ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ и МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 6 Май 1966 Июнь № 3

УДК 517.9:533.7

ОБ АСИМПТОТИКЕ ПРИ МАЛЫХ ε РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ $u_t + (\varphi(u))_x = \varepsilon u_{xx}$, СООТВЕТСТВУЮЩЕГО ВОЛНЕ РАЗРЕЖЕНИЯ

Н. С. БАХВАЛОВ

(Москва)

В работе отыскивается главный член отклонения решения уравнения

$$v_t + (\varphi(v))_x = \varepsilon v_{xx} \tag{1}$$

от решения уравнения

$$u_t + (\varphi(u))_x = 0 \tag{2}$$

при начальных условиях

$$v(0, x) = u(0, x) = \begin{cases} b_1 \text{ при } x \leqslant 0, \\ b_2 \text{ при } x > 0. \end{cases}$$

Предполагается, что $b_1 < b_2$ и $\varphi''(y) \geqslant a > 0$ при $b_1 \leqslant y \leqslant b_2$. В этом случае $u(t, x)$ имеет вид центрированной волны разрежения, а именно,

$$u(t, x) = \begin{cases} b_1 \text{ при } x/t \leqslant \varphi'(b_1), \\ q(x/t) \text{ при } \varphi'(b_1) \leqslant x/t \leqslant \varphi'(b_2), \\ b_2 \text{ при } \varphi'(b_2) \leqslant x/t, \end{cases}$$

где $\varphi'(q(y)) = y$. В дальнейшем мы также предполагаем, что

$$\sup_{[b_1, b_2]} |\varphi^{(k)}(y)| < \infty, \qquad k = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Займемся написанием асимптотики для $v(t, x)$ в области $x/t \leqslant \varphi'(b)$, где $b_1 < b < b_2$.

Заменой переменных и обозначений

$$\bar{x} = x - \varphi'(b_1)t,$$

$$\bar{u} = \varphi''(b_1)(u - b_1),$$

$$\varphi(\bar{u}) = \varphi''(b_1)(\varphi(u) - \varphi(b_1) - (u - b_1)\varphi'(b_1))$$

уравнения (1), (2) преобразуются к виду, где

$$b_1 = 0, \qquad \varphi(0) = \varphi'(0) = 0, \qquad \varphi''(0) = 1. \tag{3}$$

Предположим сначала, что условия (3) выполняются. При малых v уравнение (1) аппроксимируется уравнением

$$w_t + ww_x = \varepsilon w_{xx}, \tag{4}$$

решения которого записываются в виде (см. [1])

$$w(t,x) = -2\varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \ln\Big((\sqrt{4\pi\varepsilon t})^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\Big(-(x-y)^2/4\varepsilon t - $$

$$- {}^1/_2\varepsilon \int_{-\infty}^{y} w(0,\zeta)\, d\zeta \Big) dy \Big).$$

Полагая $w(0,x) = 0$ при $x < 0$ и $w(0,x) = \infty$ при $x > 0$, получим частное решение

$$m(t,x) = 2\varepsilon \exp(-x^2/4\varepsilon t) \left(\int_{-\infty}^{0} \exp(-(x-y)^2/4\varepsilon t)\, dy \right)^{-1}.$$

При $x \gg \sqrt{\varepsilon t}$, пользуясь асимптотической формулой

$$\int_{y}^{\infty} \exp(-\tau^2/2)\, d\tau \sim \exp(-y^2/2) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (2k-1)!!\, y^{-(2k+1)}, \tag{5}$$

получаем

$$m(t,x) \sim x/t \Big(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (2\varepsilon t/x^2)^n \Big), \tag{6}$$

где $a_1 = 1$.

