Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

М. Ш. Браверман, Независимые случайные величины в симметричных пространствах,
Изв. вузов. Матем., 1991, номер 7, 8–14

https://www.mathnet.ru/ivm5110

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.84
24 апреля 2025 г., 20:40:19

4. Янг Л. Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления.— М.: Мир, 1974.— 488 с.
5. Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач.— М.: Наука' 1974.— 479 с.
6. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры.— М.: Наука, 1974.— 456 с.
7. Красовский Н. Н. Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата.— М.: Наука, 1985.— 518 с.
8. Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Расширение вариационных задач // Тр. Моск. матем.о-ва.— 1968.— Т. 18.— С. 187—246.
9. Ченцов А. Г. Конечно-аддитивные меры и интегралы (теория и приложения).— Свердловск, 1985.— 121 с.— Деп. в ВИНИТИ АН СССР 12.02.85, № 1149—85.
10. Пашаев А. Б., Ченцов А. Г. Обобщенная задача управления в классе конечно-аддитивных мер // Кибернетика.— 1986.— № 2.— С. 110—112.
11. Пашаев А. Б. О существовании решения одной задачи оптимального управления с фазовыми ограничениями // Матем. киберн. и прикладн. математика.— Баку, 1986.— С. 43—56.
12. Сесекин А. Н., Ченцов А. Г. Об одной бесконечномерной задаче математического программирования // Кибернетика.— 1988.— № 2.— С. 115—116.
13. Ченцов А. Г. Конечно-аддитивные меры и задачи на минимум // Кибернетика.— 1988.— № 3.— С. 67—70.
14. Ченцов А. Г. К вопросу об устойчивости по результату в одном классе нелинейных экстремальных задач.— Свердловск, 1988.— Деп. в ВИНИТИ АН СССР 13.04.88, № 2832—В88.
15. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Общая теория.— М.: Ин. лит. 1962.— 895 с.
16. Ченцов А. Г. К вопросу об универсальной интегрируемости ограниченных функций // Матем. сб.— 1986.— Т. 131.— № 1.— С. 73—93.
17. Келли Дж. Общая топология.— М.: Наука, 1981.— 431 с.
18. Ченцов А. Г. Конечно-аддитивные меры и их аппроксимация неопределенными интегралами.— Свердловск, 1987.— 59 с.— Деп. в ВИНИТИ АН СССР 02.09.87, № 6459—В87.
19. Ченцов А. Г. Конечно-аддитивные меры в конструкциях расширения экстремальных задач.— Свердловск, 1988.— 63 с.— Деп. в ВИНИТИ АН СССР 15.07.88, № 5690 — В88.
20. Белов Е. Г., Ченцов А. Г. К вопросу о расширении многокритериальных задач.— Свердловск, 1988.— 38 с.— Деп. в ВИНИТИ АН СССР 15.07.88, № 5694 — В88.

г. Челябинск
г. Свердловск

Поступили
первый вариант 04.10.1989
окончательный вариант 03.09.1990

М. Ш. Браверман

УДК 517.98 + 519.21

НЕЗАВИСИМЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ В СИММЕТРИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Введение. Эссеен и Янсон получили следующий результат [1].

Теорема. *Пусть $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин (н. о. р. с. в.), заданных на вероятностном пространстве* $(\Omega, \mathbf{A}, P)$, $1 \leqslant p < q < 2$. *Соотношение*

$$\sup_n \left\| n^{-1/q} \sum_{k=1}^{n} X_k \right\|_{L_p(\Omega)} < \infty$$

выполняется тогда и только тогда, когда $MX_k = 0$ *и* $P[|X| \geqslant x] = O(x^{-q})$ *при* $x \to \infty$.

В предлагаемой работе рассматривается вопрос о том, когда подобные соотношения выполняются в симметричных пространствах. Напомним, что банахово пространство E случайных величин, заданных на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathbf{A}, P)$, называется симметричным (с. п.) [2], если: 1) из условий $|X| \leqslant |Y|$, $Y \in E$ следует, что $X \in E$, $\|X\|_E \leqslant \|Y\|_E$; 2) из равнораспределенности случайных величин X, Y и условия $Y \in E$ вытекает, что $X \in E$, $\|X\|_E = \|Y\|_E$.

Имеют место вложения $L_\infty(\Omega) \subset E \subset L_1(\Omega)$ ([2], с. 124). Далее вероятностное пространство предполагается неатомическим.

