М. М. Арсланов, И. Ш. Калимуллин, С. Б. Купер, Свойства разложимости тотальных степеней по перечислимости,
Алгебра и логика, 2003, том 42, номер 1, 3–25

Алгебра и логика, 42, № 1 (2003), 3—25

УДК 510.5

СВОЙСТВА РАЗЛОЖИМОСТИ ТОТАЛЬНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПО ПЕРЕЧИСЛИМОСТИ*)

М. М. АРСЛАНОВ, И. Ш. КАЛИМУЛЛИН, С. Б. КУПЕР

В этой работе описываются общие условия (см. теор. 6 ниже), которые позволяют разложить степени по перечислимости (e-степени) над заданными степенями, а также определенным образом вложить ромб в локальную структуру e-степеней. При этом затрагиваются три основополагающие темы, такие как возможность исследования свойств тьюринговых степеней посредством сводимости по перечислимости, общие вопросы определимости, а также значение в этих исследованиях свойств разложимости и неразложимости степеней. Кроме того, разработанная для этих целей техника позволяет глубже понять имеющиеся связи между структурой степеней и их информационным содержанием.

К. Джокуш [1] ввел следующее определение:

множество $A \subseteq \omega$ называется *полурекурсивным*, если существует вычислимая функция $f : \omega^2 \to \omega$ такая, что для всех x, y

(i) $f(x, y) = x$ или $f(x, y) = y$,

(ii) $x \in A \vee y \in A \Rightarrow f(x, y) \in A$.

Изложение начинается с теоремы 1, в которой (с учетом теор. 2) установлено, что полурекурсивные множества позволяют построить эффективные и равномерные минимальные пары e-степеней. Это позволяет получить новые результаты о расположении тотальных e-степеней ниже $\mathbf{0}'$

*)Работа выполнена при финансовой поддержке Королевского общества Великобритании, грант для совместных проектов со странами бывшего СССР, а также ИНТАС-РФФИ, проект 97-0139.

(теор. 7), а также о степенях полурекурсивных множеств (теор. 5). Кроме того, используя естественное вложение тьюринговых степеней в степени по перечислимости, получим результаты о вложении ромба с сохранением наименьшего и наибольшего элементов в е-степени ниже $\mathbf{0}'$ (см. следствия 8, 9 и теор. 6). Примечательное приложение этой техники — довольно простое доказательство одного обобщения теоремы Ахмад [2] о вложении ромба (см. теор. 6).

Существует целый ряд препятствий к дальнейшему развитию в этом направлении. Одно из них — результат из [3] о существовании неразложимой Δ^0_2-е-степени, превосходящей $\mathbf{0}_e$ (см. также теор. 10), вместе с соответствующим результатом [4] о невложимости ромба в е-степенях. Существуют и другие препятствия, мешающие изучению поведения тотальных степеней, расположенных ниже $\mathbf{0}'$ (см., напр., [4, 5]). Имеется также ряд открытых вопросов, два из них обсуждаются в конце этой работы (вопр. 12, 13).

Для более подробной информации о структуре степеней по перечислимости мы предлагаем читателю ознакомиться с [6, 7] и [8, гл. XIV].

§ 1. Полурекурсивные множества

Из результатов этого параграфа вытекает, что е-степени полурекурсивных множеств расположены "достаточно близко" к $\mathbf{0}$, е-степени вычислимо перечислимых (далее, в. п.) множеств. С другой стороны, из теоремы 5 вытекает, что класс е-степеней полурекурсивных множеств порождает под операцией $\cup$ по крайней мере все тотальные степени. Таким образом, этот класс является базисом автоморфизмов структуры всех е-степеней, так как известно (см. [9]), что любая е-степень является наибольшей нижней гранью двух тотальных е-степеней.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть B — полурекурсивное множество. Существует вычислимая функция h такая, что для всех i и j*

$$\Phi_i^B \cap \Phi_j^{\overline{B}} \subseteq W_{h(i,j)} \subseteq \Phi_i^B \cup \Phi_j^{\overline{B}},$$

где $\{\Phi_e\}_{e\in\omega}$ *и* $\{W_e\}_{e\in\omega}$ *— эффективные нумерации всех e-операторов и в. п. множеств, соответственно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть f — вычислимая функция (*полурекурсивная функция* для B) такая, что

для всех x, y выполняются $f(x,y) \in \{x,y\}$ и $\{x,y\} \cap B \neq \varnothing \to f(x,y) \in \in B$.

По данным i и j перечисляем в. п. множество $C(i,j)$ следующим образом: для любого $x \in \omega$ полагаем, что $x \in C$ тогда и только тогда, когда

(a) существуют конечные множества F и G такие, что $x \in \Phi_i^F$, $x \in \in \Phi_j^G$;

(b) $f(x,y) = x$ для всех $x \in F$ и $y \in G$.

Ясно, что эта стратегия обеспечивает эффективное перечисление множества C. Следовательно, существует вычислимая функция $h(i,j)$ такая, что $C = W_{h(i,j)}$ для всех $i, j \in \omega$. Пусть $x \in \Phi_i^B \cap \Phi_j^{\overline{B}}$. Тогда $x \in \Phi_i^F$ ($x \in \Phi_j^G$) для некоторого конечного множества $F \subset B$ ($G \subset \overline{B}$). Следовательно, по построению $x \in W_{h(i,j)}$.

Пусть теперь $x \in W_{h(i,j)}$. Тогда $x \in \Phi_i^F$ и $x \in \Phi_j^G$ для некоторых конечных множеств F и G таких, что $f(x,y) = x$ для всех $x \in F$ и $y \in G$. Предположим, для получения противоречия, что $x \notin \Phi_i^B \cup \Phi_j^{\overline{B}}$. Значит, $F \nsubseteq B$ и, следовательно, существует $a \in F$ такое, что $a \in \overline{B}$. Аналогично, существует $b \in G$ такое, что $b \in B$. Тогда $f(a,b) = b$, что противоречит п. (b) построения. $\square$

Как следствие получается следующая

ТЕОРЕМА 2. *Пусть B — произвольное полурекурсивное множество. Тогда*

(1) (*эффективность*) $\deg_e(B) \cap \deg_e(\overline{B}) = \mathbf{0}_e$, *более того, по данным i и j таким, что $\Phi_i^B = \Phi_j^{\overline{B}}$, можно эффективно найти номер в. п. множества C такого, что $C = \Phi_i^B = \Phi_j^{\overline{B}}$;*

(2) (*равномерность*) *для любого множества $X \subseteq \omega$ верно равенство*

$$\deg_e(X) = \deg_e(X \oplus B) \cap \deg_e(X \oplus \overline{B}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Если $\Phi_i^B = \Phi_j^{\overline{B}}$ для некоторых i и j, то

$\Phi_i^B \cap \Phi_j^{\overline{B}} = \Phi_i^B \cup \Phi_j^{\overline{B}}$. Теперь утверждение вытекает непосредственно из теоремы 1.

(2) Вытекает непосредственно из теоремы 1, релятивизованной относительно X, после очевидных изменений. $\square$

Напомним, что если $A \in \mathbf{a}$, то $\mathbf{a}' = \deg_e(J(A) \oplus \overline{J(A)})$, где $J(A) = \{e : e \in \Phi_e(A)\}$. Легко проверить, что $A \equiv_e J(A)$, $\overline{A} \leq_e \overline{J(A)}$ и $\overline{K} \leq_e \overline{J(A)}$. Следовательно, $A \oplus \overline{A} \oplus \overline{K} \leq_e J(A) \oplus \overline{J(A)}$. Из следующей теоремы вытекает, что если A полурекурсивно и его дополнение не является в. п., то $J(A) \oplus \overline{J(A)}$ имеет наименьшую возможную степень (а именно, степень множества $A \oplus \overline{A} \oplus \overline{K}$).

ТЕОРЕМА 3. *Пусть A — полурекурсивное множество. Тогда либо $\overline{A}$ — в. п. множество, либо $\overline{J(A)} \leq_e \overline{A} \oplus \overline{K}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как доказано в [1], из того, что A полурекурсивно, следует, что A является нижним сечением некоторого вычислимого линейного порядка $<_C$ на ω. Пусть $\max_C(F)$ означает наибольший элемент конечного множества F относительно $<_C$.

