



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, И. Ю. Реброва, Е. А. Матвеева, Системы совместных полиномов Туэ для квадратичных иррациональностей, *Чебышевский сб.*, 2022, том 23, выпуск 4, 77–91

DOI: 10.22405/2226-8383-2022-23-4-77-91

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.82

25 января 2025 г., 01:58:42



ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 4.

УДК 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-77-91

Системы совместных полиномов Туэ для квадратичных иррациональностей¹

Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, И. Ю. Реброва, Е. А. Матвеева

Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого; Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Добровольский Николай Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: dobrovol@tspu.ru

Реброва Ирина Юрьевна — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: i_rebrova@mail.ru

Матвеева Елизавета Александровна — Центр творческого развития и гуманитарного образования (г. Суворов, Тульская область).

e-mail: morozova.tspu@gmail.com

Аннотация

В работе вводится новое понятие — система совместных полиномов Туэ для системы целых алгебраических иррациональностей. Проводится параллельное изложение элементов теории полиномов Туэ для одной алгебраической иррациональности и основ теории для системы совместных полиномов Туэ для системы целых алгебраических иррациональностей. Сформулирована гипотеза об аналоге теоремы М. Н. Добровольского (старшего) о том, что для каждого порядка j существуют два основных полинома Туэ j -ого порядка, через которые выражаются все остальные. Для системы двух квадратичных иррациональностей, например, $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$, найдены системы совместных основных полиномов порядка не ниже 0-го, 1-го и 2-го. Доказана теорема об общем виде пары основных полиномов Туэ произвольного порядка n для квадратичной иррациональности \sqrt{c} , где c — бесквадратное натуральное число.

Ключевые слова: минимальный многочлен, приведённая алгебраическая иррациональность, остаточные дроби, цепные дроби, пара Туэ, система совместных полиномов Туэ.

Библиография: 6 названий.

Для цитирования:

Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, И. Ю. Реброва, Е. А. Матвеева. Системы совместных полиномов Туэ для квадратичных иррациональностей // Чебышевский сборник. 2022. Т. 23, вып. 4, С. 77–91.

¹Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта

№19-41-710004_p_a. и при финансовой поддержке гранта правительства Тульской области по Договору ДС/294 от 16.11.2021 г.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 4.

UDC 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-77-91

Systems of joint Thue polynomials for quadratic irrationalities²

N. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, E. A. Matveeva

Dobrovol'skii Nikolai Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University; Tula State University (Tula).*e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com***Dobrovol'skii Nikolai Mihailovich** — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).*e-mail: dobrovol@tspu.ru***Rebrova Irina Yuryevna** — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).*e-mail: i_rebrova@mail.ru***Matveeva Elizabeth Alexandrovna** — Center for Creative Development and Humanitarian Education (Suvorov, Tula Region).*e-mail: morozova.tspu@gmail.com***Abstract**

The paper introduces a new concept — a system of joint Thue polynomials for a system of integer algebraic irrationalities. A parallel presentation of the elements of the theory of Thue polynomials for one algebraic irrationality and the foundations of the theory for a system of joint Thue polynomials for a system of integer algebraic irrationalities is carried out. A hypothesis is formulated about an analogue of the theorem of M. N. Dobrovolsky (Sr.) that for each order of j there are two main Thue polynomials of the j th order, through which all the others are expressed. For a system of two quadratic irrationalities, for example, $\sqrt{2}$ and $\sqrt{3}$, systems of joint basic polynomials of order no lower than 0, 1 and 2 are found. A theorem is proved on the general form of a pair of basic Thue polynomials of arbitrary order n for quadratic irrationality \sqrt{c} , where c is a square-free natural number.

Keywords: the minimum polynomial of the given algebraic irrationality, residual fractions, continued fractions, Tve pair, a system of joint Tve polynomials.

Bibliography: 6 titles.

For citation:

N. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, E. A. Matveeva, 2022, "Systems of joint Thue polynomials for quadratic irrationalities", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 4, pp. 77–91.