Двойственное пространство E' к с. п. E состоит из всех случайных величин (с. в.) X, для которых $\|X\|_{E'} = \sup\{MXY : Y \in E, \|Y\|_E \leqslant 1\} < \infty$. Если $(E')' = E$, то с. п. E называется максимальным ([2], с. 124).

Через $L_{q,\infty}(\Omega)\,(1<q<\infty)$ обозначается пространство всех с. в. X, для которых $\|X\|^*_{L_{q,\infty}(\infty)}=\sup\limits_{x>0} x\,(P[|X|\geqslant x])^{1/q}<\infty$. Этот функционал не является нормой, но эквивалентен норме ([3], гл. 5). Пространство $L_{q,\infty}(\Omega)$ максимально.

1. *Формулировка результатов.* Везде в дальнейшем E есть максимальное или сепарабельное с. п., $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}\subset E$ — последовательность н. о. р. с. в., $q>0$ — фиксированное число.

Теорема 1. *Предположим, что*

$$C_1 n^{1/q}\leqslant\Big\|\sum_{k=1}^{n}X_k\Big\|_E\leqslant C_2 n^{1/q}\quad(n=1,2,\ldots),\tag{1}$$

где C_1, $C_2>0$ не зависят от n. Тогда $1\leqslant q\leqslant 2$.

Через I_h обозначается индикатор случайного события h. Пусть Z_q есть симметричная с. в. такая, что $P[|Z_q|\geqslant x]=x^{-q}$ при всех $x\geqslant 1$.

Теорема 2. *Пусть $1<q<2$, $E\supset L_{q,\infty}(\Omega)$ и*

$$\lim_{a\to\infty}\|Z_q I_{[|Z_q|\geqslant a]}\|_E=0.\tag{2}$$

Предположим, что выполняется (1). *Тогда $MX_k=0$ и найдутся постоянные a, b, $c>0$ такие, что при $x>c$*

$$ax^{-q}\leqslant P[|X_k|\geqslant x]\leqslant bx^{-q}.\tag{3}$$

Теорема 3. *Пусть $1<q<2$, $E\supset L_{q,\infty}(\Omega)$, $MX_k=0$ и выполняется* (3). *Тогда найдутся постоянные D_1, $D_2>0$ такие, что при всех $a_k\in R$ и $n=1,2,\ldots$*

$$D_1\Big(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^q\Big)^{1/q}\leqslant\Big\|\sum_{k=1}^{n}a_kX_k\Big\|_E\leqslant D_2\Big(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^q\Big)^{1/q}.\tag{4}$$

Следующее утверждение показывает, что условие (2) в теореме 2 является существенным. Действительно, как нетрудно убедиться, в пространстве $L_{q,\infty}(\Omega)$ это условие не выполняется.

Теорема 4. *Пусть $1<q<2$. Существует последовательность симметричных н. о. р. с. в. $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}\subset E=L_{q,\infty}(\Omega)$, для которой справедливо* (4) *и не выполняется нижняя оценка в* (3).

Легко проверить, что для всякой последовательности н. о. р. с. в. $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}\subset E=L_{\infty}(\Omega)$, $MX_k=0$, выполняется (4) при $q=1$. Наоборот, если с. п. E обладает этим свойством, то $E=L_{\infty}(\Omega)$ (см. [4], теорема 7).

При $q=2$ ситуация до конца не выяснена. Из теоремы 2 работы [1] и вложения $E\subset L_1(\Omega)$ нетрудно получить, что если выполняется верхняя оценка в (1) при $q=2$, то $MX_k^2<\infty$, $MX_k=0$. Вопрос о том, вытекает ли из этих условий (4), остается открытым.

Доказательству сформулированных теорем предпошлем несколько вспомогательных утверждений.

2. *Симметризация.*

Лемма 1. *Пусть E — максимальное или сепарабельное с. п., X, $Y\in E$ — независимые с. в., $MY=0$. Тогда $\|X+Y\|_E\geqslant\|X\|_E$.*

Доказательство. Пусть β есть σ-алгебра, порожденная с. в. X. Оператор условного математического ожидания M^{β} действует в $L_1(\Omega)$ и $L_{\infty}(\Omega)$ с единичной нормой. Поэтому он действует с единичной нормой в E ([2], с. 142). Значит, $\|X+Y\|_E\geqslant\|M^{\beta}(X+Y)\|_E=\|X+MY\|_E=\|X\|_E$. Лемма доказана.