Предположим, что множество $\overline{A}$ не является в. п. Если $e \notin \Phi_e(A)$, то $V_e \subset \overline{A}$, где V_e — следующее в. п. множество:

$$\{x : \text{существует конечное множество } F \text{ такое, что} \\ [\max_C(F) <_C x \;\&\; e \in \Phi_e(F)]\}.$$

Следовательно, если $e \notin J(A)$, то $\overline{A} - V_e \neq \varnothing$. Отсюда, для каждого e

$$e \in \overline{J(A)} \text{ тогда и только тогда, когда существует } x \in \overline{A} \text{ такой,} \\ \text{что для любого конечного множества } F \text{ выполняется} \\ [\max_C(F) <_C x \to e \notin \Phi_e(F)],$$

а это влечет $\overline{J(A)} \leq_e \overline{A} \oplus \overline{K}$. $\square$

ТЕОРЕМА 4. *Если A — полурекурсивное множество такое, что A, $\overline{A}$ не являются в. п., то e-степень множества A квазиминимальна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $B \oplus \overline{B} \leq_e A$ для некоторого множества B. Пусть $B = \Phi^A$ и $\overline{B} = \Psi^A$. Пусть A является нижним сечением для некоторого вычислимого линейного порядка $\leq_C$ на ω. Можно предположить (см. предыдущую теор.), что если $\langle x, F\rangle \in \Theta$, то $|F| = 1$, где Θ совпадает с Φ или Ψ. Пусть $S = \{k : \exists n \leq_C k \exists m \leq_C k\ (\Phi^{\{n\}} \cap \Psi^{\{n\}} \neq \varnothing)\}$.

Ясно, что $S \subseteq \overline{A}$ и S является в. п. множеством. Поэтому, если $\overline{A}$ не будет в. п., то существует число $a \in \overline{A} - S$.

Случай 1. Существует число $a \in \overline{A}$ такое, что $a \leq_C x$ для всех $x \in S$. Тогда для всех y справедливо $y \in B \Rightarrow \exists n <_C a\ (\langle y, n\rangle \in \Phi)$. Следовательно, B является в. п. Аналогично доказывается, что $\overline{B}$ будет в. п.

Случай 2. В противном случае, очевидно, $\overline{A} = \{a : \exists x \in S\ (x <_C <_C a)\}$. Значит, $\overline{A}$ является в. п. □

Джокуш [1] доказал, что для любого невычислимого множества A существует полурекурсивное множество $B \equiv_T A$ такое, что B и $\overline{B}$ не будут в. п. Этот результат обобщается ниже в теореме 5, которая будет использована при доказательстве теоремы 6.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть $C <_T A$. Тогда существует полурекурсивное множество $B \equiv_T A$ такое, что B и $\overline{B}$ оба не являются в. п. множествами относительно C.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим два случая.

Случай 1. Пусть $\deg_T(A)$ не является в. п. относительно C. Пусть $\Lambda = \{\,0, 1\,\}$ с обычным отношением порядка $0 <_\Lambda 1$, и $T = \Lambda^{<\omega}$. Определим $\delta \in \Lambda^\omega$ с помощью отношения $\delta(x) = 1 \Rightarrow x \in A$, и пусть $B = \{\sigma \in T : \exists \tau \subset \delta\ (\sigma <_L \tau)\}$. (Здесь $<_L$ — стандартное упорядочение, определенное на строках дерева T.) Ясно, что $A \equiv_T B$ и B полурекурсивно.

Случай 2. Пусть $\deg_T(A)$ является в. п. относительно C. Без ограничения общности можно предполагать, что множество A является в. п. относительно C. Пусть $\{A_s\}_{s\in\omega}$ — это C-вычислимая последовательность конечных множеств таких, что $A_s \subseteq A_{s+1}$ и $A = \bigcup\limits_s A_s$. Теперь пусть $\Lambda = \{\,-1, 0, 1\,\}$ с обычным отношением порядка $-1 <_\Lambda 0 <_\Lambda 1$, и $T = \Lambda^{<\omega}$. Снова положим $B = \{\sigma \in T : \exists \tau \subset \delta\ (\sigma <_L \tau)\}$ для некоторого $\delta \in \Lambda^\omega$. Нам требуется определить C-вычислимую аппроксимацию $\{\delta_s\}_{s\in\omega}$ для δ, где $\delta_s \in \Lambda^{<\omega}$, $|\delta_s| = s$ и $\delta(x) = \lim_s \delta_s(x)$ для любых x, удовлетворяя для всех $e \in \omega$ требования

$$\mathcal{N}_{2e} \quad : \quad \overline{A} = \Phi_e^{B\oplus C\oplus \overline{C}} \to \overline{A} \text{ является в. п. относительно } C,$$
$$\mathcal{N}_{2e+1} \quad : \quad \overline{A} = \Phi_e^{\overline{B}\oplus C\oplus \overline{C}} \to \overline{A} \text{ является в. п. относительно } C,$$

здесь $\{\Phi_e\}_{e\in\omega}$ — эффективная нумерация всех вычислимых операторов перечисления. Будем также удовлетворять условие $\delta \equiv_T A$.

Все эти требования вместе обеспечивают, что $B \equiv_T A$, а также, что B и $\overline{B}$ не являются в. п. относительно C. Действительно, так как $B \equiv_T \delta$ и $\delta \equiv_T A$, имеем $A \equiv_T B$. Более того, если, например, B является в. п. относительно C, то $\overline{A} \equiv_e A \oplus \overline{A} \equiv_e B \oplus \overline{B} \le_e \overline{B} \oplus C \oplus \overline{C}$, поэтому и $\overline{A}$ будет в. п. относительно C, вопреки предположению.

Без ограничения общности можно предполагать, что для всех e-операторов Φ_e, всех конечных множеств F и любого $s \in \omega$ справедливо

$$\langle x, F\rangle \in \Phi_{e,s} \to (\forall \sigma \in F)(|\sigma| < s).$$

Для $\Phi_{e,s}$ определим значение C-вычислимой use-функции $u(G; e, x, s)$, где G — конечное множество, как конечное множество $F \subseteq G$ с наименьшим каноническим номером и такое, что $\langle x, F \oplus H_1 \oplus H_2\rangle \in \Phi_{e,s}$ для некоторых конечных множеств $H_1 \subseteq C$ и $H_2 \subseteq \overline{C}$. Если такого F нет, то полагаем $u(G; e, x, s) = \varnothing$.

Построение (вычислимое относительно C)

Этап $s = 0$. Пусть $\delta_0 = \lambda$ (пустая строка) и $B_0 = \varnothing$.

Этап $s+1$. Предположим по индукции, что δ_s и B_s уже определены. Пусть

$$l(2e, s) = \max\{k \leqslant s : \overline{A}_s\lceil k = \Phi_{e,s}^{B_s\oplus C\oplus\overline{C}}\lceil k\},$$
$$l(2e+1, s) = \max\{k \leqslant s : \overline{A}_s\lceil k = \Phi_{e,s}^{\overline{B}_s\oplus C\oplus\overline{C}}\lceil k\},$$
$$R(2e, s) = \bigcup\{F : \exists t \leqslant s \exists x \leqslant l(e,t)(F = u(B_t, e, x, t))\},$$
$$R(2e+1, s) = \bigcup\{F : \exists t \leqslant s \exists x \leqslant l(e,t)(F = u(\overline{B}_t, e, x, t))\}.$$

Случай 1: $\forall k < s\,(k \in A_{s+1} \to k \in A_s)$. Определим: $\delta_{s+1} = \delta_s\widehat{\ }n$, где

$$n = \begin{cases} 0, & \text{если } s \notin A_{s+1}, \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Случай 2. $\exists k < s\,(k \in A_{s+1} - A_s)$. Пусть k_0 — наименьшее из таких чисел k. Выберем наименьшее число m (если существует) такое, что $m = 2e + i$, $i < 2$, и $\{\sigma \in T : |\sigma| \geqslant k_0\} \cap R(m, s) \neq \varnothing$. (Если такого m нет, то полагаем $m = 0$.) Определим

$$\delta_{s+1}(k_0) = \begin{cases} 1, & \text{если } i = 0, \\ -1 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$\delta_{s+1}(k) = \delta_s(k), \text{ где } k < k_0,$$

$$\delta_{s+1}(k) = \begin{cases} 0, & \text{если } k \notin A_{s+1}, \\ 1 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $k_0 < k < s + 1$.

