Н. С. Черников, О группах с дополняемыми бесконечными абелевыми подгруппами,

*Матем. заметки*, 1980, том 28, выпуск 5, 665–674

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 28, № 5 (1980)

# О ГРУППАХ С ДОПОЛНЯЕМЫМИ БЕСКОНЕЧНЫМИ АБЕЛЕВЫМИ ПОДГРУППАМИ

Н. С. Черников

Известно, что если в группе дополняемы все подгруппы, то она локально конечна (см. [1]). Более того, для локальной конечности группы достаточно, чтобы в ней были дополняемы только абелевы подгруппы (см. [2]) или даже только циклические подгруппы (см. [3]). В связи с результатами работ [1] — [3] естественно возник следующий вопрос [4, вопрос 5.62].

Будет ли локально конечной группа, содержащая бесконечные абелевы подгруппы, при условии, что все они дополняемы в ней?

Автор настоящей работы показал, что в классе бинарно конечных групп этот вопрос решается утвердительно, т. е. что всякая бинарно конечная группа с дополняемыми бесконечными абелевыми подгруппами локально конечна (см. [5], [6]). Однако, как показывает теорема 1 настоящей работы, в общем случае ответ на приведенный вопрос отрицателен. Более того, из этой теоремы следует, что периодическая группа, содержащая бесконечные абелевы подгруппы, может не быть локально конечной при условии дополняемости в ней всех нециклических абелевых подгрупп или даже абелевых подгрупп непростых порядков. Отметим, что локально конечные группы, в которых дополняемы абелевы нециклические подгруппы, и локально конечные группы с дополняемыми абелевыми подгруппами непростых порядков описаны в [7], [8], а локально конечные группы с дополняемыми элементарными абелевыми подгруппами непростых порядков — в [9], [10].

Дадим необходимые определения и сформулируем известные результаты, которые нам потребуются в дальнейшем.

Пусть

$$\{G_i \mid i \in I\} \tag{1}$$

— семейство групп, где $I$ конечное или бесконечное множество индексов, и

$$G = \prod\nolimits_{i \in I}^{*} G_i \tag{2}$$

— свободное произведение групп семейства (1).

Определение 1 (см. [11, стр. 8], а также [12, стр. 745, примечание]). Пусть никакая группа семейства (1) не содержит инволюций (т. е. элементов порядка 2). Тогда периодическим произведением нечетного показателя $n$ семейства групп (1) называется группа $F$, получающаяся в результате добавления к соотношениям свободного произведения (2) всех определяющих соотношений вида

$$a^n = 1 \qquad (a \in G), \tag{3}$$

где $a$ есть элементарный период ранга $\alpha \geqslant 1$, и при этом слово $a^n$ входит в некоторое слово из $\mathcal{M}_{\alpha-1}$. Периодическое произведение групп семейства (1) обозначается через $\prod\nolimits_{i \in T}^{n} G_i$.

Определение элементарного периода ранга $\alpha \geqslant 1$ и множества $\mathcal{M}_{\alpha-1}$ можно найти в монографии [13].

В дальнейшем, когда речь пойдет о периодическом произведении показателя $n$ какого-либо семейства групп, всегда будет подразумеваться, что группы этого семейства не содержат инволюций и что число $n$ нечетно.

Определение 2 (см. [14, стр. 474]). Пусть задан класс абстрактных групп (т. е. изоморфные группы отождествлены) и операция $\circ$, которая сопоставляет всякому (не обязательно конечному) семейству групп $G_\alpha$ (не обязательно различных), $\alpha \in I$, вполне определенную группу $G = \prod\nolimits_{\alpha \in I}^{\circ} G_\alpha$.

Операция $\circ$ называется точной, если для всех $\alpha \in I$ заданы мономорфизмы $\varphi_\alpha$: $G_\alpha \to G$, причем группа $G$ порождается своими подгруппами $G_\alpha \varphi_\alpha$.