Это асимптотическое равенство можно дифференцировать любое конечное число раз вследствие аналогичного свойства формулы (5). При $x, t \neq 0$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} m(t,x) = p(t,x),$$

где $p(t,x) = 0$ при $x \leqslant 0$ и $p(t,x) = x/t$ при $x \geqslant 0$. Функция $p(t,x)$ удовлетворяет уравнению

$$p_t + pp_x = 0. \tag{7}$$

При $\varphi'(b_1) < x/t < \varphi'(b_2)$ уравнение в вариациях для разности $v - u = A$ имеет вид

$$A_t + \varphi'(u) A_x + A/t = \varepsilon q''(x/t)/t^2;$$

интегрируя это уравнение вдоль характеристики

$$\varphi'(u) = x/t = x_0/t_0,$$

получаем

$$A(t,x) = A(t_0,x_0)t_0/t + ((\varepsilon/t) \ln(t/t_0)) q''(x_0/t_0). \tag{8}$$

Займемся склеиванием асимптотик для решения, исходя из требования, чтобы в области $x/\sqrt{\varepsilon t} < C > 0$ асимптотика определялась решением уравнения (4), а при $x/t = \varphi'(b)$ не зависела от m. Последнее желательно для удобства склейки с аналогичной асимптотикой в области $\varphi'(b) < x/t$. Пусть $B(y)$ — дважды дифференцируемая функция, отличная от нуля лишь при $\varphi'(b_1) \leqslant y \leqslant \varphi'(b_2)$ и удовлетворяющая условиям

$$0 < C_1 \leqslant B(y)(y - \varphi'(b_1))^{-2} \leqslant C_2 \text{ при } \varphi'(b_1) \leqslant y \leqslant \varphi'(b).$$

Справедливы очевидные неравенства

$$|B(x/t)| \leqslant C_3, \quad |\partial B(x/t)/\partial x|, \quad |\partial B(x/t)/\partial t| \leqslant C_4/t,$$
$$|\partial^2 B(x/t)/\partial x^2| \leqslant C_5/t^2.$$

Пусть $b_1 < b_3 < b < b_4 < b_2$ и $d(y)$, $\bar{d}(y)$ — дважды дифференцируемые функции, причем

$$d(y) = 1 \text{ при } y \leqslant \varphi'(b_3), \quad \bar{d}(y) = 0 \text{ при } y \leqslant \varphi'(b),$$
$$d(y) = 0 \text{ при } y \geqslant \varphi'(b), \quad \bar{d}(y) = 1 \text{ при } y \geqslant \varphi'(b_4).$$

Обозначим через $\lambda(t)$ наименьший положительный корень уравнения $B(\lambda/t) = \varepsilon/t$. В случае, когда $\varphi'(b_1) = 0$ в соответствии с условием (3), из определения $B(y)$ следуют неравенства

$$\sqrt{\varepsilon t/C_2} \leqslant \lambda(t) \leqslant \sqrt{\varepsilon t/C_1}.$$

Пусть $M(t,x)$ гладкая и

$$l(M) = M_t + (\varphi(M))_x - \varepsilon M_{xx}.$$

Разность $M - v = Q$ удовлетворяет уравнению

$$Q_t + (DQ)_x - \varepsilon Q_{xx} = l(M),$$

где $D = (\varphi(M) - \varphi(v))/Q$. Если мы будем рассматривать это уравнение как линейное относительно функции $Q(t,x)$ с заданным коэффициентом $D(t,x)$, то функция Грина этого уравнения удовлетворяет соотношению

$$\int_{-\infty}^{\infty} |G(t,x,\xi,\eta)|\,dx = 1.$$

Отсюда и из представления решения при помощи формулы Грина при $t_1 < t_2$ получаем оценку

$$\|Q\|_{t_2} = \int_{-\infty}^{\infty} |Q(t_2,x)|\,dx \leqslant \|Q\|_{t_1} + \int_{t_1}^{t_2} \|l(M)\|_t dt. \tag{9}$$

Если $M(t,x)$ кусочно-гладкая и непрерывная, то $l(M)$ является суммой кусочно-гладкой функции и некоторого числа δ-функций, соответствующих точкам разрыва M_x. При таком понимании $l(M)$ соотношение (8) также выполняется.

При $x/t \leqslant \varphi'(b)$ положим

$$M(t,x) = u(t,x) + (m(t,x) - p(t,x))\,d(x/t) + z(t,x),$$

где $z(t,x) = 0$ при $x \leqslant \lambda(t)$,

$$z(t,x) = (\varepsilon/t)(\ln(B(x/t)t/\varepsilon))\,q''(x/t) \text{ при } x \geqslant \lambda(t).$$

Пусть T_0 таково, что $\lambda(t) \leqslant \varphi'(b_3)t$ и $b_1 \leqslant M \leqslant b_2$ при $T_0\varepsilon \leqslant t$.