В обоих случаях положим $B_{s+1} = \{\sigma \in T : \sigma <_L \delta_{s+1}\}$. Следовательно, в случае 2 имеем

$$i = 0 \to \delta_s <_L \delta_{s+1} \to B_s \subseteq B_{s+1},$$

$$i = 1 \to \delta_{s+1} <_L \delta_s \to B_{s+1} \subseteq B_s \to \overline{B}_s \subseteq \overline{B}_{s+1}.$$

Значит, требование $\mathcal{N}_m$ не нарушается на этапе $s + 1$. Это завершает построение. Пусть $\delta = \lim_s \delta_s$ и $B = \lim_s B_s = \{\sigma \in T : \exists \tau \subset \delta\ (\sigma <_L \tau)\}$.

Ясно, что множество B полурекурсивно. Сводимость $A \leq_T \delta$ вытекает из того, что $x \in A \Rightarrow \delta(x) \neq 0$ для всех x. Сводимость $\delta \leq_T A$ следует из того, что $\delta_s(x) = \delta(x)$, если $A_s\lceil(x + 1) = A\lceil(x + 1)$ и $s > x$.

Теперь покажем, что все требования $\mathcal{N}_m$, $m \geqslant 0$, удовлетворяются. Допустим противное, т. е. существует (наименьшее) $m = 2e + i$ такое, что либо требование $\mathcal{N}_m$ не удовлетворено (значит, $\overline{A} = \Phi^{B \oplus C \oplus \overline{C}}$, если $i = 0$, и $\overline{A} = \Phi^{\overline{B} \oplus C \oplus \overline{C}}$, если $i = 1$), либо множество $R(m) = \bigcup\{R(m, s) : s \in \omega\}$ бесконечно. Тогда $\limsup_s l(m, s) = \infty$. Также очевидно, что множество $R = \bigcup\{R(m') : m' < m\} = \bigcup\limits_{m' < m} \bigcup\limits_{s \in \omega} R(m', s)$ конечно. Пусть s' — такой этап, на котором для каждого $k \leqslant \max\{n : \exists \sigma \in R(n = |\sigma|)\}$ имеем $A(k) = A_{s'}(k)$. Тогда для всех $x \in \omega$ справедливо $x \in \overline{A} \leftrightarrow \exists s > s'\ (x \in \overline{A}_s \,\&\, x < l(m, s))$. Вышеприведенное построение C-вычислимо, поэтому $\overline{A}$ является в. п. относительно C. Кроме того, множество A также в. п. относительно C. Значит, $A \leq_T C$, получаем противоречие. $\square$

§ 2. Свойства разложимости и вложение ромба

Этот параграф мы начинаем со следующего обобщения теоремы Ахмад о вложении ромба [2]:

ТЕОРЕМА 6. (1) *Пусть* $\mathbf{a}$ — *данная e-степень, и* $\mathbf{b}$ — *тотальная степень, причем* $\mathbf{a} < \mathbf{b}$. *Тогда ромб вложим в e-степени с* $\mathbf{b}$, *как его наибольший элемент, и с* $\mathbf{a}$, *как его наименьший элемент, при условии, что существует тотальная степень* $\mathbf{c}$ *такая, что* $\mathbf{a} \leq \mathbf{c} < \mathbf{b}$.

(2) *Пусть* $\mathbf{a} > \mathbf{0}$ — *тотальная* Δ^0_2-*степень. Тогда ромб вложим в низкие e-степени с* $\mathbf{a}$, *как его наибольший элемент, и с* $\mathbf{0}$, *как его наименьший элемент.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Пусть $A \in \mathbf{a}$, $C \oplus \overline{C} \in \mathbf{c}$ и $B \oplus \overline{B} \in \mathbf{b}$. Тогда $C <_T B$. По теореме 5 существует полурекурсивное множество $X \equiv_T B$ такое, что X и $\overline{X}$ не являются в. п. множествами относительно C, значит, $X \not\leq_e C \oplus \overline{C}$ и $\overline{X} \not\leq_e C \oplus \overline{C}$. Отсюда следует, что $X \not\leq_e A$ и $\overline{X} \not\leq_e A$. Теперь пусть $\mathbf{u} = \deg_e(A \oplus X)$ и $\mathbf{v} = \deg_e(A \oplus \overline{X})$. Из теоремы 2 вытекает, что $\mathbf{u} \cap \mathbf{v} = \mathbf{a}$. Кроме того, $\mathbf{u} \cup \mathbf{v} = \mathbf{b}$.

(2) Пусть $A \subset \omega$ — множество такое, что $A \oplus \overline{A} \in \mathbf{a}$. Пусть B — полурекурсивное множество такое, что $A \equiv_T B$, а B и $\overline{B}$ не являются в. п. Так как $B \oplus \overline{B} \equiv_e A \oplus \overline{A}$, то $\deg_e(B) \cup \deg_e(\overline{B}) = \mathbf{a}$. То, что $\deg_e(B) \cap$ $\cap \deg_e(\overline{B}) = \mathbf{0}_e$, вытекает из теоремы 2. Так как B и $\overline{B}$ не являются в. п., имеют место $\deg_e(B) \not\leq \deg_e(\overline{B})$ и $\deg_e(\overline{B}) \not\leq \deg_e(B)$. Теперь остается применить теорему 3. □

(Из [3] следует, что в п. (2) предыдущей теоремы условие "тотальная Δ^0_2-" нельзя заменить на "Δ^0_2-".)

В свете теоремы 6 представляет интерес вопрос о том, для каких степеней $\mathbf{a} < \mathbf{b}$, если $\mathbf{b}$ тотальна, существует тотальная степень $\mathbf{c}$ такая, что $\mathbf{a} \leq \mathbf{c} < \mathbf{b}$. Ниже, в следствии 11, докажем, что ответ на этот вопрос в общем случае отрицательный: существуют Δ^0_2-степень $\mathbf{a}$ и тотальная степень $\mathbf{b} > \mathbf{a}$ такие, что ни одна тотальная степень $\mathbf{c}$ не может находиться строго между степенями $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$). Из теоремы 7 следует, что ответ на этот вопрос положителен по крайней мере для степени $\mathbf{b} = \mathbf{0}'$.

ТЕОРЕМА 7. *Пусть* $\mathbf{a} < \mathbf{0}'_e$ *— это* Δ^0_2*-е-степень. Тогда существует тотальная* Δ^0_2*-е-степень* $\mathbf{b}$ *такая, что* $\mathbf{a} \leq \mathbf{b} < \mathbf{0}'_e$*.*

Интересно отметить, что теорема 7 позволяет получить простое доказательство следующего утверждения, которое было ранее получено в [10] в результате довольно сложной конструкции; при этом мы не используем результаты предыдущих параграфов.

СЛЕДСТВИЕ 8. *Множество* $\overline{K}$ *разложимо в* Δ^0_2*-е-степенях над произвольной* Δ^0_2*-е-степенью, расположенной ниже.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть A — такое Δ^0_2-множество, что $A <_e$ $<_e \overline{K}$. По предыдущей теореме существует множество B такое, что $A <_e B$ и $B <_T K$. Разложим $\mathbf{0}'$ над $\deg_T(B)$ в тьюринговых степенях (это можно сделать с помощью релятивизованной версии теоремы Сакса о разложении, см. [11]). Ясно, что такое разложение даст и разложение $\mathbf{0}'_e$ над $\deg_e(A)$ в е-степенях. □

Теперь из теоремы 7 следует, что на самом деле можно утверждать значительно большее, а именно:

СЛЕДСТВИЕ 9. *Для любой* Δ^0_2*-е-степени* $\mathbf{a} < \mathbf{0}'$ *ромб вложим в* Δ^0_2*-е-степени с сохранением* $\mathbf{0}'_e$ *и* $\mathbf{a}$*, как наибольшего и наименьшего его элементов соответственно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Немедленно вытекает из теорем 6 и 7. □

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 7. Пусть A — такое Δ^0_2-множество, что $A <_e \overline{K}$. Чтобы $A \leq_e X \oplus \overline{X} <_e \overline{K}$ для некоторого множества X, достаточно построить X так, чтобы $A \leq_e X$ и $X <_T K$. Для этого достаточно удовлетворить требования

$$P : x \in A \leftrightarrow \exists y \, (\langle x, y \rangle \in X)$$

(это, очевидно, обеспечит $A \leq_e X$) и

$$S_e : K = \Phi^X_e \to \overline{K} = \Psi^A_e$$

(т. е. по данному тьюринговому частично вычислимому функционалу Φ_e построим оператор перечисления Ψ_e).

Стратегия удовлетворения требования P: По данному $x \in A$ на этапе s перечисляем $\langle x, y \rangle$ в X с достаточно большим y. Если позднее x покинет A, то $\langle x, y \rangle$ удаляем из X. Если позднее x снова войдет в A, то перечисляем $\langle x, y' \rangle$ в X с новым большим y', и т. д.