Определение 3. Группа $G$ вида $H \leftthreetimes K$, где $H \neq 1$, $K \neq 1$, называется группой Фробениуса с инвариантным множителем $H$ и дополнительным множителем $K$, если для любого $1 \neq x \in H$ имеет место равенство

$$x^{-1}Kx \cap K = 1. \tag{4}$$

Предложение 1 (см., например, [14, стр. 459—460]). *Пусть* $\prod_{i \in I} G_i$ *— прямое произведение групп семейства* (1). *Тогда отображение* $\varphi$, *сопоставляющее всякому элементу* $g_i \in G_i$ $(i \in I)$ *свободного произведения* $\prod^*_{i \in I} G_i$ *тот же самый элемент в группе* $\prod_{i \in I} G_i$ *и любому произведению элементов в* $\prod^*_{i \in I} G_i$ *соответствующее произведение образов в* $\prod_{i \in I} G_i$, *является гомоморфизмом свободного произведения* $\prod^*_{i \in I} G_i$ *на прямое произведение* $\prod_{i \in I} G_i$.

В силу предложения 1 в свободном произведении $G = \prod^*_{i \in I} G_i$ найдется нормальный делитель $N$ (а именно, ядро отображения $\varphi$), для которого выполняются соотношения

$$G_i \cap N = 1 \quad (i \in I), \tag{5}$$

$$G/N = \prod_{i \in I} G_i N/N. \tag{6}$$

Предложение 2 (см. [11, теорема 3]). *Операция периодического умножения групп (не содержащих инволюций) при (нечетных)* $n \geqslant 665$ *является точной операцией. Она обладает свойством наследственности по подгруппам (постулат Мальцева).*

Ввиду предложения 2 никакой отличный от единицы элемент $g_i$ произвольной группы $G_i$ семейства (1) не обращается в единицу в периодическом произведении $F = \prod^n_{i \in I} G_i$.

Гомоморфизм группы $G = \prod^*_{i \in I} G_i$ на группу $F = \prod^n_{i \in I} G_i$, сопоставляющий всякому элементу $g_i \in G_i$ $(i \in I)$

свободного произведения $\prod_{i\in I}^{*} G_i$ тот же самый элемент в группе $\prod_{i\in I} G_i$ $(n \geqslant 665)$, обозначим через $\psi$, а его ядро — через $H$.

Предложение 3 (см. [11, теорема 4]). *Операция периодического умножения показателя $n$ при $n \geqslant 665$ коммутативна и ассоциативна.*

Предложение 4 (см. [11, теорема 6], [12, стр. 745, примечание]). *Пусть $F$ — периодическое произведение показателя $n \geqslant 665$ семейства* (1), *состоящего не менее чем из двух неединичных групп $G_i$. Тогда группа $F$ бесконечна.*

Предложение 5 (см. [11, теорема 7]). *Пусть $F$ — периодическое произведение показателя $n \geqslant 665$ групп семейства* (1). *Если неединичный элемент $x$ группы $F$ сопряжен некоторому элементу $y$ одной из подгрупп $G_i$ группы $F$, то всякий перестановочный с $x$ элемент группы $F$ принадлежит той же сопряженной с $G_i$ подгруппе $h^{-1}G_ih$, которой принадлежит $y$.*

Предложение 6 (см. [11, теорема 8]). *Пусть $F$ — периодическое произведение показателя* (*нечетного*) *$n \geqslant 665$ семейства групп* (1). *Если коммутативная подгруппа $F_1$ группы $F$ не содержится ни в одной из подгрупп $h^{-1} G_ih$, сопряженных подгруппам $G_i$, то $F_1$ есть циклическая группа, прорядок которой делит $n$.*

Перейдем теперь к изложению результатов, установленных автором настоящей работы.

ЛЕММА 1. *Если экспонента всякой группы семейства* (1) *делит* (*нечетное*) *число $n \geqslant 665$, то в их периодическом произведении $F = \prod_{i\in I}^{n} G_i$ показателя $n$ найдется нормальный делитель $M$, для которого выполняются соотношения*

$$G_i \cap M = 1 \qquad (i \in I), \tag{7}$$

$$F/M = \prod_{i\in I} G_i \cdot M/M. \tag{8}$$

Доказательство. Пусть $N$ — нормальный делитель свободного произведения $G = \prod_{i\in I}^{*} G_i$, для которого выполняются условия (5), (6). Так как экспонента всякой группы $G_i$ ($i \in I$) делит показатель $n$, то отсюда следует, что и экспонента группы