Теорема. *При $t \geqslant T_0$ справедлива оценка*

$$\int_{-\infty}^{\varphi'(b)t} |l(M)|\,dx \leqslant N_1(\varepsilon/t)^{3/2}\ln^2(N_0 t/\varepsilon).$$

Здесь и далее N_i — некоторые постоянные, зависящие только от b_1, b_2, b_3, b_4, b, поведения $\varphi(y)$ на $[b_1, b_2]$ и поведения $d(y)$, $\bar{d}(y)$, $B(y)$ на $[\varphi'(b_1), \varphi'(b_2)]$.

При доказательстве теоремы мы будем производить непосредственно оценку невязки приближенного решения $M(t, x)$ в областях $x \leqslant 0$, $0 \leqslant x / t \leqslant \varphi'(b_3)$, $\varphi'(b_3) \leqslant x / t \leqslant \varphi'(b)$, не делая никаких предположений о существовании решения уравнения (1).

Доказательство. Оценка 1. Положим

$$N_2 = \sup_{[b_1, b_2]} |\varphi'''(y)/2|.$$

Пусть $x \leqslant 0$. Тогда $M = m$ и $l(M) = (\varphi'(m) - m)m_x$. Так как $|\varphi'(m) - m| \leqslant N_2 m^2$ при предположении (3), то $|l(M)| \leqslant N_2 m^2 |m_x|$.

Используя приведенное ранее явное представление функции $m(t, x)$, получаем, что при $x \leqslant 0$ выполняются неравенства

$$|m| \leqslant \sqrt{8\varepsilon / \pi t} \exp(-x^2 / 4\varepsilon t),$$

$$|m_x| \leqslant (c_1 / t) \exp(-x^2 / 4\varepsilon t);$$

здесь и далее c_i — абсолютные постоянные.

Из последних неравенств имеем

$$\int_{-\infty}^{0} |l(M)| dx \leqslant N_2 c_2 (\varepsilon/t)^{3/2}. \tag{10}$$

Оценка 2. При выводе оценок 2 и 3 мы будем предполагать, что производные $q^{\mathrm{III}}(y)$ и $q^{\mathrm{IV}}(y)$ ограничены при $\varphi'(b_1) \leqslant y \leqslant \varphi'(b_2)$. Для выполнения этого условия достаточно ограниченности производных $\varphi^{\mathrm{IV}}(y)$ и $\varphi^{\mathrm{V}}(y)$ при $b_1 \leqslant y \leqslant b_2$.

При $0 \leqslant x / t \leqslant \varphi'(b_3)$ в выражении $(\varphi(M))_x = \varphi''(M) M_x$ полагаем по формуле Тейлора

$$\varphi'(M) = \varphi'(u) + \varphi''(u)(M - u) + (\varphi'''(u + \theta(M - u)) / 2)(M - u)^2,$$
$$0 \leqslant \theta \leqslant 1.$$

После замены производных u_t, m_t и p_t по формулам (1), (4), (7) и приведения подобных членов имеем

$$l(M) = S_1 + S_2 + S_3,$$

где

$$S_1 = z_t + \varphi'(u) z_x + \varphi''(u) u_x z - \varepsilon u_{xx},$$

$$S_2 = p p_x - m m_x + \varphi'(u)(m - p)_x + \varphi''(u)(m - p)(m - p + u)_x,$$

$$S_3 = -\varepsilon z_{xx} + \varphi''(u)((m - p + z) z_x + z(m - p)_x) +$$
$$+ (\varphi''' / 2)(m - p + z)^2 (u + m - p + z)_x.$$

