Ю. Л. Кишакевич, Оценки для нулей полиномов,
Матем. заметки, 1979, том 26, выпуск 1, 93–99

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 26, № 1 (1979)

ОЦЕНКИ ДЛЯ НУЛЕЙ ПОЛИНОМОВ

Ю. Л. Кишакевич

П. Туран [1] обратил внимание на проблему определения области расположения нулей полинома

$$p(\lambda) = c_0 + c_1(\lambda) + \ldots + c_n\lambda^n, \qquad c_n \neq 0,$$

не по коэффициентам c_k, а в зависимости от коэффициентов разложения $p(\lambda)$ по полиномам некоторой ортогональной системы, и исследовал случай, соответствующий полиномам Эрмита. Оказалось, что по коэффициентам этого разложения множно определить полосу, параллельную действительной оси, в которой расположены все нули полинома $p(\lambda)$.

В. Шпехт [2], [3] рассмотрел задачу в общем случае разложения $p(\lambda)$ по полиномам ортогональной системы.

В настоящей работе определяется область расположения нулей полинома $p(\lambda)$ в зависимости от коэффициентов разложения $p(\lambda)$ по многочленам $\omega_n(\lambda)$, удовлетворяющим разностному уравнению

$$(l\omega)_n \equiv \omega_{n+1}(\lambda) + \omega_{n-1}(\lambda) + b_n\omega_n(\lambda) = \lambda\omega_n(\lambda),$$

$n = 0, 1, 2, \ldots$, и начальным условиям

$$\omega_{-1} = 0; \quad \omega_0 = 1; \tag{1}$$

причем существуют такие действительные числа $s_0 \leqslant s_1$, что

$$s_0 \leqslant \operatorname{Im} b_n \leqslant s_1, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2}$$

Сначала докажем некоторые леммы относительно полиномов [1]) $\omega_n(\lambda)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

[1]) Если $\operatorname{Im} b_n = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, то существует такая мера $\sigma(\lambda)$, что $\{\omega_n(\lambda)\}$ образуют ортонормированную систему в

ЛЕММА 1. *Полиномы* $\omega_n(\lambda)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, *удовлетворяют соотношению*

$$\sum_{k=0}^{n} (v - r_k) \,|\, \omega_k(\lambda) \,|^2 = |\, \omega_n(\lambda) \,|^2 \operatorname{Im} \frac{\omega_{n+1}(\lambda)}{\omega_n(\lambda)}, \qquad (3)$$

где $v = \operatorname{Im} \lambda$, $r_k = \operatorname{Im} b_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

Доказательство. Нетрудно проверить справедливость такой формулы:

$$\sum_{k=0}^{n} [(ly)_k \bar{y}_k - y_k (\overline{ly})_k] = y_{-1}\bar{y}_0 - y_0\bar{y}_{-1} + y_{n+1}\bar{y}_n - y_n\bar{y}_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} (b_k - \bar{b}_k)\, y_k \bar{y}_k. \qquad (4)$$

Согласно (4) для полиномов $\omega_k(\lambda)$, $k = 0, 1, \ldots, n$, при $\lambda = u + iv$ справедливо тождество

$$\omega_{n+1}(\lambda)\,\overline{\omega_n(\lambda)} - \omega_n(\lambda)\,\overline{\omega_{n+1}(\lambda)} + 2i \sum_{k=0}^{n} (r_k - v)\,|\,\omega_k(\lambda)\,|^2 = 0,$$

которое легко записать в виде (3). Лемма доказана.

В дальнейшем используем следующие обозначения:

$$\Pi_1 = \{\lambda\colon \operatorname{Im}\lambda > s_1\},\ \Pi_2 = \{\lambda\colon \operatorname{Im}\lambda < s_0\}.$$

ЛЕММА 2. *Нули полиномов* $\omega_n(\lambda)$, $n = 1, 2, \ldots$, *лежат в полосе* $s_0 \leqslant \operatorname{Im}\lambda \leqslant s_1$.

Доказательство. Предположим, что $\omega_n(\lambda_0) = 0$ и $\lambda_0 = u_0 + iv_0 \in \Pi_1$. Тогда

$$v_0 - r_k \geqslant v_0 - s_1 > 0, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \qquad (5)$$

Для левой части тождества (3) имеем

$$\sum_{k=0}^{n} (v_0 - r_k)\,|\,\omega_k(\lambda_0)\,|^2 \geqslant (v_0 - s_1)\,|\,\omega_0(\lambda_0)\,|^2 = v_0 - s_1 > 0. \qquad (6)$$

Так как $\omega_n(\lambda_0) = 0$, то правая часть тождества (3) при $\lambda = \lambda_0$ равна 0, что противоречит неравенству (6).