1. Введение

Полиномы Туэ были введены в работе [6] и использовались А. Туэ для оценки снизу скорости приближения иррационального числа α рациональными дробями $\frac{p}{q}$. В работах [1] и [4] строилась систематическая теория полиномов Туэ и были построены основные полиномы Туэ для кубических и биквадратичных иррациональностей. В работе [3] был рассмотрен вопрос о нахождении основных полиномов Туэ для квадратичных иррациональностей. В данной работе для одного класса квадратичных иррациональностей этот вопрос решён полностью.

²The research was carried out with the financial support of the Russian Foundation for Basic Research within the framework of a scientific project

No.19-41-710004_p_a. and with the financial support of a grant from the Government of the Tula region under the Agreement DS/294 dated 16.11.2021.

Цель настоящей работы — рассмотреть новое понятие — система совместных основных полиномов Туэ произвольного порядка для двух вещественных квадратичных иррациональностей.

Всё изложение будет вестись для случая двух целых алгебраических иррациональностей. Например, $\alpha = \sqrt{2}$, $\beta = \sqrt{3}$. Поэтому определения, которые мы рассмотрим ниже, будут отличаться от тех, что даны в работах [1] — [6].

2. Матричные разложения

В работе [4] В. Д. Подсыпанин рассмотрел одно обобщение понятия непрерывной дроби, которое он назвал матричным разложением. В этой работе он получил матричные разложения иррациональностей третьей и четвертой степени. Мы рассмотрим обобщение этого понятия на случай двух иррациональностей.

Пусть

$$\prod_{k=0}^n \begin{pmatrix} a_k & c_k & e_k \\ b_k & d_k & f_k \\ g_k & h_k & m_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_n & C_n & E_n \\ B_n & D_n & F_n \\ G_n & H_n & M_n \end{pmatrix}.$$

Если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{G_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_n}{H_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_n}{M_n} = \alpha, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{B_n}{G_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D_n}{H_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{M_n} = \beta,$$

то пишут

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 1 \end{pmatrix} = \prod_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} a_k & c_k & e_k \\ b_k & d_k & f_k \\ g_k & h_k & m_k \end{pmatrix} \quad (1)$$

и называют формулу (1) матричным совместным разложением системы чисел α и β .

Пусть далее

$$\begin{aligned} T_{n,j}(t) &= (t - \alpha)^n V_{n,j}(t) = A_{n,j}(t) - \alpha B_{n,j}(t) \quad (j = 1, 2, 3); \\ U_{n,j}(t) &= (t - \beta)^n W_{n,j}(t) = C_{n,j}(t) - \beta B_{n,j}(t) \quad (j = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (2)$$

Разделив обе части равенства (2) на $B_{n,j}(t)$, получим:

$$\begin{aligned} \frac{A_{n,j}(t)}{B_{n,j}(t)} - \alpha &= (t - \alpha)^n \frac{V_{n,j}(t)}{B_{n,j}(t)} \quad (j = 1, 2, 3); \\ \frac{C_{n,j}(t)}{B_{n,j}(t)} - \beta &= (t - \beta)^n \frac{W_{n,j}(t)}{B_{n,j}(t)} \quad (j = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (3)$$

Если при фиксированном t , отношения $\frac{V_{n,j}(t)}{B_{n,j}(t)}$ и $\frac{W_{n,j}(t)}{B_{n,j}(t)}$ ($j = 1, 2, 3$) возрастают не быстрее показательной функции от n , то при достаточно малом $|t - \alpha|$ и $|t - \beta|$ правые части (2) стремятся к нулю при возрастании n , и мы можем утверждать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_{n,j}(t)}{B_{n,j}(t)} = \alpha \quad (|t - \alpha| < \delta), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_{n,j}(t)}{B_{n,j}(t)} = \beta \quad (|t - \beta| < \delta \quad (j = 1, 2, 3)). \quad (4)$$

Поэтому мы можем написать матричное разложение системы алгебраических чисел α и β в виде