Стратегия удовлетворения требования S_e: для каждого x, пока $x \in \in \overline{K}$, делаем следующее.

(1) Ждем, пока $\Phi_{e,s}^{X_s}(x) \downarrow = 0$ на некотором шаге s со значением функции *use*, равным $\varphi_{e,s}(x)$. Пусть $F_x = \{y \leqslant \varphi_{e,s}(x) \mid y \in X_s\}$. Как видно из P-стратегии, для каждого $y \in F_x$ имеем $y = \langle a, b \rangle$ при некотором $a \in A_s$. Определим $F_{A,x} = \{a \mid \exists b \exists y (y \in F_x \ \& \ y = \langle a, b \rangle\}$.

(2) Перечисляем $\langle x, F_{A,x} \rangle$ в Ψ_e^A и запрещаем другим стратегиям перечислять числа из интервала $X \upharpoonright \varphi_{e,s}(x)$ в X.

Если же произойдет A-изменение на элементах множества $F_{A,x}$, то возвращаемся к п. (1).

Если позднее x войдет во множество K и снова на некотором шаге $t > s$ окажется $K(x) = \Phi_{e,t}^{X_t}(x)$, то между шагами s и t произошло $X \upharpoonright \varphi_{e,s}(x)$-изменение. Тогда некоторое $y \leqslant \varphi_{e,s}(x)$ было изъято из F_x (так как после шага s из этого интервала в множество F_x не может быть перечислено ни одно число). Значит, по P-стратегии некоторое число $a \in F_{A,x}$ покидает множество A между шагами s и t. Таким образом, либо $x \notin \Psi_e^A$, либо позднее a снова входит в A. В последнем случае можно диагонализировать $K(x)$ против $\Phi_e^X(x)$, перечислив снова в X (или удалив из X) все элементы F_x, удаленные из X (или, соответственно, перечисленные в X) между шагами s и t.

Теперь формально опишем

Построение

В процессе построения будем иметь дело с $(\omega+1)^{<\omega}$, как с *деревом выходов* T. Элементы T будут называться *строками* или *вершинами*. Если $\alpha, \beta \in S = 2^{<\omega}$, то $\mathrm{compat}(\alpha, \beta)$ означает, что либо $\alpha \subseteq \beta$, либо $\beta \subseteq \alpha$.

Каждая вершина $\sigma \in T$ будет прикреплена к требованию $S_{|\sigma|}$, и к каждой $\sigma \in T$ будет прикреплен параметр $r(\sigma)$, являющийся запретом стратегии σ. К каждой тройке (σ, F, k), где σ — вершина из T, F — конечное множество и $k \in \omega$, прикрепляем параметр $\alpha_k(\sigma, F) \in S$. Здесь $\alpha_k(\sigma, F) \in S$ является начальным сегментом, который нужен требованию $S_{|\sigma|}$ для диагонализации $\Phi^X_{|\sigma|}(k)$ против $K(k)$ в случае, если $k \in \Psi^F_e - \overline{K}$ и $F \subseteq A$. Обозначим значение $\alpha_k(\sigma, F)$ на числе x через $\alpha_k(\sigma, F, x)$.

Этап $s = 0$. Пусть $X_0 = \varnothing$, и для всех $\sigma \in T, k \in \omega$ и конечных множеств F полагаем $r(\sigma) = 0$, $\delta_0 = \alpha_k(\sigma, F) = \lambda, \Psi_{|\sigma|,0} = \varnothing$.

Этап $s + 1$. Для любого $\sigma \in T$ такого, что для некоторой пары $\langle x, y\rangle \in X_s\lceil r(\sigma)$ справедливо $x \notin A_{s+1}$, определяем $r(\sigma) = -1$ (т. е. удаляем запрет). В этом случае говорим, что запрет становится *устаревшим.*

Шаг 1 (определение δ_{s+1}). Скажем, что стратегия $\sigma \in T$ *требует внимания на этапе* $s+1$, если $\exists k \in K_{s+1} \exists F \subseteq A_{s+1}$ $(\langle x, F\rangle \in \Psi_{\sigma,s} \,\&\, \forall \tau \prec \sigma$ $(\mathrm{compat}(\alpha_k(\sigma, F), X_s\lceil r(\tau)))$ (т. е. $\alpha_k(\sigma, F)$ не угрожает нарушить запреты, связанные со стратегиями более высокого приоритета).

Теперь по индукции определим строку $\delta_{s+1} \in T$ длины $s + 1$. Пусть строка $\delta_{s+1}\lceil n$ уже определена для некоторого $n \leqslant s$. Обозначим ее через $\sigma = \delta_{s+1}\lceil n$. Полагаем $\delta_{s+1}(n) = \omega$, если либо $r(\sigma) > 0$, либо $r(\sigma) = 0$ и σ требует внимания на этапе $s + 1$. В противном случае фиксируем наименьший этап $s_0 + 1 \leqslant s$ такой, что $\delta_{s_0+1} \subseteq \sigma\hat{\ }k$ для некоторого $k \in \omega$. (Если не существует такого этапа, то полагаем $s_0 = 0$.) Теперь пусть k — наименьшее число такое, что $k \notin K_{s+1}$, и либо $\Phi^{X_s}_{n,s}(k) \uparrow \vee \Phi^{X_s}_{n,s}(k) \downarrow \neq 0$, либо $\mathrm{use}(X_t, n, k, t) \neq \mathrm{use}(X_s, n, k, s)$, либо $X_t\lceil\mathrm{use}(X_t, n, k, t) \neq X_s\lceil\mathrm{use}(X_s, n, k, s)$ для некоторого t, $s_0 \leqslant t \leqslant s$. Определяем $\delta_{s+1}(n) = k$. Инициализируем все стратегии $\sigma \succ \delta_{s+1}$ (а именно, полагаем $r(\sigma) = 0$ и $\alpha_k(\sigma, F) = \lambda$ для всех k, F).

Переопределяем $r(\sigma) = 0$ для каждой вершины $\sigma \subseteq \delta_{s+1}$, для которой $r(\sigma) = -1$ (т. е. если прежний запрет вершины σ становится устаревшим).

Шаг 2 (обновление аксиом для Ψ_σ). Пусть вершина $\sigma \subset \delta_{s+1}$ такова, что значение $\delta_{s+1}(|\sigma|) < \omega$ является максимальным среди всех возможных (конечных) значений $\delta_t(|\sigma|)$, где $\sigma \subseteq \delta_t, |\sigma| < t \leqslant s$. Для каждого $k \in \overline{K}_{s+1}\lceil s$ такого, что $k < \delta_{s+1}(|\sigma|)$ и $k \notin \Psi^{A_{s+1}}_{\sigma,s}$, определяем аксиому $\langle x, F\rangle \in \Psi_{\sigma,s+1}$, где $F = \{x : \exists y(\langle x, y\rangle \in X_s\lceil\mathrm{use}(X_s, |\sigma|, k, s))\}$. (Из определения δ_{s+1} следует, что если $\delta_{s+1}(|\sigma|) < \omega$, то $\forall x < \delta_{s+1}(|\sigma|)(\Phi^{X_s}_{|\sigma|,s}(k) \downarrow= 0)$.)

Кроме того, если $\alpha_k(\sigma, F) = \lambda$, то полагаем $\alpha_k(\sigma, F) :=$ $:= X_s \lceil \mathrm{use}(X_s, |\sigma|, k, s)$.

Шаг 3 (восстановление и запрет). Случай 1. $\exists \sigma(\sigma \subset \delta_{s+1} \,\&\, \sigma$ требует внимания $\&\, r(\sigma) = 0)$. Выбираем такую вершину $\sigma \subset \delta_{s+1}$ наименьшей длины, что σ требует внимания и $r(\sigma) = 0$. Тогда

$$\exists k \in K_{s+1} \exists F \subseteq A_{s+1}(\langle x, F\rangle \in \Psi_{\sigma,s} \& \forall \tau \prec \sigma(\mathrm{compat}(\alpha_k(\sigma, F), X_s \lceil r(\tau)))).$$

Пусть $\langle k, F\rangle$ — одна из таких пар, удовлетворяющая дополнительному условию: элементы множества F имеют наименьшее возможное число изменений в A на этапах с номером, не превосходящим s.

Определим промежуточное множество X^*:

$\forall z < |\alpha_k(\sigma, F)|\ (X^*(z) = \alpha_k(\sigma, F, z))$,

$\forall z \geqslant |\alpha_k(\sigma, F)|\ (X^*(z) = X_s(z))$.