Аналогично доказывается, что нуль полинома $\omega_n(\lambda)$ не может лежать в полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda < s_0$.

ЛЕММА 3. *Имеют место оценки*

$$|\,\omega_n(\lambda_0)/\omega_{n+1}(\lambda_0)\,| \leqslant 1/(v_0 - s_1), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \qquad (7)$$

$L^2_\sigma(-\infty, \infty)$ (см., например, [4, гл. 7, § 1]). Если $\operatorname{Im} b_n \neq 0$ хотя бы для одного n, то $\{\omega_n(\lambda)\}$ — ортогональная система в обобщенном смысле (см. [5]).

при $\lambda_0 = u_0 + iv_0 \in \Pi_1$;

$$|\omega_n(\lambda_0)/\omega_{n+1}(\lambda_0)| \leqslant 1/(s_0 - v_0), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{8}$$

при $\lambda_0 = u_0 + iv_0 \in \Pi_2$.

Доказательство. Пусть $\lambda_0 = u_0 + iv_0 \in \Pi_1$. Из неравенств (5) следует, что

$$(v_0 - s_1)|\omega_n(\lambda_0)|^2 \leqslant$$
$$\leqslant (v_0 - s_1)\sum_{k=0}^{n}|\omega_k(\lambda_0)|^2 \leqslant \sum_{k=0}^{n}(v_0 - r_k)|\omega_k(\lambda_0)|^2.$$

Вследствие равенства (3) получаем

$$(v_0 - s_1)\,|\,\omega_n(\lambda_0)\,|^2 \leqslant |\,\omega_n(\lambda_0)\,|^2\,\mathrm{Im}\,(\omega_{n+1}(\lambda_0)/\omega_n(\lambda_0)).$$

Согласно лемме 2 $\omega_n(\lambda_0) \neq 0$, поэтому

$$v_0 - s_1 \leqslant \mathrm{Im}\,(\omega_{n+1}(\lambda_0)/\omega_n(\lambda_0)).$$

Отсюда легко получить неравенство (7). Неравенство (8) доказывается аналогично.

Следствие. *Для любых целых* k *и* n $(0 \leqslant k \leqslant n)$ *справедливы неравенства*

$$|\omega_k(\lambda_0)/\omega_n(\lambda_0)| \leqslant (v_0 - s_1)^{-n+k} \quad \textit{при } \lambda_0 = u_0 + iv_0 \in \Pi_1, \tag{9}$$

$$|\omega_k(\lambda_0)/\omega_n(\lambda_0)| \leqslant (s_0 - v_0)^{-n+k} \quad \textit{при } \lambda_0 = u_0 + iv_0 \in \Pi_2. \tag{10}$$

ТЕОРЕМА 1. *Все нули полинома*

$$p(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} c_k\lambda^k = \sum_{k=0}^{n} d_k\omega_k(\lambda) \qquad (c_n \neq 0) \tag{11}$$

лежат в полосе $s_0 - D \leqslant \mathrm{Im}\,\lambda \leqslant s_1 + D$, *где*

$$D = \Big(\sum_{k=0}^{n-1}|d_k|^2\Big)^{1/2}\cdot(|d_n|)^{-1}.$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть нули полинома $p(\lambda)$, лежащие в полуплоскостях Π_1 и Π_2.

Пусть $\lambda_0 = u_0 + iv_0 \in \Pi_1$ и $p(\lambda_0) = 0$, т. е.

$$d_0\omega_0(\lambda_0) + d_1\omega_1(\lambda_0) + \ldots + d_n\omega_n(\lambda_0) = 0, \tag{12}$$

причем $\omega_k(\lambda_0) \neq 0$, $k = 0, 1, \ldots, n$, согласно лемме 2. Из равенства (12) вытекает, что

$$|\,d_n\omega_n(\lambda_0)\,|^2 = |\,d_0\omega_0(\lambda_0) + \ldots + d_{n-1}\omega_{n-1}(\lambda_0)\,|^2.$$