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{0,1}(t) & A_{0,2}(t) & A_{0,3}(t) \\ C_{0,1}(t) & C_{0,2}(t) & C_{0,3}(t) \\ B_{0,1}(t) & B_{0,2}(t) & B_{0,3}(t) \end{pmatrix} \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \begin{pmatrix} Q_{k,1}(t) & Q_{k,2}(t) & Q_{k,3}(t) \\ R_{k,1}(t) & R_{k,2}(t) & R_{k,3}(t) \\ P_{k,1}(t) & P_{k,2}(t) & P_{k,3}(t) \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Разложение (5) существенно отличается от разложения (1) тем, что содержит рациональный параметр t и девять последовательностей многочленов, зависящих от t . При этом первое из равенств (4) выполняется в окрестности точки α , а второе — в окрестности точки β .

Такие разложения будем называть *совместными многочленными матричными разложениями*.

Если удастся найти такое $a > 1$, что $\left| \frac{V_{n,\nu}(t)}{B_{n,\nu}(t)} \right| < a^n$ ($\nu = 1, 2, 3$) для t , лежащих в интервал $|t - \alpha| < \frac{1}{a}$, и $\left| \frac{W_{n,\nu}(t)}{B_{n,\nu}(t)} \right| < a^n$ ($\nu = 1, 2, 3$) для t , лежащих в интервал $|t - \beta| < \frac{1}{a}$, то в системе этих интервалов многочленное матричное разложение сходится к системе α, β .

3. Определения и необходимые сведения

Прежде всего напомним некоторые определения приведённые в работе [3].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Полиномом Туэ n -го порядка для целого алгебраического числа α называются полиномы $T_n(t)$, обладающие свойствами:*

1. $T_n(t) = A_n(t) - \alpha B_n(t)$, где $A_n(t)$ и $B_n(t)$ — многочлены с целыми коэффициентами;
2. $T_n(t)$ делится на $(t - \alpha)^n$, $T_n(t) = V_n(t)(t - \alpha)^n$;
3. $T_n(t)$ не делится на $(t - \alpha)^{n+1}$, $V_n(\alpha) \neq 0$.

Ясно, что существуют полиномы Туэ любого порядка. Действительно, если целое алгебраическое число α является корнем минимального многочлена с целыми коэффициентами $f(x) = x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \dots + a_1x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$, то многочлен $f(x)$ является унитарным, неприводимым, примитивным многочленом. Поэтому любой целочисленный многочлен $A_n(t)$ или $B_n(t)$, который в точности делится на $(t - \alpha)^n$, будет иметь вид $f^n(t)g(t)$ и $(f(t), g(t)) = 1$, $g(t) \in \mathbb{Z}[t]$.

Таким образом, полиномы $T_{n,1}(t) = f^n(t)$ и $T_{n,2}(t) = -\alpha f^n(t)$ — тривиальные полиномы Туэ порядка n .

Из предыдущего раздела видно, что полиномы Туэ могут использоваться для построения многочленных матричных разложений, сходящихся к α . При этом очевидно, что тривиальные полиномы Туэ для этих целей не годятся, а надо уметь строить нетривиальные полиномы Туэ любого порядка n .

В работе [1] М. Н. Добровольский доказал следующие важные свойства полиномов Туэ.

ТЕОРЕМА 1. *Для любого порядка n существуют два основных полинома Туэ $T_{n,1}(t)$ и $T_{n,2}(t)$ таких, что любой полином Туэ k -го порядка с $k \geq n$ имеет вид:*

$$T_k(t) = M_{k,n}(t)T_{n,1}(t) + N_{k,n}(t)T_{n,2}(t),$$

где $M_{k,n}(t)$ и $N_{k,n}(t)$ — многочлены с целыми коэффициентами.

ТЕОРЕМА 2. *Если для полиномов*

$$T_{j_1,1}(t, \alpha) = P_{j_1,1}(t) - \alpha Q_{j_1,1}(t), \quad T_{j_2,2}(t, \alpha) = P_{j_2,2}(t) - \alpha Q_{j_2,2}(t)$$

порядка не ниже n имеет место

$$P_{j_1,1}(t)Q_{j_2,2}(t) - P_{j_2,2}(t)Q_{j_1,1}(t) = f^n(t)c_n,$$

где c_n — целое число не равное нулю, то полиномы $T_{j_1,1}(t, \alpha)$, $T_{j_2,2}(t, \alpha)$ являются основными для порядка n .