Пусть с. в. $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}\cup\{\bar X_k\}_{k=1}^{\infty}$ независимы, X_k, $\bar X_k$ одинаково распределены, $MX_k=0$ $(k=1,2,\ldots)$. Положим $\tilde X_k=X_k-\bar X_k$. Из леммы 1 и неравенства треугольника вытекает, что для любых $a_k\in R$ и $n=1,2,\ldots$

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} a_k X_k\right\|_E \leqslant \left\|\sum_{k=1}^{n} a_k \widetilde{X}_k\right\|_E \leqslant 2\left\|\sum_{k=1}^{n} a_k X_k\right\|_E. \tag{5}$$

Пусть μX есть медиана с. в. X. Из неравенства симметризации ([5], с. 259) следует, что при $x > |\mu X_k|$

$$2^{-1} P[|X_k| \geqslant 2x] \leqslant P[|\widetilde{X}_k| \geqslant x] \leqslant 2P[|X_k| \geqslant x]. \tag{6}$$

Оценки (5) и (6) означают, что неравенства (1), (3) и (4) для н. о. р. с. в. $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ эквивалентны соответствующим неравенствам для симметричных н. о. р. с. в. $\{\widetilde{X}_k\}_{k=1}^{\infty}$.

3. *Доказательство теоремы* 1. Согласно нижней оценке в (1)

$$C_1 n^{1/q} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \|X_k\|_E = n\|X_1\|_E.$$

Отсюда $q \geqslant 1$.

Пусть $q > 1$. Тогда, поскольку $E \subset L_1(\Omega)$, из (1) следует, что при всех $n = 1, 2, \ldots$

$$C_2 n^{1/q} \geqslant \left\|\sum_{k=1}^{n} X_k\right\|_E \geqslant A\left\|\sum_{k=1}^{n} X_k\right\|_{L_1(\Omega)} \geqslant A\left|\sum_{k=1}^{n} MX_k\right| = An|MX_1|,$$

где $A > 0$ не зависит от n. Отсюда $MX_k = MX_1 = 0$.

Теперь покажем, что $q \leqslant 2$. Согласно (5) можно считать с. в. X_k симметричными. Для $a > 0$ положим

$$X_k^{(a)} = X_k I_{[|X_k| \leqslant a]}, \quad \overline{X}_k^{(a)} = 2X_k^{(a)} - X_k.$$

В силу симметричности с. в. X_k и $\overline{X}_k^{(a)}$ равнораспределены. Поскольку $X_k^{(a)} = (\overline{X}_k^{(a)} + X_k)/2$, то

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} X_k^{(a)}\right\|_E \leqslant \left\|\sum_{k=1}^{n} X_k\right\|_E.$$

Выберем $a > 0$ так, чтобы $X_k^{(a)} \neq 0$. По неравенству Пэли — Зигмунда ([6], с. 48)

$$P\left[\left|\sum_{k=1}^{n} X_k^{(a)}\right| \geqslant bn^{1/2}/2\right] \geqslant \eta > 0,$$

где $b = \|X_k^{(a)}\|_{L_2(\Omega)}$, η не зависит от n. Отсюда и из предыдущего неравенства следует

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} X_k\right\|_E \geqslant \left\|\sum_{k=1}^{n} X_k^{(a)}\right\|_E \geqslant cn^{1/2} \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

где $c > 0$ не зависит от n. Учитывая (1), заключаем, что $q \leqslant 2$. Теорема доказана.

4. *О сходимости норм.* Результат этого пункта является обобщением известных условий сходимости моментов ([5], с. 197). Он будет использован при доказательстве теоремы 2.

Лемма 2. *Пусть выполняется условие* (2), *где* $1 < q < 2$. *Пусть последовательность с. в.* Y_n *сходится по распределению к с. в.* Y. *Предположим, что существуют постоянные* b, $c > 0$ *такие, что при всех* $x > c$ *и* $n = 1, 2, \ldots$

$$P[|Y_n| \geqslant x] \leqslant bx^{-q}. \tag{7}$$

Тогда $\|Y_n\|_E \to \|Y\|_E$.