Пусть $r(\sigma) = |\alpha_k(\sigma, F)|$. Теперь σ *получило внимание* на этапе $s + 1$.

Случай 2. Для любого $\sigma \subset \delta_{s+1}$ либо σ не требует внимания на этапе $s + 1$, либо $r(\sigma) > 0$. Тогда определим $X^* = X_s$.

Шаг 4 (определение X_{s+1}). Если $x \notin A_{s+1}$, то $X_{s+1}(\langle x, y\rangle) = 0$ для всех y. Если $x \in A_{s+1}$ и $\langle x, y\rangle < \max\{r(\sigma) : \sigma \in T\}$, то $X_{s+1}(\langle x, y\rangle) =$ $= X^*(\langle x, y\rangle)$. Если же $x \in A_{s+1}$ и $\langle x, y\rangle \geqslant \max\{r(\sigma) : \sigma \in T\}$, то $X_{s+1}(\langle x, y\rangle) = 1$.

Описание построения завершено.

Проверка

ЛЕММА 1. *Существует* $\delta = \liminf_s \delta_s$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По индукции предположим, что $\delta \lceil n = \sigma$ существует. Докажем, что если множество $V = \{s : \sigma \subset \delta_s \ \&\ \delta_s(n) < \omega\}$ бесконечно и $\lim_{s \in V} \delta_s(n) = \infty$, то $\overline{K} \leq_e A$.

Пусть s_0 — такой этап, что $\forall s \geqslant s_0$ $(\delta_s \geqslant \sigma)$. Предположим, что $k > s_0$. Если $k \in \overline{K}$, то для почти всех s имеет место $\Phi^{X_s}_{n,s}(k) \downarrow$ и $\lim_s \mathrm{use}(X_s, n, k, s) < \infty$. Таким образом, $k \in \Psi^A_\sigma$.

Если $k \in K$, то $k \notin \Psi^A_\sigma$, так как в противном случае для почти всех s, для которых $\sigma \subset \delta_s$, мы имели бы $\delta_s(n) = \omega$, что невозможно. Поэтому $\forall k > s_0$ $(k \in \overline{K} \Leftrightarrow k \in \Psi^A_\sigma)$. $\square$

ЛЕММА 2. *Существует* $X = \lim_s X_s$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\alpha_k(F, \sigma)[s]$ значение параметра $\alpha_k(F, \sigma)$ к концу этапа s. Фиксируем произвольное число $z \in \omega$. Пусть $z = \langle x, y\rangle$. Если $x \notin A$, то, очевидно, $\lim_s X_s(z) = 0$. Будем считать, что $x \in A$, и пусть s^* — этап такой, что $\forall s \geqslant s^*$ $(x \in A_s)$.

Предположим, что $\lim_s X_s(z)$ не существует. Будем говорить, что z *удаляется* на этапе $s + 1 \geqslant s^*$, если $z \in X_s - X_{s+1}$. Будем говорить также, что σ *удаляет* z на этапе $s + 1$, если на этом этапе σ получает внимание.

Пусть $U(\sigma, x, s) = \{F : \exists k \in K(\alpha_k(F, \sigma, x)[s] \downarrow = 0)\}$ — совокупность тех конечных множеств, из-за которых x может быть удален вершиной σ на этапе s.

Отметим, что если σ удаляет z на этапе $s+1 \geqslant s^*$, то $\sigma \subseteq \delta_t$ для некоторого $t \leqslant s^*$. В самом деле, если $\sigma \not\subseteq \delta_t$ для всех $t < s^*$, то z может входить в множество $F \in U(\sigma, z, u+1)$, $u > s^*$, только тогда, когда $z \notin X_u$; последнее означает, что некоторая стратегия $\tau \subseteq \delta_t$, $t \leqslant s$, запретила z. Тогда $\tau\widehat{\ }\omega \subseteq \sigma$ и, следовательно, на последующем шаге σ будет инициализировано и $U(\sigma, x, s)$ будет равным λ, так как в противном случае $\lim_s X_s(z) = 0$. Отсюда, σ не будет больше удалять z. Таким образом, существует вершина σ, принадлежащая конечному множеству $T_0 = \{\sigma : \exists t \leqslant s^*(\sigma \subseteq \delta_t)\}$ и которая удаляет z бесконечное число раз.

Ясно, что $\sigma \not<_L \delta$. Если $\delta <_L \sigma$, то σ будет инициализироваться бесконечное число раз. Поэтому для такого σ существует $\sigma' \subseteq \delta$, $\sigma' \in T_0$, такая, что σ' удаляет z бесконечное число раз. Следовательно, найдется $\sigma \subseteq \delta, \sigma \in T_0$, такая, что σ удаляет z бесконечное число раз. Пусть теперь $t > s^*$ — этап такой, что $\forall s > t$ $(\delta_s \not<_L \delta\lceil s^*)$. Ясно, что если $|\sigma| \leqslant s^*$ и $\sigma\widehat{\ }\omega \subseteq \delta$, то σ не может удалить z на этапах с номерами не меньше, чем t.

Рассмотрим все σ, удовлетворяющие условиям $|\sigma| \leqslant s^*$ и $\exists k \in$ $\in \omega(\sigma\widehat{\ }k \subseteq \delta)$. Пусть $\sigma_1 \subset \sigma_2 \subset \ldots \subset \sigma_n$ — все такие σ. Легко видеть, что если $1 \leqslant i \leqslant n$, то

$$\forall s > t \exists u > s \forall F \in U(\sigma_i, z, s) \forall v \geqslant u \ (F \not\subseteq A_v). \tag{$*$}$$

(В противном случае мы бы имели успешную диагонализацию.)

Теперь докажем, что для всех i, $1 \leqslant i \leqslant n$, существует $u_i > t$, для которого

$$\forall v \geqslant u_i \ (U(\sigma_i, z, u_i) = U(\sigma_i, z, v)). \tag{$**$}$$

Для $i = n$ это утверждение очевидно, поскольку после этапа t мы не добавляем новых элементов в множество $U(\sigma_n, z, v)$. Теперь предположим, что $(**)$ доказано для всех i', $i < i' \leqslant n$. Для того, чтобы доказать $(**)$ для i, применим утверждение $(*)$ при $s = u_{i'}$, $i < i' \leqslant n$, получая соответствующие этапы $v_{i'}$, $i < i' \leqslant n$. Пусть $v = \max\{v_i' : i < i' \leqslant n\}$. Тогда для $i < i' \leqslant n$ значение параметра $r(\sigma_{i'})$ будет равным 0, начиная с этапа v. Поэтому после этапа v в множестве $U(\sigma_i, z, s)$ не будут появляться новые элементы. Это доказывает $(**)$ для i.

Пусть теперь $s = \max\{u_i : 1 \leqslant i \leqslant n\}$. В силу $(*)$ существует такой этап $u > s$, что $\forall i \forall v \geqslant u \forall F \in U(\sigma_i, z, v)$ $(F \not\subseteq A_v)$. Последнее означает, что σ_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, не может удалить z после этапа u, получаем противоречие. □

ЛЕММА 3. *Имеет место* $A \leq_e X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, что для всех x справедливо $x \in A \Leftrightarrow \exists y \ (\langle x, y \rangle \in X)$. Действительно, если $x \notin A$, то $\forall y \ (\langle x, y \rangle \notin X)$. Пусть $x \in A$, и s^* — этап такой, что $\forall s > s^* \ (x \in A_s)$. Очевидно, что числа $\langle x, y \rangle > s^*$ не могут быть удалены из X на этапах с номером, большим, чем s^*, так как $\mathrm{use}(X_s, n, x, s) < s$ для всех s. Следовательно, любое такое число $\langle x, y \rangle > s^*$ принадлежит X. □

ЛЕММА 4. *Справедливо* $X <_T K$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, $K = \Phi_e^X$. Пусть $\sigma \subset \delta$, $|\sigma| = e$. Если $\sigma\widehat{\ }k \subset \delta$ для некоторого $k \in \omega$, то $K(k) = 0$ и $\Phi_e^X(k) \neq 0$. Если $\sigma\widehat{\ }\omega \subset \delta$, то для некоторого $k \in K$ имеем $\Phi_e^X(k) \downarrow= 0$, получаем противоречие. □

§ 3. Отрицательные результаты

Можно ли усовершенствовать изложенные выше методы, чтобы получить простое описание тех ситуаций, при которых возможны вложения ромба или разложения степеней? Как видно из следующей теоремы, это сделать довольно трудно.