Отсюда вследствие неравенства Коши — Буняковского получаем

$$|d_n\omega_n(\lambda_0)|^2 \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\frac{|d_k|^2}{v_0 - r_k}\cdot\sum_{k=0}^{n-1}(v_0 - r_k)|\omega_k(\lambda_0)|^2.$$

Учитывая (5) и (3), последнее неравенство можно переписать в таком виде:

$$|d_n|^2 \leqslant \frac{1}{v_0 - s_1} \sum_{k=0}^{n} |d_k|^2 \cdot \left| \frac{\omega_{n-1}(\lambda_0)}{\omega_n(\lambda_0)} \right|^2 \operatorname{Im} \frac{\omega_n(\lambda_0)}{\omega_{n-1}(\lambda_0)} .$$

Итак, имеем

$$v_0 - s_1 \leqslant \frac{1}{|d_n|^2} \sum_{k=0}^{n-1} |d_k|^2 \cdot \left| \frac{\omega_{n-1}(\lambda_0)}{\omega_n(\lambda_0)} \right| . \tag{13}$$

Из неравенств (7) и (13) легко вывести оценку $v_0 - s_1 \leqslant D$. Аналогично доказывается неравенство $v_0 \geqslant s_0 - D$.

Для полинома (11) через ρ обозначим (единственный) положительный корень уравнения

$$|d_0| + |d_1| x + \ldots + |d_{n-1}| x^{n-1} - |d_n| x^n = 0. \tag{14}$$

Пусть

$$\beta = \max_{0 \leqslant k < n} |d_k / d_n|.$$

ТЕОРЕМА 2. *Все нули полинома* (11) *лежат в полосе* $s_0 - (1 + \beta) < s_0 - \rho \leqslant \operatorname{Im} \lambda \leqslant s_1 + \rho < s_1 + 1 + \beta$.

Доказательство. Достаточно рассмотреть нули полинома $p(\lambda)$, лежащие в $\Pi_1 \cup \Pi_2$.

Пусть $\lambda_0 = u_0 + iv_0 \in \Pi_1$ и $p(\lambda_0) = 0$. Обозначим $v_0 - s_1 = y$. Из равенства

$$-1 = \frac{d_0 \omega_0(\lambda_0)}{d_n \omega_n(\lambda_0)} + \ldots + \frac{d_{n-1} \omega_{n-1}(\lambda_0)}{d_n \omega_n(\lambda_0)}$$

вследствие оценок (9) вытекает неравенство

$$1 \leqslant \left| \frac{d_0 \omega_0(\lambda_0)}{d_n \omega_n(\lambda_0)} \right| + \left| \frac{d_1 \omega_1(\lambda_0)}{d_n \omega_n(\lambda_0)} \right| + \ldots + \left| \frac{d_{n-1} \omega_{n-1}(\lambda_0)}{d_n \omega_n(\lambda_0)} \right| \leqslant$$
$$\leqslant \left| \frac{d_0}{d_n} \right| \cdot \frac{1}{y^n} + \left| \frac{d_1}{d_n} \right| \cdot \frac{1}{y^{n-1}} + \ldots + \left| \frac{d_{n-1}}{d_n} \right| \cdot \frac{1}{y},$$

т. е.

$$|d_n| y^n \leqslant |d_0| + |d_1| y + \ldots + |d_{n-1}| y^{n-1}.$$

Таким образом,

$$v_0 - s_1 = y \leqslant \rho. \tag{15}$$

Из равенства $|d_n| \rho^n = |d_0| + |d_1| \rho + \ldots + |d_{n-1}| \rho^{n-1}$ вытекает, что при $\rho > 1$

$$1 = \left| \frac{d_0}{d_n} \right| \frac{1}{\rho^n} + \ldots + \left| \frac{d_{n-1}}{d_n} \right| \frac{1}{\rho} \leqslant$$
$$\leqslant \beta \left(\frac{1}{\rho} + \ldots + \frac{1}{\rho^n} \right) \leqslant \beta \cdot \frac{1}{\rho - 1} .$$

Отсюда получаем

$$\rho < 1 + \beta. \tag{16}$$

Вследствие неравенств (15) и (16) имеем оценки

$$v_0 \leqslant s_1 + \rho \leqslant s_1 + 1 + \beta.$$

Аналогично доказывается вторая половина теоремы.