Доказательство. Из (7) следует оценка ([2], с. 133): $\|Y_n I_{[|Y_n|\geqslant a]}\|_E \leqslant B \|Z_q I_{[|Z_q|\geqslant a]}\|_E$, где B не зависит от n. Отсюда и из (2)

$$\lim_{a\to\infty} \sup_n \|Y_n I_{[|Y_n|\geqslant a]}\|_E = 0. \tag{8}$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Согласно (8) существует $a>0$ такое, что $\|Y_n I_{[|Y_n|\geqslant a]}\|_E < \varepsilon$ $(n=1, 2, \ldots)$. Отсюда для всех $n=1, 2, \ldots$ $\|Y_n\|_E - \varepsilon \leqslant \|Y_n I_{[|Y_n|<a]}\|_E \leqslant \|Y_n\|_E$. Так как $Y_n \to Y$ по распределению, то для с. в. Y выполняется (7) с теми же постоянными. Поэтому $\|Y\|_E - \varepsilon \leqslant \|YI_{[|Y|<a]}\|_E \leqslant \|Y\|_E$. Поскольку $E \neq L_\infty(\Omega)$, то [4] $\|I_h\|_E \to 0$ при $P(h)\to 0$. Используя это, нетрудно проверить, что

$$\lim_{n\to\infty} \|Y_n I_{[|Y_n|<a]}\|_E = \|YI_{[|Y|<a]}\|_E.$$

Учитывая предыдущее, находим

$$\|Y\|_E - \varepsilon \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \|Y_n\|_E \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \|Y_n\|_E \leqslant \|Y\|_E + \varepsilon.$$

Полагая $\varepsilon \to 0$, приходим к нужному равенству.

5. *Оценки для характеристической функции.* Следующее утверждение известно и легко проверяется. Поэтому мы опустим доказательство.

Лемма 3. *Пусть $f(t)$ есть характеристическая функция* (х. ф.), *соответствующая с. в. X_k, $1<q<2$. Тогда условие* (3) *эквивалентно существованию постоянных α, β, $\gamma>0$ таких, что при $|t|<\gamma$*

$$\alpha |t|^q \leqslant 1 - \operatorname{Re} f(t) \leqslant \beta |t|^q. \tag{9}$$

При этом верхняя оценка в (3) *равносильна верхней оценке в* (9), *а постоянные α, β, γ определяются постоянными a, b, c, и наоборот.*

6. *Доказательство теоремы* 2. Из (1) и вложения $E \subset L_1(\Omega)$ вытекает

$$\sup_n \Big\| n^{-1/q} \sum_{k=1}^n X_k \Big\|_{L_1(\Omega)} < \infty. \tag{10}$$

Отсюда и из приведенного выше результата Эссеена — Янсона следует верхняя оценка в (3) и равенство $MX_k = 0$.

Установим нижнюю оценку. Согласно (5) и (6) можно считать с. в. X_k симметричными. Нам понадобится несколько вспомогательных утверждений. Везде далее предполагается, что выполняются условия теоремы 2.

Пусть $f(t)$ есть х. ф., соответствующая с. в. X_k. Пусть $S_n = n^{-1/q} \sum_{k=1}^n X_k$. Эта сумма имеет х. ф.

$$f_n(t) = [f(n^{-1/q} t)]^n. \tag{11}$$

Из (10) вытекает компактность последовательности $\{S_n\}_{n=1}^\infty$ в смысле сходимости по распределению ([5], с. 197—198). Обозначим через G множество всех х. ф., соответствующих предельным распределениям этой последовательности. Пусть $H = G \cup \{f_n\}_{n=1}^\infty$. Через Y_g будем обозначать с. в. с х. ф. $g(t)$. Из (10) следует, что $\sup\{M|Y_g| : g \in H\} < \infty$. Поэтому множество $\{Y_g : g \in H\}$ компактно в смысле сходимости по распределению ([5], с. 197—198).

Предложение 1. *Для сумм S_n справедлива оценка* (7) *с постоянными, не зависящими от n.*

Доказательство. Как уже отмечалось, имеет место верхняя оценка в (3) и согласно лемме 3 верхняя оценка в (9). Поскольку с. в. X_k симметричны, то $f(t)$ вещественная и четная ([5], с. 2?8). Так как $1 - x \geqslant \exp(-2x)$ при $0 < x < 1/2$, то из верхней оценки в (9) следует, что $f(t) \geqslant \exp(-2\beta|t|^q)$, если $|t|<\gamma$; $\beta|t|^q < 1/2$. Отсюда и из (11) для таких t $f_n(t) \geqslant$

$\geqslant [\exp(-2\beta|n^{-1/q}t|^q]^n = \exp(-2\beta|t|^q)$. Значит, для х. ф. $f_n(t)$ справедлива верхняя оценка в (9) с постоянными, не зависящими от n. Применяя лемму 3, получаем нужное утверждение. Предложение доказано.