ТЕОРЕМА 10. *Существует* Δ^0_2*-множество* B *такое, что* $\overline{B} <_e\ <_e B \oplus \overline{B}$ *и* $\deg_e(B \oplus \overline{B})$ *не является разложимой над е-степенью множества* $\overline{B}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нам требуется построить множество B, удовлетворяя для всех $e \in \omega$ требования

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_e:\quad & B \neq \Xi_e(\overline{B}), \\ \mathcal{N}_e:\quad & B = \Phi_e(X_e(B) \oplus Y_e(B)) \to \\ & \qquad \exists \Gamma_e, \Delta_e (B = \Gamma_e(X_e(B) \oplus \overline{B}) \vee B = \Delta_e(Y_e(B) \oplus \overline{B}), \end{aligned}$$

где $X_e(B) = \operatorname{dom}\Psi_e(B)$, $Y_e(B) = \operatorname{dom}\Theta_e(B)$ и $\{\Phi_e, \Psi_e, \Theta_e\}_{e \in \omega}$ — эффективная нумерация всех троек, состоящих из е-оператора Φ_e и тьюринговых функционалов Ψ_e, Θ_e.

Пусть $T = 3^{<\omega}$ — приоритетное дерево. Если $\sigma \in T$ и $|\sigma| = e$, то назначаем вершину σ к требованиям $\mathcal{P}_e$ и $\mathcal{N}_e$. Будем удовлетворять $\mathcal{P}_e$-требование посредством свидетеля x σ-стратегии, где $|\sigma| = e$. Далее можно выбрать новый свидетель для σ, если предыдущий свидетель оказывается инициализированным. Через x_σ обозначим активный (т. е. неинициализированный) свидетель σ (чтобы указать, что x_σ является активным свидетелем σ на этапе s, иногда будем обозначать этот свидетель через $x_{\sigma,s}$).

Для каждого свидетеля x и произвольного $\sigma \in T$ определим вес $w(x, \sigma)$ свидетеля x в вершине σ как сумму $|\sigma|$ и числа других свидетелей σ, назначенных вершине σ до того, как был назначен x.

Определим, ради удобства, $w(x, \sigma) = 0$, если x не является свидетелем σ. (Таким образом, $w(x, \sigma)$ может только однажды изменить свое значение. А именно, как только x становится свидетелем для σ, нулевое значение $w(x, \sigma)$ может измениться на ненулевое.)

Как следует из определения, для каждого $z \in \omega$ и каждой вершины σ существует только конечное число свидетелей x, для которых $w(x, \sigma) \leqslant z$.

Для удобства будем обозначать множества $\operatorname{dom} \Psi_{e,s}(Z)$ и $\operatorname{dom} \Theta_{e,s}(Z)$, где $Z \subseteq \omega$, через $X_{e,s}(Z)$ и $Y_{e,s}(Z)$ соответственно.

На каждом этапе s построения определяем строку $\delta_s \in T$ длины s, которая будет аппроксимацией истинного пути.

Построение

Этап $s = 0$. Пусть $\delta_0 = \lambda$ (λ — пустая строка). Кроме того, полагаем $B_0 = \varnothing$, $\Gamma_{\sigma,0} = \Delta_{\sigma,0} = \varnothing$ для всех $\sigma \in T$.

Этап $s+1$. Шаг 1 (определение δ_{s+1}). Предположим, что $\delta_{s+1} \restriction n = \sigma$, $n \leqslant s$, уже определено. По данным B_t, $t \leqslant s$, для каждого $\tau \in T$ и $t \leqslant s$ определяем

$$l(\tau, t) = \max\{x \leqslant t : B_t \restriction x \subseteq \Phi_{|\tau|,t}(X_{|\tau|,t}(B_t) \oplus Y_{|\tau|,t}(B_t))\}.$$

Если $l(\sigma, s+1) \leqslant \max\{x_\alpha : \sigma\hat{\ }0 \subseteq \alpha \ \vee \ \sigma\hat{\ }1 \subseteq \alpha\}$, то определяем $\delta_{s+1} \restriction (n+1) = \sigma\hat{\ }2$. В противном случае проверяем, существуют ли (инициализированные или активные) свидетели y вершины τ, $\tau \subseteq \sigma\hat{\ }1$, которые не запрещены вершинами $\alpha \prec \sigma\hat{\ }1$ и такие, что

$$w(y, \tau) > 1 + \max\{w(x, \beta) : x \in \omega \ \& \ \sigma\hat{\ }0 \subseteq \beta \subseteq \delta_t \ \& \ t \leqslant s\}, \tag{I}$$

$$\begin{gathered}(\exists \text{ конечное } F)(\exists \text{ конечное } G)[y \in \Phi_{e,s}(F \oplus G) - B_s \ \& \\ F \subseteq X_{e,s}(B_s) \cap X_{e,s}(B_s \cup \{y\}) \ \& \ G \subseteq Y_{e,s}(B_s \cup \{y\})].\end{gathered} \tag{II}$$

Если таких y нет, то полагаем $\delta_{s+1} \restriction (n+1) = \sigma\hat{\ }1$. Если есть, то полагаем $\delta_{s+1} \restriction (n+1) = \sigma\hat{\ }0$; наименьший такой y обозначим через y_σ. (Свидетель y_σ будет использоваться на шаге 2.)

Шаг 2 (удовлетворение требований). Будем говорить, что вершина $\alpha \preceq \delta_{s+1}$ требует внимания на этапе $s+1$, если выполняется одно из следующих условий.

A. Имеет место $\alpha \subseteq \delta_{s+1}$, причем активный свидетель x_α вершины α не определен (в частности, это может случиться, если α была инициализирована на предыдущем этапе).

B. Условие **A** не выполняется и $x_\alpha \in B_s \cap \Xi_{|\alpha|,s}(\overline{B}_s)$.

C. Условия **A** и **B** не выполняются, $x_\alpha \notin \Xi_{|\alpha|,s}(\overline{B}_s)$ и $x_\alpha \in B_s - \Gamma_{\sigma,s}(X_{|\sigma|,s}(B_s) \oplus \overline{B}_s)$ для некоторого $\sigma \subseteq \delta_{s+1}$ такого, что $\sigma\hat{\ }1 \subseteq \alpha$.

Выбираем $\preceq$-наименьшую вершину $\alpha \preceq \delta_{s+1}$, требующую внимания (например, δ_{s+1} требует внимания по условию **A**). Будем говорить, что вершина α *получает внимание* на этапе $s+1$.

Для каждого γ определяем

$$\tilde{\Gamma}_{\gamma,s+1} = \Gamma_{\gamma,s} \cup \{\langle x_\nu, \varnothing\rangle : \nu \succ \alpha \ \&\ \nu \supseteq \gamma \ \&\ x_\nu \in B_s\},$$

если $\gamma\hat{\ }1 \subseteq \delta_{s+1}$, в противном случае полагаем $\tilde{\Gamma}_{\gamma,s+1} = \Gamma_{\gamma,s}$. Аналогично, для каждого γ определяем

$$\tilde{\Delta}_{\gamma,s+1} = \Delta_{\gamma,s} \cup \{\langle x_\nu, \varnothing\rangle : \nu \succ \alpha \ \&\ \nu \supseteq \gamma \ \&\ x_\nu \in B_s\},$$

если $\gamma\hat{\ }0 \subseteq \delta_{s+1}$, в противном случае полагаем $\tilde{\Delta}_{\gamma,s+1} = \Delta_{\gamma,s}$.

Инициализируем все вершины ν, $\nu \succ \alpha$, так, что каждое x_ν теперь становится неопределенным.

Для того, чтобы определить B_{s+1}, $\Gamma_{\gamma,s+1}$ и $\Delta_{\gamma,s+1}$ для всех $\gamma \in T$, выполняем одно из следующих действий, в зависимости от того, какое из условий **A**, **B** или **C** имеет место для α.