Вследствие условия (3) имеем $q'(0) = 1$, и поэтому

$$q(y) = y + y^2 \omega(y), \tag{11}$$

где $\omega(y)$ ограничена. Поэтому $u - p$ дифференцируема дважды и величина $l(M)$ содержит в виде слагаемого δ-функцию только в εz_{xx} из-за разрыва производной z_x при $x = \lambda(t)$. Для значений x в пределах $0 \leqslant x / t \leqslant \varphi'(b)$ можно установить неравенства

$$|z| \leqslant N_3 (\varepsilon / t) \ln (N_0 t / \varepsilon),$$

$$|z_x| \leqslant N_4 (\varepsilon / (xt) + (\varepsilon / t^2) \ln (N_0 t / \varepsilon));$$

кроме того,

$$\int\limits_0^{\varphi'(b)t} |z_{xx}|\,dx \leqslant N_5(\varepsilon/t^3)^{1/2}.$$

Из явного вида $m(t,x)$ и (5) при $x>0$ имеем

$$\begin{gathered} |m-p| \leqslant c_3 \min\,(\varepsilon/x, \sqrt{\varepsilon/t}), \\ |(m-p)_x| \leqslant c_4 \min\,(\varepsilon/x^2, 1/t). \end{gathered} \tag{12}$$

Разбивая область $0 \leqslant x/t \leqslant \varphi'(b_3)$ на две части линией $x=\lambda(t)$ и пользуясь приведенными оценками, получаем неравенство

$$\int\limits_0^{\varphi'(b_3)t} |S_3|\,dx \leqslant N_6(\varepsilon/t)^{3/2}\ln^2(N_0t/\varepsilon).$$

Так как $\varphi'(u) = x/t = p$, $\varphi''(u)u_x = 1/t = p_x$, то

$$S_2 = (\varphi''(u)-1)(m-p)(m-p)_x.$$

На основании (3) и (11) имеем $|\varphi''(u)-1| \leqslant N_7x^2/t^2$. Отсюда и из (12) следует оценка

$$\int\limits_0^{\varphi'(b_3)t} |S_2|\,dx \leqslant N_8(\varepsilon^2/t^2)\ln^2(N_0t/\varepsilon).$$

Функцию z можно представить в виде (8), и поэтому $S_1=0$. Из приведенных выше соотношений для S_1, S_2, S_3 имеем

$$\int\limits_0^{\varphi'(b_3)t} |l(M)|\,dx \leqslant N_9(\varepsilon/t)^{3/2}\ln^2(N_0t/\varepsilon). \tag{13}$$

Оценка 3. При $\varphi'(b_3) \leqslant x/t \leqslant \varphi'(b)$ имеем $l(M) = S_1 + S_2' + S_3'$, где, как и ранее,

$$\begin{aligned} &S_1 = 0, \quad S_2' = ((m-p)d)_t + \varphi'(u)((m-p)d)_x + \varphi''(u)u_x(m-p)d, \\ &S_3' = -\varepsilon z_{xx} - \varepsilon m_{xx} + \varphi''(u)((m-p)d((m-p)d+z)_x + \\ &\qquad + z((m-p)d+z)_x) + (\varphi'''/2)(m-p+z)^2(u+m-p+z)_x. \end{aligned}$$

При помощи приведенных ранее неравенств и неравенства $|m_{xx}| \leqslant$ $\leqslant c_5 \min\,(\varepsilon/x^3, \varepsilon t/x^4)$ при $x>0$ получаем оценку

$$\int\limits_{\varphi'(b_3)t}^{\varphi'(b)t} |S_3'|\,dx \leqslant N_{10}(\varepsilon^2/t^2)\ln^2(N_0t/\varepsilon).$$

На основании (6) имеем $m-p=\varepsilon/x+\rho$, причем

$$|\rho| \leqslant N_{11}\varepsilon^2/t^3, \qquad |\rho_t|,\ |\rho_x| \leqslant N_{12}\varepsilon^2/t^4$$

в области $\varphi'(b_3) \leqslant x/t$.

Подставляя $m-p$ в выражение S_2', получим соотношение $S_2' =$ $= (\rho d)_t + (\rho d)_x + \rho d/t = O(\varepsilon^2/t^3)$. Из приведенных выше неравенств следует оценка

$$\int\limits_{\varphi'(b_3)t}^{\varphi'(b)t} |l(M)|\,dx \leqslant N_{13}(\varepsilon^2/t^2)\ln^2(N_0t/\varepsilon).$$

Отсюда, из (10) и (13) вытекает справедливость теоремы.