$$G/N = \prod_{i \in I} G_i N/N$$

делит показатель $n$. В силу этого всякий элемент группы $G$ вида $x^n$, где $x \in G$, очевидно, содержится в $N$, и потому определенный выше нормальный делитель $H$ (см. предложение 2) содержится в $N$. Так как $H \subset N$, то нетрудно проверить, что $\psi^{-1}\varphi$ (см. предложения 1, 2) есть гомоморфизм группы $F$ на группу $\prod_{i \in I} G_i$. Легко убедиться, что при этом гомоморфизме всякому элементу $g_i \in \in G_i$ ($i \in I$) периодического произведения $F$ соответствует тот же самый элемент в группе $\prod_{i \in I} G_i$. Пусть $M$ — ядро гомоморфизма $\psi^{-1}\varphi$. Очевидно, для $M$ выполняются соотношения (7) и (8). Лемма доказана.

С л е д с т в и е. *Если при условиях леммы* 1 *по крайней мере две группы семейства* (1) *отличны от единицы, то периодическое произведение $F$ является группой Фробениуса, дополнительным множителем которой является произвольная неединичная группа $G_j$ ($j \in I$) семейства* (1), *а инвариантным множителем — подгруппа $R$, порожденная группами семейства $\{G_i \mid i \in I \setminus j\}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ввиду леммы 1 $G = R \leftthreetimes G_j$.

Пусть $h \neq 1$ — произвольный элемент подгруппы $R$. Покажем, что

$$h^{-1}G_j h \cap G_j = 1.$$

В самом деле, допустим, что

$$a \in h^{-1}G_j h \cap G_j$$

и $a \neq 1$. Тогда, очевидно, $a = h^{-1}b^{-1}h$, где $b \in G_j$, и потому

$$[h, b] = h^{-1}b^{-1}hb = ab. \tag{9}$$

Следовательно, ввиду соотношения (9) $[h, b] \in G_j$. Однако, так как подгруппа $R$ инвариантна в $F$ и $h \in R$, то, очевидно, $[h, b] \in R$. Отсюда вытекает, что $[h, b] = 1$. Тогда ввиду предложения 5 элемент $h$ должен быть сопряжен некоторому элементу группы $G_j$, что невозможно. Следствие доказано.

Заметим, что если экспонента групп $\{G_i \mid i \in I\}$ не ограничена, то заключение следствия может оказаться неверным. Так, например, если $p$ — простое число и $p \geqslant 665$, то периодическое произведение $F = G_1^p G_2$ показателя $p$ двух квазициклических $p$-групп $G_1$ и $G_2$ является простой группой (это вытекает из [12, теорема 1]). Отметим еще, что, как вытекает из предложений 5 и 6, подгруппа $G_1$ совпадает со своим нормализатором в $F$ и взаимно проста со своими сопряженными подгруппами. Этот пример опровергает следующую гипотезу, высказанную О. Ю. Шмидтом в 1947 г. (см. [21]): если подгруппа $H$ периодической группы $G$ совпадает со своим нормализатором, взаимно проста со своими сопряженными подгруппами и отлична от своего коммутанта, то $G$ не проста.

Из полученного следствия непосредственно вытекает следующее

Предложение. *Для любых двух неединичных периодических групп без элементов порядка 2 $G_1$ и $G_2$ конечной экспоненты $n$ существует периодическая группа Фробениуса вида $R \rtimes G_2$, где $R \supset G_1$, экспонента которой конечна и делится на $n$.*

Известно, что локально конечные группы Фробениуса всегда непримарны, инвариантные множители в них нильпотентны, а в их дополнительных множителях все абелевы подгруппы локально циклические (см. [15] — [19]). В частности, дополнительный множитель локально конечной группы Фробениуса конечен или счетен. Из установленного выше предложения сразу же вытекает, что ни одно из указанных свойств дополнительного и инвариантного множителей в случае произвольных периодических групп Фробениуса не выполняется.

