problem for an equation with several fractional derivatives in time.

Keywords: *Riemann — Liouville derivative, multi-term fractional differential equation, defect of Cauchy type problem, quasilinear equation.*

References

1. **Nakhushev A.M.** *Drobnoye ischisleniye i yego primeneniye* [Fractional Calculus ant Its Applications]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2003. (In Russ.).
2. **Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.** *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. Amsterdam, Boston, Heidelberg, Elsevier Science Publishing, 2006.
3. **Tarasov V.E.** *Fractional Dynamics: Applications of Fractional Calculus to Dynamics of Particles, Fields and Media.* New York, Springer, 2011.
4. **Uchaykin V.V.** *Metod drobnykh proizvodnykh* [Fractional derivatives method]. Ul'yanovsk, Artishok Publ., 2008. (In Russ.).
5. **Luchko Yu.F., Srivastava H.M.** The exact solution of certain differential equations of fractional order by using operational calculus. *Computers & Mathematics with Applications*, 1995, vol. 29, no. 8, pp. 73–85.
6. **Hadid S.B., Luchko Yu.F.** An operational method for solving fractional differential equations of an arbitrary real order. *Panamerican Mathematical Journal*, 1996, vol. 6, no. 1, pp. 57–73.
7. **Ozturk I.** On the theory of fractional differential equation. *Doklady Adygskoy (Cherkesskoy) Mezhdunarodnoy Akademii Nauk* [Reports of Adyghe (Circassian) International Academy of Sciences], 1998, vol. 3, no. 1, pp. 35–39.
8. **Pskhu A.V.** Initial-value problem for a linear ordinary differential equation of noninteger order. *Sbornik: Mathematics*, 2011, vol. 202, no. 4, pp. 571–582.
9. **Fedorov V.E., Turov M.M.** The defect of a Cauchy type problem for linear equations with several Riemann — Liouville derivatives. *Siberian Mathematical Journal*, 2021, vol. 62, no. 5, pp. 925–942.
10. **Fedorov V.E., Du W.S., Turov M.M.** On the unique solvability of incomplete Cauchy type problems for a class of multi-term equations with the Riemann — Liouville derivatives. *Symmetry*, 2022, vol. 14, no. 1, p. 75.

The work is funded by the grant of President of the Russian Federation for state support of leading scientific schools, project number NSh-2708.2022.1.1.

11. **Fedorov V.E., Turov M.M.** Sectorial tuples of operators and quasilinear fractional equations with multi-term linear part. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2022, vol. 43, no. 6, pp. 1502–1512.
12. **Bajlekova E.G.** *Fractional Evolution Equations in Banach Spaces*. PhD thesis. Eindhoven, Eindhoven University of Technology, University Press Facilities, 2001.
13. **Romanova E.A., Fedorov V.E.** Resolving operators of a linear degenerate evolution equation with Caputo derivative. The sectorial case. *Mathematical Notes of NEFU*, 2016, vol. 23, no. 4, pp. 58–72. (In Russ.).
14. **Fedorov V.E., Avilovich A.S.** A Cauchy type problem for a degenerate equation with the Riemann — Liouville derivative in the sectorial case. *Siberian Mathematical Journal*, 2019, vol. 60, no. 2, pp. 359–372.
15. **Fedorov V.E., Avilovich A.S., Borel L.V.** Initial problems for semilinear degenerate evolution equations of fractional order in the sectorial case. *Springer Proceedings in Mathematics and Statistics*, 2019, vol. 292, pp. 41–62.
16. **Avilovich A.S., Gordievskikh D.M., Fedorov V.E.** Issues of unique solvability and approximate controllability for linear fractional order equations with a Hölderian right-hand side. *Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal*, 2020, vol. 5, no. 1, pp. 5–21.
17. **Fedorov V.E., Nagumanova A.V., Avilovich A.S.** A class of inverse problems for evolution equations with the Riemann — Liouville derivative in the sectorial case. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2021, vol. 44, no. 15, pp. 11961–11969.
18. **Fedorov V.E., Avilovich A.S.** Semilinear fractional-order evolution equations of Sobolev type in the sectorial case. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 2021, vol. 66, pp. 1108–1121.
19. **Fedorov V.E., Kostić M.** On a class of abstract degenerate multi-term fractional differential equations in locally convex space. *Eurasian Mathematical Journal*, 2018, vol. 9, no. 3, pp. 33–57.
20. **Fedorov V.E., Boyko K.V., Phuong T.D.** Initial value problems for some classes of linear evolution equations with several fractional derivatives. *Mathematical Notes of NEFU*, 2021, vol. 28, no. 3, pp. 85–104. (In Russ.).
21. **Fedorov V.E., Turov M.M., Kien B.T.** A class of quasilinear equations with Riemann — Liouville derivatives and bounded operators. *Axioms*, 2022, vol. 11, no. 3, p. 96.
22. **Hassard B.D., Kazarinoff N.D., Wan U.-H.** *Theory and Applications of Hopf Bifurcation*. Cambridge, New York, Cambridge University Press, 1981.

Article received 11.07.2022.
Corrections received 13.10.2022.