Пользуясь этими свойствами, В. Д. Подсыпанин в работе [4] дает следующие определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Если $T_{n,1}(t)$ и $T_{n,2}(t)$ — основные полиномы Туэ порядка n , а $T_{n+1,1}(t)$ и $T_{n+1,2}(t)$ — основные полиномы Туэ порядка $n + 1$, то формулы

$$\begin{cases} T_{n+1,1}(t) = Q_{n,1}(t)T_{n,1}(t) + P_{n,1}(t)T_{n,2}(t) \\ T_{n+1,2}(t) = Q_{n,2}(t)T_{n,1}(t) + P_{n,2}(t)T_{n,2}(t) \end{cases} \quad (6)$$

называются формулами перехода от полиномов n -го порядка к полиномам $n + 1$ -го.

Многочлены $Q_{n,1}$, $Q_{n,2}$, $P_{n,1}$, $P_{n,2}$ называются многочленами перехода. Матрица

$$\begin{pmatrix} Q_{n,1}(t) & Q_{n,2}(t) \\ P_{n,1}(t) & P_{n,2}(t) \end{pmatrix}$$

— матрицей перехода, её определитель — определителем перехода.

Числа $\tilde{\alpha}_{n,1} = \frac{P_{n,1}(\alpha)}{V_{n,1}(\alpha)}$ и $\tilde{\alpha}_{n,2} = \frac{P_{n,2}(\alpha)}{V_{n,1}(\alpha)}$ — множителями перехода.

В этой же работе В. Д. Подсыпанин доказывает следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3. Если полиномы $T_{n+1,1}(t)$ и $T_{n+1,2}(t)$, получаемые по формуле (6), являются основными, то

$$Q_{n,1}(t)P_{n,2}(t) - P_{n,1}(t)Q_{n,2}(t) = K_n f(t),$$

где $K_n \neq 0$ и не зависит от t .

И обратно.

Как отмечал В. Д. Подсыпанин в работе [4] "Общих методов для нахождения этих последовательностей неизвестно. Сам Туэ нашёл полиномы, носящие его имя, только для $\alpha = \sqrt[3]{a}$. Путём некоторых преобразований к этому виду были приведены полиномы Туэ для иррациональностей третьей степени Зигелем [5], а для иррациональностей четвертой степени с равным нулю кубическим инвариантом Кречмером [2]."

Введем теперь следующие обозначения

$$\begin{aligned} f(t) &= t^m + a_1 t^{m-1} + \dots + a_m; & f(\alpha) &= 0, \\ \alpha_1 &= \alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_m & \text{— корни } f(t); \\ \omega_i &= t - \alpha_i \quad (i = 1, 2, \dots, m); & \omega_1 &= \omega; \quad \delta_i = \alpha - \alpha_i \quad (i = 2, 3, \dots, m), \end{aligned}$$

тогда

$$\begin{aligned} \omega_i &= \omega + \delta_i \quad (i = 2, 3, \dots, m), \\ f(t) &= \omega_1 \omega_2 \dots \omega_m = \omega(\omega + \delta_2) \dots (\omega + \delta_m) = \\ &= \omega^m + A_1 \omega^{m-1} + \dots + A_{m-1} \omega, \end{aligned}$$

где A_i — основные симметрические функции от δ_i .³ Из формулы Тейлора для многочленов

$$f(t) = f(\alpha) + \sum_{\nu=1}^m \frac{f^{(\nu)}(\alpha)}{\nu!} (t - \alpha)^\nu = \sum_{\nu=1}^m \frac{f^{(\nu)}(\alpha)}{\nu!} (t - \alpha)^\nu$$

³ $A_1 = \delta_2 + \dots + \delta_m$, $A_2 = \delta_2 \delta_3 + \dots + \delta_2 \delta_m + \dots + \delta_{m-1} \delta_m = \sum_{2 \leq i < j \leq m} \delta_i \delta_j$, \dots ,

$A_{m-1} = \delta_2 \dots \delta_m$.