Пусть выполняется условие **A**. Если строка α не содержит символ 0, то назначаем достаточно большой свидетель x_α и определяем $\Gamma_{\gamma,s+1} = \tilde{\Gamma}_{\gamma,s+1}$, $\Delta_{\gamma,s+1} = \tilde{\Delta}_{\gamma,s+1}$ для каждого $\gamma \in T$. В противном случае пусть σ — $\subseteq$-наибольшая вершина такая, что $\sigma\hat{\ }0 \subseteq \alpha$. Полагаем $x_\alpha = y_\sigma$, где y_σ — свидетель, определенный на шаге 1. Отметим, что из определения веса вершины следует

$$w(x_\alpha, \alpha) \leqslant 1 + \max\{w(x, \beta) : x \in \omega \ \&\ \sigma\hat{\ }0 \subseteq \beta \subseteq \delta_t \ \&\ t \leqslant s\},$$

и, таким образом, $w(x_\alpha, \alpha) < w(x_\alpha, \tau)$, где τ — вершина из (I). Пусть F, G и $u > y_\sigma$ удовлетворяют следующим условиям:

$$y_\sigma \in \Phi_{e,s}(F \oplus G),$$

$$F \subseteq X_{e,s}(B_s \upharpoonright u) \cap X_{e,s}((B_s \cup \{y\}) \upharpoonright u),$$

$$G \subseteq Y_{e,s}((B_s \cup \{y\}) \upharpoonright u).$$

Определяем $\Gamma_{\gamma,s+1} = \tilde{\Gamma}_{\gamma,s+1}$, где $\gamma \in T$, $\Delta_{\gamma,s+1} = \tilde{\Delta}_{\gamma,s+1}$, где $\gamma \neq \sigma$, и $\Delta_{\sigma,s+1} = \tilde{\Delta}_{\sigma,s+1} \cup \{\langle x_\alpha, G \oplus (\overline{B_s \cup \{x_\alpha\}} \upharpoonright u)\rangle\}$. Запрещаем отрезок $B_s \upharpoonright u$ с приоритетом α.

В обоих случаях полагаем $B_{s+1} = B_s \cup \{x_\alpha\}$.

Пусть выполняется условие **B**. Пусть $B_{s+1} = B_s - \{x_\alpha\}$. Тогда определяем $\Gamma_{\gamma,s+1} = \tilde{\Gamma}_{\gamma,s+1}$ и $\Delta_{\gamma,s+1} = \tilde{\Delta}_{\gamma,s+1}$ для каждого $\gamma \in T$.

Пусть выполняется условие **C**. Выбираем $\subseteq$-наименьшую вершину σ, удовлетворяющую **C**. Пусть v — достаточно большое число такое, что

$$x_\alpha \in \Phi_{|\sigma|,s+1}(X_{|\sigma|,s}(B_s \upharpoonright v) \oplus Y_{|\sigma|,s}(B_s \upharpoonright v)).$$

Тогда $\Gamma_{\gamma,s+1} = \tilde{\Gamma}_{\gamma,s+1}$ при $\gamma \neq \sigma$, $\Gamma_{\sigma,s+1} = \tilde{\Gamma}_{\sigma,s+1} \cup \{\langle x_\alpha, X_{|\sigma|,s}(B_s) \oplus (\overline{B_s} \upharpoonright v)\}\rangle$ и $\Delta_{\gamma,s+1} = \tilde{\Delta}_{\gamma,s+1}$ для всех $\gamma \in T$. Запрещаем отрезок $B_s \upharpoonright v$ с приоритетом α. Переходим к этапу $s+2$.

Описание построения завершено.

Пусть $\delta = \liminf_s \delta_s$ и $B = \lim_s B_s$. (Из построения следует, что $\lim_s B_s$ существует, так как если свидетель x вершины τ назначается свидетелем вершины α, то $w(x,\alpha) < w(x,\tau)$ и τ инициализируется на этом этапе. Более того, можно эффективно ограничить число возможных изменений в B_s. Таким образом, B является ω-в. п. множеством.)

Чтобы доказать, что все требования выполнены, нам потребуется следующая техническая лемма. Выражение $\alpha \prec \delta$ означает, что $\alpha \prec \delta \upharpoonright n$ для некоторого n.

ЛЕММА 1. *Каждая вершина $\alpha \prec \delta$ получает внимание не более конечного числа раз.* (*Следовательно, каждое $\alpha \prec \delta$ создает конечный запрет и ни одна $\alpha \prec \delta$ не инициализируется бесконечное число раз.*)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $T' = \{\sigma \prec \delta : \exists s\ [\sigma \subseteq \delta_s]\}$. Отношение $\prec$ вполне упорядочивает множество $T' \subseteq T$, так как для каждого $\tau \prec \delta$ существует только конечное число $\sigma \in T'$ таких, что $\sigma \prec \tau$.

Отметим, что вершина σ может получить внимание на этапе s только тогда, когда $\sigma \subseteq \delta_t$ для некоторого $t \leqslant s$. Таким образом, лемма верна для $\sigma \in T - T'$.

Случай $\sigma \in T'$ рассматривается с помощью индукции относительно $\prec$. Предположим, что лемма верна для каждого $\alpha' \prec \alpha$, $\alpha \in T'$. Фиксируем этап s_0 такой, что $\alpha \preceq \delta_s$ для всех $s \geqslant s_0$. Выберем этап $t_0 \geqslant s_0$ такой, что ни для какого $t \leqslant s_0$ не существует вершины $\alpha' \prec \alpha$, $\alpha' \subseteq \delta_t$, получающей внимание на этапах $s \geqslant t_0$. Теперь α может получить внимание после этапа t_0 не более трех раз (в соответствии с условиями **A**, **B** и **C**). $\square$

ЛЕММА 2. *Каждое требование $\mathcal{P}_e$, $e \in \omega$, выполняется.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\alpha \subset \delta$ — строка длины e. Применяя предыдущую лемму, фиксируем наименьший этап s_0 такой, что α не инициализируется на этапах с номерами, не меньше, чем s_0. Пусть x_α — окончательный активный свидетель вершины α (он обязательно должен быть назначен после этапа s_0.) Теперь $x_\alpha \in B$, если не найдется этапа $s \geqslant s_0$ такого, что $x_\alpha \in \Xi_{e,s}(\overline{B}_s)$ и $\alpha \preceq \delta_s$. А в этом случае по построению $x_\alpha \in \Xi_e(\overline{B}) - B$. $\square$

ЛЕММА 3. *Каждое требование* $\mathcal{N}_e$, $e \in \omega$, *выполняется.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждого этапа s определим в. п. множество $U_s = \{x : \exists t > s\ [B_s(x) \neq B_t(x)]\}$. Легко видеть, что $U_{s+1} \subseteq U_s$, $\bigcap_s U_s = \varnothing$ и $B_s \subseteq^* U_s$.

Пусть $\sigma \subset \delta$ — строка длины e. Выберем $i < 3$ такое, что $\sigma\widehat{\ }i \subset \delta$. Пусть m — максимум всех запретов, создаваемых стратегиями $\alpha \prec \sigma\widehat{\ }i$. Фиксируем наименьший этап s_0 такой, что $\sigma\widehat{\ }i$ не инициализируется на этапах с номерами, не меньше, чем s_0, и $U_{s_0} \subseteq (m, +\infty)$. Если $i = 2$, то $B - \Phi_e(X_e(B) \oplus Y_e(B)) \neq \varnothing$, и требование $\mathcal{N}_e$ выполняется.

Предположим теперь, что $i < 2$ и $B = \Phi_e(X_e(B) \oplus Y_e(B))$. Рассмотрим сначала случай $i = 0$. Рассмотрим импликацию $B \leq_e Y_e(B) \oplus \overline{B}$ покажем, что для всех $x \in U_{s_0}$

$$x \in B \Leftrightarrow x \in \Delta_\sigma(Y_e(B) \oplus \overline{B}).$$

Импликация ($\Rightarrow$) непосредственно следует из построения. Рассмотрим импликацию ($\Leftarrow$). Предположим, что существует вершина β такая, что $x = x_{\beta,s} \in U_{s_0}$ и

$$x \in \Delta_\sigma(Y_e(B) \oplus \overline{B}) - B$$

для некоторого $s > s_0$. Найдем $\prec$-наименьшую вершину β с этим свойством. Из условия (II) и определения Δ_σ следует, что

$$x \in \Phi_e(F \oplus G),\ \ F \subseteq X_e(B),\ \ G \subseteq Y_e(B).$$

(Если ответы на вопросы к оракулу B, использованные при вычислении X_e и Y_e, будут изменены некоторым $x_{\gamma,t}$, $\gamma \prec \alpha$, то $x_{\gamma,t} \in U_{s_0} \cap \Delta_\sigma(Y_e(B) \oplus \oplus \overline{B}) - B$ для некоторого $t > s_0$. В самом деле, интересующие нас элементы $\overline{B}$ защищены от попадания в B, поскольку они используются при вычислении $\Delta_e(x)$. Это означает, что изменения в X_e и Y_e могут быть вызваны только удалением из B свидетеля некоторой вершины $\gamma \prec \beta$.) Поэтому $x \in \Phi_e(X_e(B) \oplus Y_e(B))$, что невозможно.

