



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

N. M. Gulevich, On the radius of a compact set in Hilbert space, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1988, Volume 167, 157–158

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.82

January 13, 2025, 02:52:27



О РАДИУСЕ КОМПАКТНОГО МНОЖЕСТВА В
ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Теорема Раутледжа [1] утверждает, что в гильбертовом пространстве H для любого непустого ограниченного подмножества A с диаметром $\delta(A)$ существует единственный наименьший шар, содержащий A , и его радиус $r(A)$ не превосходит $\frac{1}{\sqrt{2}} \delta(A)$. Цель настоящей заметки - показать, что ни для какого относительно компактного множества A из H величина $r(A)$ не может равняться $\frac{1}{\sqrt{2}} \delta(A)$, если $\delta(A) > 0$.

ТЕОРЕМА. Пусть A - относительно компактное множество в H и $\delta(A) > 0$. Тогда $r(A) < \frac{1}{\sqrt{2}} \delta(A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не умаляя общности, можно считать, что $\{x \in H \mid \|x\| \leq 1\}$ - наименьший шар в H , содержащий A . Тогда надо доказать, что $\delta(A) > \sqrt{2} r$, где $\delta(A) = \sup\{\|x - y\| \mid x, y \in A\}$. Допустим, что $\delta(A) \leq \sqrt{2} r$. Отсюда, по теореме Раутледжа, $\delta(A) = \sqrt{2} r$. Далее, можно считать, что A - компакт, так как $r(A) = r(\bar{A})$ и $\delta(A) = \delta(\bar{A})$, где \bar{A} - замыкание A . Очевидно, $B = A \cap S$ непустое множество, где $S = \{x \in H \mid \|x\| = 1\}$. Пусть $\mathcal{D} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ - максимальная ортонормированная система, состоящая из векторов, принадлежащих B . В силу компактности B , множество \mathcal{D} конечно. Рассмотрим линейный непрерывный функционал φ на H : $\varphi(\cdot) = (x_1 + x_2 + \dots + x_n, \cdot)$, где (\cdot, \cdot) - скалярное произведение. Убедимся, что $\varphi(y) > 0$ для любого $y \in B$. Действительно, для всякого $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ и любого $y \in B$ имеем $2(x_i, y) = \|x_i\|^2 + \|y\|^2 - \|x_i - y\|^2 \geq 2 - [\delta(A)]^2 = 0$. Теперь, если $\varphi(y_0) = 0$ для некоторого $y_0 \in B$, то $(x_i, y_0) = 0$ для каждого $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, что противоречит выбору системы \mathcal{D} . Далее, $\varphi(y) \geq \min\{\varphi(x) \mid x \in B\} = \varphi(\bar{x})$ для всех $y \in B$ и некоторого $\bar{x} \in B$. Отсюда вытекает, что $\varphi(z) \geq \varphi(\bar{x}) > 0$ для всякого $z \in \overline{co} B$, где $\overline{co} B$ - замкнутая выпуклая оболочка множества B . Значит $0 \notin \overline{co} B$. Пусть $L = \{x \in H \mid \varphi(x) = \frac{1}{2} \varphi(\bar{x})\}$ и $H_1 =$

$= \{x \in H \mid \varphi(x) \leq \frac{1}{2} \varphi(\bar{x})\}$. Положим: $r = \max\{\|x\| \mid x \in A \cap H_1\}$ (если $A \cap H_1 = \emptyset$, то $r = 0$);
 $s = \inf\{\|x\| \mid x \in L\}$; $t = \min\{1 - r, s\}$. Отметим, что $t > 0$.

Теперь, если $x_0 \in L$ такой вектор, что $\|x_0\| = 3$, то нетрудно проверить, что шар $\{x \in H \mid \|\frac{1}{3}x_0 - x\| \leq 1\}$ содержит множество A . Это противоречит единственности наименьшего шара. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Оценка $r(A) < \frac{1}{\sqrt{2}} \delta(A)$, указанная в теореме, точная. В самом деле, если H_∞ - гильбертово пространство с ортонормированным базисом $\{e_i\}_{i=1}^\infty$ и $A = \{e_i\}_{i=1}^{n+1}$, то $r(A) = \sqrt{\frac{n}{2n+2}} \delta(A)$, причем $\sqrt{\frac{n}{2n+2}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}$ при $n \rightarrow \infty$.

Литература

1. R o u t l e d g e N.A. A result in Hilbert space. - Quart. J.Math., Oxford (2), 1952, 3, N 9, 12-18.

Gulevic N.M. On the radius of a compact set in Hilbert space.

The author makes more exact the Routledge's formula

$r(A) \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \delta(A)$ in Hilbert space. He shows that in reality

$r(A) < \frac{1}{\sqrt{2}} \delta(A)$ for relative compact subsets.