вытекает, что

$$A_\nu = \frac{f^{(m-\nu)}(\alpha)}{(m-\nu)!} = C_m^{m-\nu} \alpha^\nu + \sum_{\mu=1}^{\nu} C_{m-\mu}^{m-\nu} a_\mu \alpha^{\nu-\mu} \quad (\nu = 1, \dots, m-1).$$

Применительно к квадратичной иррациональности $\alpha = \sqrt{c}$, $\alpha' = -\sqrt{c}$, где c — бесквадратное натуральное число, имеем

$$f(t) = t^2 - c, \quad \omega = t - \sqrt{c}, \quad \delta = 2\sqrt{c}, \quad A_1 = 2\sqrt{c}, \quad f(t) = \omega^2 + 2\sqrt{c} \cdot \omega.$$

Рассмотрим теперь полиномы со следующими свойствами

1. Они являются симметрическими многочленами относительно ω_i .
2. Их степень не превосходит $m-1$.

Такие полиномы В. Д. Подсыпанин называет *критическими*.

Нетрудно видеть, что если критические полиномы рассматривать как функции от t , то они имеют рациональные коэффициенты.

Если же их рассматривать как функции от ω , то коэффициенты будут целыми рациональными выражениями от A_i .

Основное свойство критических полиномов следующее:

ТЕОРЕМА 4. *Существует один и только один критический полином, имеющий в разложении по степеням ω данный свободный член*

$$Y(A_1, A_2, \dots, A_{m-1}).$$

4. Система совместных полиномов Туэ для двух иррациональностей

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Системой совместных полиномов Туэ n -го порядка для целых алгебраических чисел α и β называется пара полиномов $T_n(t)$ и $U_n(t)$, обладающие свойствами:*

1. $T_n(t) = A_n(t) - \alpha B_n(t)$, $U_n(t) = C_n(t) - \beta B_n(t)$, где $A_n(t)$, $C_n(t)$ и $B_n(t)$ — многочлены с целыми коэффициентами;
2. $T_n(t)$ делится на $(t - \alpha)^n$, $T_n(t) = V_n(t)(t - \alpha)^n$; $U_n(t)$ делится на $(t - \beta)^n$, $U_n(t) = W_n(t)(t - \beta)^n$;
3. $T_n(t)$ не делится на $(t - \alpha)^{n+1}$, $V_n(\alpha) \neq 0$; $U_n(t)$ не делится на $(t - \beta)^{n+1}$, $W_n(\beta) \neq 0$.

Ясно, что существуют системы совместных полиномов Туэ любого порядка для целых алгебраических чисел α и β . Действительно, если иррациональное число является корнем минимального многочлена с целыми коэффициентами $f(x) = x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \dots + a_1x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$, а β — корень минимального многочлена с целыми коэффициентами $h(x) = x^k + b_{k-1}x^{k-1} + \dots + b_1x + b_0 \in \mathbb{Z}[x]$, то многочлены $f(x)$ и $h(x)$ являются унитарными, неприводимыми, примитивными многочленами. Поэтому любой многочлен $A_n(t)$ или $B_n(t)$, который в точности делится на $(t - \alpha)^n$, будет иметь вид $f^n(t)g(t)$ и $(f(t), g(t)) = 1$, $g(t) \in \mathbb{Z}[t]$, а любой многочлен $C_n(t)$ или $B_n(t)$, который в точности делится на $(t - \beta)^n$, будет иметь вид $h^n(t)c(t)$ и $(h(t), c(t)) = 1$, $c(t) \in \mathbb{Z}[t]$.

Таким образом, пары полиномов $T_{n,1}(t) = f^n(t)$, $U_{n,1}(t) = h^n(t)$; $T_{n,2}(t) = -\alpha f^n(t)h^n(t)$, $U_{n,2}(t) = -\beta f^n(t)h^n(t)$ и $T_{n,3}(t) = f^n(t) - \alpha f^n(t)h^n(t)$, $U_{n,3}(t) = h^n(t) - \beta f^n(t)h^n(t)$ — тривиальные системы совместных полиномов Туэ порядка n .