Предположим, наконец, что $i = 1$. Пусть z — наибольшее число, использованное в построении на этапах $s' \leqslant s$. В соответствии с построением свидетель x вершины α может быть позднее назначен свидетелем другой вершины τ только тогда, когда $\tau \prec \alpha$. Обозначим через $\mathrm{Node}(x)$ $\prec$-наименьшую вершину τ такую, что x является свидетелем τ. Тогда число $w(x) =_{\mathrm{dfn}} w(x, \mathrm{Node}(x))$ назовем *окончательным весом* свидетеля x. Пусть $w = \max_{x \leqslant z} w(x)$.

Как немедленно следует из перечисленных свойств весов свидетелей, множество $\{x : w(x) \leqslant w\}$ конечно. Поэтому можно фиксировать этап $s_1 \geqslant s_0$ такой, что $w(y) > w$ для всех $y \in U_{s_1}$. Отсюда, каждый свидетель $y \in U_{s_1}$ удовлетворяет условию (I) из построения в вершине σ.

Теперь остается доказать, что для всех $x \in U_{s_1}$

$$x \in B \Leftrightarrow x \in \Gamma_\sigma(X_e(B) \oplus \overline{B}).$$

Необходимость немедленно следует из построения. Для доказательства достаточности, предположим существование $x \in U_{s_1}$ такого, что $x \in \Gamma_\sigma(X_e(B) \oplus \overline{B}) - B$. Пусть F и G — конечные множества такие, что $F \subseteq X_e(B)$, $H \subseteq \overline{B}$ и $\langle x, F \oplus G\rangle \in \Gamma_\sigma$. Тогда, используя определение Γ_σ, по тем же причинам, что и в случае $i = 0$, получаем $F \subseteq X_e(B \cup \{x\})$, $G \subseteq Y_e(B \cup \{x\})$ и $\langle x, F \oplus G\rangle \in \Phi_e$ для некоторого конечного множества G. Следовательно, для вершины σ имеет место условие (II) из построения. Тогда существует такой этап $s > s_0$, что $\sigma\widehat{\ }0 \subseteq \delta_s$. Это противоречит выбору s_0. Лемма 3, а вместе с ней и теорема 10 доказаны. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 11. *Существуют такие тотальная е-степень* $\mathbf{b}$ *и* Δ^0_2*-е-степень* $\mathbf{a} < \mathbf{b}$*, что ни для какой тотальной е-степени* $\mathbf{c}$ *не имеет места* $\mathbf{a} \leq \mathbf{c} < \mathbf{b}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Немедленно следует из теорем 10 и 6. $\square$

Нис и Сорби [12] получили ряд других результатов, имеющих отношение к вопросам вложимости в Σ^0_2-степени перечислимости. В частности они показали, что каждая неполная Σ^0_2-е-степень является нетривиальным образом ветвящейся под е-степенью $\mathbf{0}'_e$. В [3] получен ряд новых отрицательных результатов, в частности, было показано существование такой е-степени $\mathbf{a} < \mathbf{0}'$, что ромб не вложим в интервал е-степеней $[\mathbf{a}, \mathbf{0}'_e]$ с сохранением наибольшего и наименьших элементов. Этот факт показывает, что утверждения теоремы 6 и следствия 9 невозможно усилить.

В заключение рассмотрим открытые проблемы, которые представляют интерес с точки зрения теоремы 7.

ВОПРОС 12. Является ли упорядочение n-в. п. е-степеней плотным для каждого $n \geqslant 3$? Является ли упорядочение ω-в. п. е-степеней плотным?

Положительный ответ на следующий частный вопрос позволил бы получить отрицательный ответ на вопрос 12.

ВОПРОС 13. Пусть $\mathbf{a} < \mathbf{0}'_e$ — это ω-в. п. е-степень. Существует ли тотальная ω-в. п. е-степень $\mathbf{b}$ такая, что $\mathbf{a} \leq \mathbf{b} < \mathbf{0}'_e$?

В самом деле, пусть $D <_T \varnothing'$ — это d-в. п. множество, для которого не существует ω-в. п. множества C такого, что $D <_T C <_T \varnothing'$ (построенного в [13]). Тогда, в случае положительного ответа на вопрос 13, 3-в. п. множество $D \oplus \overline{D}$ имело бы е-степень, максимальную среди ω-в.п. е-степеней ниже $\mathbf{0}'_e$. Действительно, $D \oplus \overline{D} <_e \overline{K}$. Предположим существование ω-в. п. множества C такого, что $D \oplus \overline{D} <_e C <_e \overline{K}$. Тогда, если бы ответ на вопрос 13 был положительным, существовало бы ω-в. п. множество X такое, что $C <_e X \oplus \overline{X} <_e \overline{K}$. Отсюда, $D \oplus \overline{D} <_e X \oplus \overline{X} <_e \overline{K}$ и $D <_T X <_T K$, что противоречит выбору множества D.

Из теоремы 7 следует, что ответ на вопрос 13 положителен по крайней мере для Δ_2^0-степеней по перечислимости.

ЛИТЕРАТУРА

1. *C. G. Jockusch, Jr.*, Semirecursive sets and positive reducibility, Trans. Am. Math. Soc., **131**, N 2 (1968), 420—436.
2. *S. Ahmad*, Embedding the diamond in the Σ_2 enumeration degrees, J. Symb. Log., **56**, N 1 (1991), 195—212.
3. *S. Ahmad, A. H. Lachlan*, Some special pairs of Σ_2 e-degrees, Math. Log. Q., **44**, N 4 (1998), 431—449.
4. *M. M. Arslanov, S. B. Cooper, I. Sh. Kalimullin, A. Li*, Total degrees and non-splitting properties of Σ_2^0-enumeration degrees, в печати.
5. *S. B. Cooper, C. S. Copestake*, Properly Σ_2 enumeration degrees, Z. Math. Logik Grundlagen Math., **34**, N 6 (1988), 491—522.
6. *S. B. Cooper*, Enumeration reducibility, nondeterministic computations and relative computability of partial functions, in: Recursion Theory Week, K. Ambos-Spies, G. Müller, and G. E. Sacks (ed.) (Lect. Notes Math., **1432**), 1990, 57—110.
7. *A. Sorbi*, The enumeration degrees of the Σ_2^0 sets, in: Complexity, Logic and Recursion Theory, A. Sorbi (ed.), New York, Marcel Dekker, 1997, 303—330.
8. *P. G. Odifreddi*, Classical Recursion Theory, v. II (Studies Logic Found. Math., **143**), Amsterdam, North-Holland, 1999.
9. *A. Sorbi*, Sets of generator and automorphism bases for the enumeration degrees, Ann. Pure Appl. Log., **94**, N 1—3 (1998), 263—272.
10. *M. M. Arslanov, A. Sorbi*, Relative splittings of $\mathbf{0}'_e$ in the Δ_2^0-enumeration degrees, in: Logic Colloquium 98, Buss S. and Pudlak P. (ed.) (Lect. Notes Log., **13**), Berlin a. o., Springer-Verlag, 2000, 44—56.
11. *R. I. Soare*, Recursively Enumerable Sets and Degrees (Perspect. Math. Log., Omega Series), Heidelberg a. o., Springer-Verlag, 1987. (имеется русский перевод: *Р. И. Соар*, Вычислимо перечислимые множества и степени, Казань, Казанское матем. об-во, 2000.)
12. *A. Nies and A. Sorbi*, Branching in the enumeration degrees of the Σ_2^0 sets, в печати.

13. *S. B. Cooper, L. Harrington, A. H. Lachlan, S. Lempp, R. I. Soare*, The d-*r. e.* degrees are not dense, Ann. Pure Appl. Logic, **55**, N 2 (1991), 125—151.

Поступило 30 января 2001 г.

Адреса авторов:

АРСЛАНОВ Марат Мирзаевич,
РОССИЯ,
г. Казань,
Кремлевская, д. 18,
Казанский гос. университет,
кафедра алгебры.
e-mail: Marat.Arslanov@ksu.ru

COOPER S. Barry
School of Mathematics
University of Leeds
Leeds LS2 9JT
United Kingdom

КАЛИМУЛЛИН Искандер Шагитович,
РОССИЯ,
г. Казань,
Университетская, д. 17,
НИИ математики и механики
им. Н. Г. Чеботарева
при Казанском гос. университете,
отдел алгебры и матем. логики.
e-mail: Iskander.Kalimullin@ksu.ru