Предложение 2. *Пусть $g \in H$ и $S_{n(k)} \to Y_g$ по распределению. Тогда $Y_g \in E$ и $\|S_{n(k)}\|_E \to \|Y_g\|_E$.*

Это утверждение сразу следует из леммы 2 и предложения 1.

Предложение 3. *Предположим, что для некоторых $0 < \mu < \nu$*

$$\sup_n \sup\{|f_n(t)| : \mu < t < \nu\} = 1.$$

Тогда найдутся $g \in H$ и $t_0 \in [\mu, \nu]$ такие, что $|g(t_0)| = 1$. При этом х. ф. $g(t)$ невырождена.

Доказательство. Согласно условию найдутся точки $t_k \in [\mu, \nu]$ и индексы $n(k) \nearrow \infty$, для которых $|f_{n(k)}(t_k)| \to 1$. В силу компактности можно считать, что $t_k \to t_0 \in [\mu, \nu]$ и $f_{n(k)}(t) \to g(t) \in H$ для всех $t \in R$. Отсюда ([5], с. 206)

$$|g(t_0)| = \lim_{k\to\infty} |f_{n(k)}(t_k)| = 1.$$

Осталось показать невырожденность $g(t)$. Так как с. в. X_k симметричны, то такова же и Y_g. Поэтому вырожденность означает, что $Y_g = 0$. Но тогда согласно предложению 2 $\|S_{n(k)}\|_E \to \|Y_g\|_E = 0$. Это противоречит (1). Предложение доказано.

Положим $J_m = [(2m)^{-1/q}, m^{-1/q}]$.

Предложение 4. *Существует натуральное m такое, что*

$$\sup_n \sup\{|f_n(t)| : t \in J_m\} = \gamma < 1.$$

Доказательство. Предположим противное. Тогда согласно предложению 3 для каждого m найдется х. ф. $g \in H$ и точка $t_m \in J_m$ такие, что $|g_m(t_m)| = 1$. При этом g_m невырождена и, следовательно, соответствует решетчатому распределению. Если a_m — максимальный шаг такого распределения, то $t_m \geqslant 2\pi/a_m$ ([7], с. 23). Отсюда $a_m \geqslant 2\pi/t_m \geqslant 2\pi m^{1/q}$. В силу компактности найдется последовательность индексов $m(k) \nearrow \infty$, для которой $g_{m(k)}(t) \to g(t) \in H$ при всех $t \in R$. Поскольку $a_m \to \infty$, то, как нетрудно убедиться, $|g(t)| \equiv 1$. Так как с. в. Y_g симметрична, то отсюда $Y_g = 0$.

Из предложения 1 вытекает, что для с. в. Y_g, $g \in H$, выполняется (7) с постоянными, не зависящими от g. Применяя предложение 2, находим, что $\|Y_{g_{m(k)}}\|_E \to \|Y_g\|_E = 0$. Но из предложения 2 и (1) вытекает соотношение $0 < \inf_n \|S_n\|_E = \inf\{\|Y_g\|_E : g \in H\}$. Полученное противоречие доказывает предложение 4.

Следующее утверждение легко проверяется.

Предложение 5. *Пусть заданы числа $0 < \mu < \nu$ и индекс n_0. Тогда найдется $\varepsilon > 0$, для которого*

$$(0, \varepsilon) \subset \bigcup_{n \geqslant n_0} [\mu n^{-1/q}, \nu n^{-1/q}].$$