Для полинома (11) обозначим через $\alpha = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} (|\sqrt[k]{d_{n-k}/d_n}|)$ и через σ (единственный) положительный корень уравнения

$$1 + \sigma + \ldots + \sigma^{n-1} - \sigma^n = 0.$$

ТЕОРЕМА 3. *Все нули полинома* (11) *лежат в полосе* $s_0 - 2\alpha < s_0 - \sigma\alpha \leqslant \operatorname{Im}\lambda \leqslant s_1 + \sigma\alpha < s_1 + 2\alpha$.

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 2, для каждого нуля $\lambda_0 = u_0 + iv_0 \in \Pi_1$ полинома $p(\lambda)$ получаем неравенство

$$1 \leqslant \left|\frac{d_0\omega_0(\lambda_0)}{d_n\omega_n(\lambda_0)}\right| + \left|\frac{d_1\omega_1(\lambda_0)}{d_n\omega_n(\lambda_0)}\right| + \ldots + \left|\frac{d_{n-1}\omega_{n-1}(\lambda_0)}{d_n\omega_n(\lambda_0)}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\frac{d_0}{d_n}\right| \cdot \frac{1}{y^n} + \left|\frac{d_1}{d_n}\right| \cdot \frac{1}{y^{n-1}} + \ldots + \left|\frac{d_{n-1}}{d_n}\right| \cdot \frac{1}{y} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{\alpha}{y}\right)^n + \left(\frac{\alpha}{y}\right)^{n-1} + \ldots + \left(\frac{\alpha}{y}\right) \quad (y = v_0 - s_1).$$

Таким образом,

$$\left(\frac{y}{\alpha}\right)^n \leqslant 1 + \frac{y}{\alpha} + \ldots + \left(\frac{y}{\alpha}\right)^{n-1}.$$

Отсюда вытекает $y/\alpha \leqslant \sigma < 2$. Аналогично доказывается вторая половина теоремы.

Для полинома (11) обозначим

$$\beta^* = \max_{1\leqslant k\leqslant n} (|d_{n-k}\cdot d_n^{-1}|\cdot\gamma^k)$$

(γ — произвольная положительная константа).

ТЕОРЕМА 4. *Все нули полинома* (11) *лежат в полосе* $s_0 - (1 + \beta^*)/\gamma < \operatorname{Im}\lambda < s_1 + (1 + \beta^*)/\gamma$.

Доказательство. Для каждого нуля $\lambda_0 = u_0 + iv_0 \in \Pi_1$ полинома (11) в полосе $v_0 - s_1 = y >$

$> 1/\gamma$ получаем, как и раньше, неравенство

$$1 \leqslant \left|\frac{d_0}{d_n}\right| \cdot \frac{1}{y^n} + \left|\frac{d_1}{d_n}\right| \cdot \frac{1}{y^{n-1}} + \ldots + \left|\frac{d_{n-1}}{d_n}\right| \cdot \frac{1}{y} \leqslant$$

$$\leqslant \beta^* \left(\frac{1}{(\gamma y)^n} + \frac{1}{(\gamma y)^{n-1}} + \ldots + \frac{1}{\gamma y}\right) < \beta^* \frac{1}{\gamma y - 1}.$$

Отсюда $y = v_0 - s_1 < (1 + \beta^*)/\gamma$, или $v_0 < s_1 + (1 + \beta^*)/\gamma$.

Аналогично рассматривается случай $\lambda_0 \in \Pi_2$.

П р и м е ч а н и е. При $\gamma = 1$ из теоремы 4 вытекает утверждение теоремы 2.

Из коэффициентов полинома (11) образуем с помощью произвольной положительной константы γ ряд величин: $f_k = \frac{d_k}{d_n} \gamma^{k-n}$ для $0 \leqslant k \leqslant n-1$ и упорядочим модули $|f_k|$: $\beta(\gamma) = \beta_0 \geqslant \beta_1 \geqslant \ldots \geqslant \beta_{n-1}$.