Далее условимся говорить, что если в группе $G$ нет подгрупп со свойством $\alpha$, то все подгруппы со свойством $\alpha$ дополняемы.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть для групп семейства* (1) *выполняется одно из следующих условий*:

1) *в любой группе $G_i$ ($i \in I$) дополняемы все бесконечные абелевы подгруппы*;

2) *в любой группе $G_i$ ($i \in I$) дополняемы все нециклические абелевы подгруппы*;

3) *в любой группе* $G_i$ $(i \in I)$ *дополняемы все абелевы подгруппы непростых порядков.*

*Тогда, если экспонента всякой группы* $G_i$ $(i \in I)$ *делит некоторое нечетное число* $n \geqslant 665$ *и при этом среди групп* $G_i$ *есть по крайней мере две неединичные группы, то периодическое произведение* $F = \prod_{i \in I}^{n} G_i$ *показателя является нелокально конечной периодической группой экспоненты* $n$ *и имеют место соответственно следующие утверждения:*

1') *в группе* $F$ *дополняемы все бесконечные абелевы подгруппы;*

2') *в группе* $F$ *дополняемы все нециклические абелевы подгруппы;*

3') *если* $n$ *— простое число, то в группе* $F$ *дополняемы все абелевы подгруппы непростых порядков.*

Доказательство. Пусть $G_j$, $G_k$ $(j \neq k)$ — отличные от единицы группы семейства (1), $g_j \in G_j$, $g_k \in G_k$ — отличные от единицы их элементы. Тогда ввиду предложения 2

$$\langle g_j, g_k \rangle \simeq \langle g_j \rangle^n \langle g_k \rangle \tag{10}$$

(здесь $\langle g_j, g_k \rangle$ — подгруппа группы $F$, порожденная элементами $g_j$ и $g_k$, $\langle g_j \rangle^n \langle g_k \rangle$ — периодическое произведение групп $\langle g_j \rangle$ и $\langle g_k \rangle$).

Ввиду соотношения 10 и предложения 4 подгруппа $\langle g_j, g_k \rangle$ бесконечна. Следовательно, $F$ не локально конечная группа.

Пусть выполняется одно из условий 1) — 3), и пусть абелева подгруппа $A$ группы $F$ будет соответственно:

1) бесконечной абелевой группой,

2) нециклической абелевой группой,

3) абелевой группой непростого порядка.

Из предложения 6 вытекает, что подгруппа $A$ сопряжена некоторой подгруппе $G_s$ семейства (1). Ввиду следствия леммы 1

$$F = R \leftthreetimes G_s = R \leftthreetimes h^{-1} G_s h,$$

где

$$h^{-1} G_s h \supset A.$$

В силу одного из условий 1) — 3) подгруппа $A$ дополняема в группе $h^{-1} G_s h$. Пусть $D$ — дополнение к ней. Нетрудно убедиться, что подгруппа $R \cdot D$ дополняет подгруппу $A$ в $F$. Теорема доказана.

Простейшими примерами нелокально конечных групп, в которых дополняемы бесконечные абелевы подгруппы, будут периодические произведения вида

$$A^{p^k}\langle b\rangle,$$

где $p$ — любое простое число, отличное от 2, $p^k > 665$, $A$ — бесконечная элементарная абелева $p$-группа, $\langle b\rangle$ — группа порядка $p$. При $p = 3$ получаем пример 3-группы с дополняемыми бесконечными абелевыми подгруппами. Для 2-групп верна

ТЕОРЕМА 2. *Всякая 2-группа $K$ с дополняемыми бесконечными абелевыми подгруппами локально конечна.*

Доказательство. Очевидно, можно предполагать, что группа неэкстремальна. Покажем, что она не содержит элементов порядка 4. В самом деле, пусть $a$ элемент порядка 4 группы $K$. Так как группа $K$ неэкстремальна, то ввиду результатов работы [20] всякая максимальная элементарная абелева подгруппа группы $K$ бесконечна. Поэтому бесконечна всякая максимальная элементарная абелева подгруппа группы $K$, содержащая элемент $a^2$, и, следовательно, централизатор $C_G(\langle a^2\rangle)$ неэкстремален. Так как группа $C_G(\langle a^2\rangle)$ неэкстремальна, то и фактор-группа $C_G(\langle a^2\rangle) / \langle a^2\rangle$ неэкстремальна. Из результатов работы [20] снова вытекает, что группа $C_G(\langle a^2\rangle) / \langle a^2\rangle$ обладает неэкстремальной абелевой подгруппой $B / \langle a^2\rangle$, содержащей подгруппу $\langle a\rangle / \langle a^2\rangle$. Поскольку подгруппа $\langle a\rangle$, очевидно, инвариантна в группе $B$, то индекс ее централизатора $C_B(\langle a\rangle)$ в $B$ конечен. В силу этого централизатор $C_B(\langle a\rangle)$ неэкстремален, и, значит, некоторая его максимальная абелева подгруппа $C$ неэкстремальна (см. [20]). Очевидно, $C \supset a$.