Предложение 6. *Для х. ф. $f(t)$ выполняется нижняя оценка в (9).*

Доказательство. Согласно предложению 4 $|f(n^{-1/q}t)|^n = |f_n(t)| \leqslant \gamma < 1$ для всех $t \in J_m$, $n = 1, 2, \ldots$, где m — некоторое натуральное число. Поскольку х. ф. f вещественная, то существует $\delta > 0$ такое, что $f(\tau) > 0$ при $|\tau| < \delta$. Кроме того, найдется натуральное n_0 такое, что $tn^{-1/q} < \delta$ при всех $t \in J_m$, $n \geqslant n_0$. Для таких t и n имеем $n \ln f(tn^{-1/q}) \leqslant \ln\gamma < 0$. Отсюда $-(tn^{-1/q})^{-q} \ln f(tn^{-1/q}) \geqslant -t^{-q}\ln\gamma \geqslant -m\ln\gamma = \alpha > 0$. Поэтому при $t \in J_m$, $n \geqslant n_0$ выполняется оценка $f(tn^{-1/q}) \leqslant \exp(-\alpha(tn^{-1/q})^q)$. Согласно предложению 5 существует $\varepsilon > 0$ такое, что интервал $(0, \varepsilon)$ содержится в объединении отрезков J_{mn} $(n \geqslant n_0)$. Если $t \in (0, \varepsilon)$, то $tn^{-1/q} \in J_m$ для некоторого $n \geqslant n_0$.

Отсюда и из предыдущего имеем $f(t)=f(n^{-1/q}(tn^{1/q}))\leqslant\exp(-\alpha(n^{-1/q}tn^{1/q})^q)=$ $=\exp(-\alpha t^q)$. Так как $f(t)$ является четной и вещественной, то это неравенство приводит к нижней оценке в (9). Предложение доказано.

Из полученных утверждений вытекает теорема 2. Действительно, как отмечалось при доказательстве предложения 1, выполняется верхняя оценка в (9). Согласно предложению 6 имеет место нижняя оценка в (9). По лемме 3 выполняется (3).

7. *Доказательство теоремы* 3. Как и выше, можно считать с. в. X_k симметричными. Пусть $\{Y_k\}_{k=1}^{\infty}$ — независимые с. в. с одинаковым симметричным q-устойчивым распределением. Для с. в. Y_k выполняется двусторонняя оценка типа (3) ([7], гл. 2). Значит, существуют постоянные $A, B, C>0$ такие, что $AP[|X_k|\geqslant x]\leqslant P[|Y_k|\geqslant x]\leqslant BP[|X_k|\geqslant x]$ при всех $x>C$. Отсюда и из теоремы Кваленя — Рыхлика о сравнении ([8], с. 243) вытекает существование постоянных A_1, B_1, $C_1>0$ таких, что при $x>C_1$ и всех $a_k\in R$, $n=1, 2, \dots$ справедливо

$$A_1P\left[|A_1\sum_{k=1}^{n}a_kX_k|\geqslant x\right]\leqslant P\left[\left|\sum_{k=1}^{n}a_kY_k\right|\geqslant x\right]\leqslant B_1P\left[\left|B_1\sum_{k=1}^{n}a_kx_k\right|\geqslant x\right].$$

Заметим еще, что

$$\sum_{k=1}^{n}a_kY_k\stackrel{d}{=}\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^q\right)^{1/q}Y_1. \qquad (12)$$

Это легко проверить, вычислив х. ф., соответствующие левой и правой частям. Из полученных соотношений вытекает (4) ([2], с. 133). Теорема доказана.

Замечание. Из приведенного доказательства видно, что верхняя оценка в (3) влечет верхнюю оценку в (4).

8. *Доказательство теоремы* 4. Пусть с. в. Y_k такие же, как в предыдущем пункте. Выше отмечалось, что для с. в. Y_k при некоторых a, b, $c>0$ выполняется (3). Выберем числа α_j, β_j, $x_j>c$ ($j=1, 2, \dots$) так, чтобы

$$x_j>4j^{1-1/q}\alpha_j, \quad (13) \qquad \beta_j>(2bj/a)^{1/q}x_j, \quad (14) \qquad \beta_j<\alpha_{j+1},\ \beta_j/\alpha_{j+1}\to 0. \quad (15)$$

Положим

$$X_k=\sum_{j=1}^{\infty}Y_kI_{[\alpha_j\leqslant|Y_k|<\beta_j]}. \qquad (16)$$

Ясно, что с. в. $\{Y_k\}_{k=1}^{\infty}$ независимы, симметричны, равнораспределены и содержатся в $L_{q,\infty}(\Omega)$.