Асимптотика v при $\varphi'(b) \leqslant x/t$ получается аналогично после замены переменных $\bar{x} = -x$, $\bar{v} = b_2 - v$. Выпишем окончательно асимптотику v при всех x, не делая предположения (3). Пусть, например, $B_0(y) = (\min(0, (y - \varphi'(b_1))(y - \varphi'(b_2)))^2$. Положим $\overline{\ln}\, y = \ln(\max(y, 1))$. Пользуясь теоремой, можно получить, что функция

$$M(t,x) = u(t,x) + (\varphi''(b_1))^{-1}d(x/t)(m(t, x - \varphi'(b_1)t) - \\ -p(t, x - \varphi'(b_1)t)) - (\varphi''(b_2))^{-1}\bar{d}(x/t)(m(t, \varphi'(b_2)t - x) - \\ -p(t, \varphi'(b_2)t - x)) + (\varepsilon/t)\ln(B_0(x/t)t/\varepsilon)q''(x/t)$$

при $t \geqslant \bar{T}_0 = N_{14}\varepsilon$ удовлетворяет неравенству

$$\int_{-\infty}^{\infty} |l(M)|\,dx \leqslant N_{15}(\varepsilon/t)^{3/2}\ln^2(\bar{N}_0 t/\varepsilon). \tag{14}$$

Заменой переменных $x = \varepsilon\bar{x}$, $t = \varepsilon\bar{t}$ уравнения (1), (2) приводятся к виду

$$v_{\bar{t}} + (\varphi(v))_{\bar{x}} = v_{\bar{x}\bar{x}}, \qquad u_{\bar{t}} + (\varphi(u))_{\bar{x}} = 0.$$

При рассматриваемых начальных условиях решение первого из этих уравнений существует и величина

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(\bar{t}, \bar{x}) - v(\bar{t}, \bar{x})|\,d\bar{x} = K(\bar{t})$$

конечна при конечном $\bar{t}$ (см. [2]).

Переходя к старым переменным, получаем $\|u - v\|_{\bar{T}} = K(N_{14})\varepsilon$. Кроме того, справедлива очевидная оценка $\|u - M\|_{\bar{T}_0} \leqslant N_{16}\varepsilon$. Таким образом, $\|M - v\|_{\bar{T}_0} \leqslant N_{17}\varepsilon$. Отсюда, из (14) и (9) при $t = t_2 > \bar{T}_0$, $t_1 = \bar{T}_0$ имеем

$$\|u - v\|_t \leqslant N_{17}\varepsilon + \int_{\bar{T}_0}^{t} N_{15}(\varepsilon/t)^{3/2}\ln^2(\bar{N}_0 t/\varepsilon)\,dt \leqslant \\ \leqslant \left(N_{17} + \int_{N_{14}}^{\infty} y^{-3/2}\ln^2(\bar{N}_0 y)\,dy\right)\varepsilon = N_{18}\,\varepsilon.$$

Из явной формулы для $m(t,x)$ и (5) при $x \gg \sqrt{\varepsilon t}$ имеем асимптотическое равенство

$$\int_{-\infty}^{x} (m - p)\,dx \sim -\varepsilon\ln(\varepsilon t/(\pi x^2)).$$

Отсюда следует, что как при $q''(y) \not\equiv 0$, так и при $q''(y) \equiv 0$ справедлива оценка

$$\|M - u\|_t \geqslant N_{19}\varepsilon\ln(t/\varepsilon) \geqslant N_{20}\ln(t/\varepsilon)\|M - v\|_t > 0,$$

причем N_{18}, N_{20} не зависят от t. Таким образом, величина $M - u$ является главным членом отклонения $v - u$.

Поступила в редакцию
11.10.1965

Цитированная литература

1. E. Hopf. The partial differential equation $u_t + uu_x = \varepsilon u_{xx}$. Communs Pure and Appl. Math., 1950, 3, № 3, 201—230.
2. А. М. Ильин, О. А. Олейник. О поведении решений задачи Коши для некоторых квазилинейных уравнений при неограниченном возрастании времени. Докл. АН СССР, 1958, 120, № 1, 25—28.