Пусть $C_1$ — нижний слой группы $C$. Подгруппа $C_1$, как нетрудно видеть, бесконечна и потому дополняема в группе $C_1 \cdot \langle a\rangle$. Но в таком случае $C_1 \cdot \langle a\rangle$ — элементарная абелева подгруппа, и потому элемент $a$ имеет порядок 2. Полученное противоречие доказывает, что в группе $K$ все отличные от единицы элементы имеют порядок 2. Следовательно, $K$ — элементарная абелева группа. Теорема доказана.

Фактически мы показали здесь, что всякая неэкстремальная 2-группа с дополняемыми бесконечными подгруппами является элементарной абелевой группой.

Институт математики
АН УССР

Поступило
30.X.1978

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Баева Н. В., Вполне факторизуемые группы, Докл. АН СССР, 92, № 5 (1953), 877—880.
[2] Каргаполов М. И., Некоторые вопросы теории нильпотентных и разрешимых групп, Докл. АН СССР, 127, № 6 (1959), 1164—1166.
[3] Горчаков Ю. М., Примитивно факторизуемые группы, Уч. зап. Пермского ун-та, **17** (1960), 15—31.
[4] Коуровская тетрадь (нерешенные задачи теории групп), Новосибирск, Институт математики СО АН СССР, 1976.
[5] Черников Н. С., Группы с условиями минимальности для недополняемых абелевых подгрупп, Докл. АН СССР, **223**, № 4 (1975), 797—798.
[6] Черников Н. С., Локально конечные $\omega\sigma A$-факторизуемые группы, Сб., Исследования по теории групп, Киев, Институт математики АН УССР, 1976, 63—110.
[7] Зуб О. Н., Группы, нециклические подгруппы которых дополняемы, Сб., Группы с ограничениями для подгрупп, Киев, «Наукова думка», 1971, 134—158.
[8] Зайцев Д. И., Зуб О. Н., Группы с дополняемыми абелевыми подгруппами непростых порядков, Сб., Группы с заданными свойствами подгрупп, Киев, Институт математики АН УССР, 1973, 105—126.
[9] Сысак Я. П., Конечные элементарно факторизуемые группы, Матем. сб., Киев, «Наукова думка», 1976, 108—111.
[10] Сысак Я. П., Группы с дополняемыми элементарными абелевыми подгруппами непростых порядков, Препринт ИМ — 76—18, Киев, Институт математики АН УССР, 1976.
[11] Адян С. И., Периодические произведения групп, Тр. Матем. ин-та АН СССР, **142** (1976), 3—21.
[12] Адян С. И., О простоте периодических произведений, Докл. АН СССР, **241**, № 4 (1978), 745—748.
[13] Адян С. И., Проблема Бернсайда и тождества в группах, М., «Наука», 1975.
[14] Курош А. Г., Теория групп, М., «Наука», 1967.
[15] Thompson J. G., Finite groups with fixed point free automorphisms of prime order, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **45** (1959), 578—581.
[16] Burnside W., The theory of groups of finite order, Cambridge, 1911.
[17] Higman G., Groups and rings having automorphisms without non-trivial fixed elements, J. London Math. Soc., **30** (1957), 321—334.

[18] Б у с а р к и н В. М., С т а р о с т и н А. И., О расщепляемых локально конечных группах, Матем. сб., **62**, № 3 (1963), 275—294.
[19] K e g e l D., Lokal endliche Gruppen mit nicht-trivialer Partition, Arch. Math., **13** (1962), 10—28.
[20] Ш у н к о в В. П., Об одном классе $p$-групп, Алгебра и логика, **9**, № 4 (1970), 484—496.
[21] Ш м и д т О. Ю., Локальная конечность одного класса бесконечных периодических групп, Избранные тр., М., Изд-во АН СССР, 1959, 298—300.