Согласно (15) $\beta_j<\alpha_{j+1}$. Из (16) следует, что $P[|X_k|\geqslant\beta_j]=P[|X_k|\geqslant$ $\geqslant\alpha_{j+1}]$. Формула (16) позволяет также заключить, что для с. в. X_k выполняется верхняя оценка в (3) с теми же постоянными, что и для Y_k. Поэтому $P[|X_k|\geqslant\beta_j]\leqslant b\alpha_{j+1}^{-q}$. Отсюда и из (15) $\beta_j^qP[|X_k|\geqslant\beta_j]\leqslant b(\beta_j/\alpha_{j+1})^q\to 0$. Значит, для с. в. X_k не выполняется нижняя оценка в (3).

Согласно замечанию, сделанному в конце предыдущего пункта, для последовательности $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ имеет место верхняя оценка в (4). Покажем, что выполняется и нижняя оценка.

Пусть $Z_k^{(n)}=(Y_k-X_k)I_{[|Y_k-X_k|\leqslant\alpha_n]}$, $U_k^{(n)}=Y_k-X_k-Z_k^{(n)}$ и числа $\{a_k\}_{k=1}^{n}$ таковы, что

$$\sum_{k=1}^{n}|a_k|^q=1. \qquad (17)$$

Обозначим через S_1, S_2, S_3 линейные комбинации с коэффициентами a_k с. в. $\{X_k\}$, $\{Z_k^{(n)}\}$, $\{U_k^{(n)}\}$ соответственно. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n}a_kY_k=S_1+S_2+S_3.$$

Принимая во внимание (12) и нижнюю оценку в (3) для с. в. Y_k, находим, что при $x > c$

$$ax^{-q} \leqslant \sum_{j=1}^{3} P[|S_j| \geqslant x/3]. \tag{18}$$

С помощью (17), (13) и неравенства Гёльдера получаем

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\alpha_n\right| \leqslant \alpha_n n^{1-1/q} \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^q\right)^{1/q} = \alpha_n n^{1-1/q} < x_n/4.$$

Учитывая определение с. в. $Z_k^{(n)}$, находим, что $P[|S_2| \geqslant x_n/3] = 0$. Далее, согласно (16), (14) и (3) $P[U_k^{(n)} \neq 0] = P[|Y_k - X_k| \geqslant \alpha_n] \leqslant P[|Y_k| \geqslant \beta_n] \leqslant \leqslant b\beta_n^{-q} \leqslant ax_n^{-q}/(2n)$. Поэтому

$$P[|S_3| \geqslant x_n/3] \leqslant \sum_{k=1}^{n} P[U_k^{(n)} \neq 0] \leqslant ax_{nb}^{-}/2.$$

Из полученных соотношений и (18) следует $P[|S_1| \geqslant x_n/3] \geqslant ax_n^{-q}/2$. Отсюда

$$\left(\left\|\sum_{k=1}^{n} a_k X_k\right\|_{L_{q,\infty}(\Omega)}^{*}\right)^q \geqslant 3^{-q}a/2$$

при условии (17). Это приводит к нижней оценке в (4). Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Esseen K. G., Janson S. On moment conditions for normed sums of independent variables and martingale differences // Stochast. Proc. and Appl.— 1985.— V. 19.— № 1.—P. 173—182.
2. Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М. Интерполяция линейных операторов.— М.: Наука, 1978.— 400 с.
3. Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах.— М.: Мир, 1974.— 336 с.
4. Rodin V. A., Semyonov E. M. Rademacher series in symmetric spaces // Anal. math.— 1975.— V. 1.— № 3.— P. 207—222.
5. Лоэв М. Теория вероятностей.— М.: Ин. лит., 1962.— 719 с.
6. Кахан Ж.-П. Случайные функциональные ряды.— М.: Мир, 1973.—302 с.
7. Ибрагимов И. А., Линник Ю. В. Независимые и стационарно связанные величины.— М.: Наука, 1965.— 524 с.
8. Вахания Н. Н., Тариеладзе В. И., Чобанян С. А. Вероятностные распределения в банаховых пространствах.— М.: Наука, 1985.— 368 с.

г. Хабаровск

Поступили
первый вариант 18.11.1988
окончательный вариант 14.11.1990

С. Б. Вакарчук

УДК 517.512

О НАИЛУЧШЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ ОБОБЩЕННЫМИ ПОЛИНОМАМИ В ОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ДВУХ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Введение

В последние годы повышенный интерес и внимание математиков, занимающихся вопросами теории аппроксимации функций нескольких вещественных переменных, привлекают бесконечномерные подпространства, которые состоят из форм, включающих тензорные произведения функций меньшего числа переменных (см. [1]—[4]). Их использование в качестве аппроксими-