Из второго раздела видно, что системы совместных полиномов Туэ могут использоваться для построения совместных многочленных матричных разложений, сходящихся к α и β . При этом очевидно, что тривиальные системы совместных полиномов Туэ для этих целей не годятся, а надо уметь строить нетривиальные системы совместных полиномов Туэ любого порядка n .

Из условия $(t - \alpha)^n | T_n(t)$, а $(t - \alpha)^{n+1} \nmid T_n(t)$ следует, что $(t - \alpha) \left| \frac{d^\nu T_n(t)}{dt^\nu} \right.$ при $\nu = 0, \dots, n-1$ и $(t - \alpha) \nmid \frac{d^n T_n(t)}{dt^n}$.

Так как $P(t) - \alpha Q(t) = P(t) - tQ(t) + (t - \alpha)Q(t)$, то соотношение $(t - \alpha) | P(t) - \alpha Q(t)$ эквивалентно соотношению $f(t) | P(t) - tQ(t)$.

Отсюда следует, что пара полиномов $T_n(t) = A_n(t) - \alpha B_n(t)$ и $U_n(t) = C_n(t) - \beta B_n(t)$ является системой совместных полиномов Туэ n -го порядка для целых алгебраических чисел α и β тогда и только тогда, когда выполняются следующие $2n + 2$ условий

$$f(t) \left| \frac{d^\nu A_n(t)}{dt^\nu} - t \frac{d^\nu B_n(t)}{dt^\nu} \right., \quad h(t) \left| \frac{d^\nu C_n(t)}{dt^\nu} - t \frac{d^\nu B_n(t)}{dt^\nu} \right. \quad (\nu = 0, \dots, n-1)$$

и

$$f(t) \nmid \frac{d^n A_n(t)}{dt^n} - t \frac{d^n B_n(t)}{dt^n}, \quad h(t) \nmid \frac{d^n C_n(t)}{dt^n} - t \frac{d^n B_n(t)}{dt^n}.$$

Дадим модификацию определения 3.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Системой совместных полиномов Туэ порядка не ниже n -го для целых алгебраических чисел α и β называется пара полиномов $T_n(t)$ и $U_n(t)$, обладающие свойствами:

1. $T_n(t) = A_n(t) - \alpha B_n(t)$, $U_n(t) = C_n(t) - \beta B_n(t)$, где $A_n(t)$, $C_n(t)$ и $B_n(t)$ — многочлены с целыми коэффициентами;
2. $T_n(t)$ делится на $(t - \alpha)^k$, $T_n(t) = V_n(t)(t - \alpha)^k$; $U_n(t)$ делится на $(t - \beta)^m$, $U_n(t) = W_n(t)(t - \beta)^m$;
3. $T_n(t)$ не делится на $(t - \alpha)^{k+1}$, $V_n(\alpha) \neq 0$; $U_n(t)$ не делится на $(t - \beta)^{m+1}$, $W_n(\beta) \neq 0$;
4. $\min(k, m) \geq n$.

Ясно, что следующие три пары полиномов Туэ являются системой совместных полиномов Туэ порядка не ниже 0-ого: $T_{0,1}(t) = 1$, $U_{0,1}(t) = 0$; $T_{0,2}(t) = 0$, $U_{0,2}(t) = 1$; $T_{0,3}(t) = -\alpha$, $U_{0,3}(t) = -\beta$, причём любая пара совместных полиномов Туэ порядка не ниже 0-ого $T_0(t)$, $U_0(t)$ имеет вид

$$\begin{aligned} T_0(t) &= a(t) - \alpha b(t) = a(t)T_{0,1}(t) + c(t)T_{0,2}(t) + b(t)T_{0,3}(t), \\ U_0(t) &= c(t) - \beta b(t) = a(t)U_{0,1}(t) + c(t)U_{0,2}(t) + b(t)U_{0,3}(t). \end{aligned}$$

Нетрудно задать соответствие между парами совместных полиномов Туэ и тройками Туэ:

$$T(t) = a(t) - \alpha b(t), U(t) = c(t) - \beta b(t) \longleftrightarrow (a(t), c(t), b(t)) \in \mathbb{Z}^3.$$

Отсюда следует, что множество пар совместных полиномов Туэ и множества троек Туэ являются изоморфными свободными $\mathbb{Z}[t]$ модулями ранга 3.