ТЕОРЕМА 5. *Все нули полинома* (11) *лежат в открытой полосе* $s_0 - \gamma(1 + \mu) < \operatorname{Im} \lambda < s_1 + \gamma(1 + \mu)$, *где*

$$\mu = \mu(\gamma) = \frac{\beta_0}{1 + \beta_0} \left(\beta_0 + \frac{\beta_1}{1 + \beta_0} + \ldots + \frac{\beta_{n-1}}{(1 + \beta_0)^{n-1}}\right).$$

П р и м е ч а н и е. С помощью разностей $\delta_0 = \beta_0 - \beta_1$; $\delta_1 = \beta_1 - \beta_2$; $\ldots$; $\delta_{n-2} = \beta_{n-2} - \beta_{n-1}$; $\delta_{n-1} = \beta_{n-1}$, μ можно записать в виде

$$\mu = \mu(\gamma) = \beta_0 - \frac{\delta_0}{1 + \beta_0} - \frac{\delta_1}{(1 + \beta_0)^2} - \ldots - \frac{\delta_{n-1}}{(1 + \beta_0)^n}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно теореме 4 все нули полинома (11) лежат в полосе $s_0 - \gamma(1 + \beta_0) < \operatorname{Im} \lambda < s_1 + \gamma(1 + \beta_0)$. Пусть $\lambda_0 = u_0 + iv_0 \in \Pi_1$ и $p(\lambda_0) = 0$, причем $\gamma(1 + \mu) \leqslant v_0 - s_1 = \gamma y < \gamma(1 + \beta_0)$. Рассуждая так же, как и при доказательстве предыдущих теорем, получим неравенство

$$1 \leqslant \left|\frac{d_0}{d_n}\right| \frac{1}{(v_0 - s_1)^n} + \left|\frac{d_1}{d_n}\right| \frac{1}{(v_0 - s_1)^{n-1}} + \ldots$$

$$\ldots + \left|\frac{d_{n-1}}{d_n}\right| \frac{1}{v_0 - s_1} = \left|\frac{d_0}{d_n} \gamma^{-n}\right| \frac{1}{y^n} + \left|\frac{d_1}{d_n} \gamma^{-n+1}\right| \frac{1}{y^{n-1}} + \ldots$$

$$\ldots + \left|\frac{d_{n-1}}{d_n} \gamma^{-1}\right| \frac{1}{y} = \frac{|f_0|}{y^n} + \frac{|f_1|}{y^{n-1}} + \ldots + \frac{|f_{n-1}|}{y}.$$

Так как $y > 1$, то

$$1 \leqslant \frac{\beta_0}{y} + \frac{\beta_1}{y^2} + \ldots + \frac{\beta_{n-1}}{y^n}.$$

Умножив обе части последнего неравенства на $y - 1 > 0$, получим

$$y - 1 \leqslant \beta_0 + \frac{\beta_1}{y} + \ldots + \frac{\beta_{n-1}}{y_{n-1}} - \frac{\beta_0}{y} - \frac{\beta_1}{y^2} - \ldots - \frac{\beta_{n-1}}{y^n},$$

или

$$y - 1 \leqslant \beta_0 - \frac{\delta_0}{y} - \frac{\delta_1}{y^2} - \ldots - \frac{\delta_{n-1}}{y^n}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\delta_0}{y} + \frac{\delta_1}{y^2} + \ldots + \frac{\delta_{n-1}}{y^n} \leqslant 1 + \beta_0 - y \leqslant \beta_0 - \mu \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\delta_0}{1 + \beta_0} + \frac{\delta_1}{(1 + \beta_0)^2} + \ldots + \frac{\delta_{n-1}}{(1 + \beta_0)^n}.$$

Поскольку $\delta_k \geqslant 0$ для $0 \leqslant k \leqslant n - 1$, то $1 + \beta_0 \leqslant y$, а это невозможно.

Итак, получаем $v_0 - s_1 = \gamma y < \gamma (1 + \mu)$.

Примечание. При $s_0 = s_1 = 0$ из теорем 1 — 5 получаются результаты В. Шпехта [2, теоремы 3 — 6], [3, теорема 2].

Дрогобычский педагогический институт

Поступило 12.II.1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Turan P., Hermite-expansion and strips of zeros of polynomials, Arch. Math., 5, № 1—3 (1954), 148—152.

[2] Specht W., Die Lage der Nullstellen eines Polynoms, I, Mathem. Nachrichten, 15, № 5—6 (1956), 353—374.

[3] Specht W., Die Lage der Nullstellen eines Polynoms, II, Mathem. Nachrichten, 15, № 3—4 (1957), 257—263.

[4] Березанский Ю. М., Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, Киев, «Наукова думка», 1965.

[5] Кишакевич Ю. Л., Спектральна функція типу Марченка для різницевого оператора, Докл. АН УССР, Сер. А, 2 (1972), 118—121.