Естественно предположить, что справедлив аналог теоремы 1.

ТЕОРЕМА 5. Для любого порядка n существуют три системы совместных основных полинома Туэ $T_{n,\nu}(t)$ и $U_{n,\nu}(t)$ ($\nu = 1, 2, 3$) порядка не ниже n такие, что любая система совместных полиномов Туэ порядка не ниже k -го с $k \geq n$ имеет вид:

$$\begin{aligned} T_k(t) &= M_{k,n}(t)T_{n,1}(t) + N_{k,n}(t)T_{n,2}(t) + K_{k,n}(t)T_{n,3}(t), \\ U_k(t) &= M_{k,n}(t)U_{n,1}(t) + N_{k,n}(t)U_{n,2}(t) + K_{k,n}(t)U_{n,3}(t), \end{aligned}$$

где $M_{k,n}(t)$, $N_{k,n}(t)$ и $K_{k,n}(t)$ — многочлены с целыми коэффициентами.

Если $T_{n,\nu}(t) = a_{n,\nu}(t) - \alpha b_{n,\nu}(t)$, $U_{n,\nu}(t) = c_{n,\nu}(t) - \beta b_{n,\nu}(t)$, ($\nu = 1, 2, 3$) и

$$T_k(t) = a_k(t) - \alpha b_k(t), \quad U_k(t) = c_k(t) - \beta b_k(t),$$

то справедливо матричное равенство

$$\begin{pmatrix} a_k(t) & c_k(t) & b_k(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{k,n}(t) & N_{k,n}(t) & K_{k,n}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n,1}(t) & c_{n,1}(t) & b_{n,1}(t) \\ a_{n,2}(t) & c_{n,2}(t) & b_{n,2}(t) \\ a_{n,3}(t) & c_{n,3}(t) & b_{n,3}(t) \end{pmatrix}.$$

5. Многочлены Туэ нулевого, первого и второго порядка

Следуя работе [4] В. Д. Подсыпанина найдем основные многочлены до 2-го порядка для любого α .

Начнем с многочленов нулевого порядка.

Таковыми многочленами очевидно являются 1 и $-\alpha$.

Однако, В. Д. Подсыпанин предлагает пользоваться при переходах критическими многочленами, поэтому возьмём:

$$T_{0,1}(t) = 1, \quad T_{0,2}(t) = -A_1 = -a_1 - m\alpha, \quad (7)$$

здесь

$$\begin{aligned} P_{0,1}(t) &= 1, & Q_{0,1}(t) &= 0; \\ P_{0,2}(t) &= -a_1, & Q_{0,2}(t) &= m. \end{aligned}$$

Первый переход осуществляется по формулам:

$$\begin{cases} mT_{1,1}(t) = (m\omega + A_1)T_{0,1}(t) + T_{0,2}(t), \\ mT_{1,2}(t) = ((m\omega + A_1)f'(t) - m^2f(t))T_{0,1}(t) + f'(t)T_{0,2}(t). \end{cases} \quad (8)$$

Определитель перехода будет равен $f(t)$, то есть полученные многочлены будут основными многочленами первого порядка.

Действительно,

$$\begin{vmatrix} \omega + \frac{A_1}{m} & \frac{1}{m} \\ (\omega + \frac{A_1}{m})f'(t) - mf(t) & \frac{f'(t)}{m} \end{vmatrix} = f(t).$$

Множители перехода равны $\tilde{\alpha}_{0,1} = 1$, $\tilde{\alpha}_{0,2} = +A_{m-1}$.

Произведя вычисления, получим $T_{1,1}(t) = \omega = t - \alpha_1$,

$$T_{1,2}(t) = -\omega (A_1\omega^{m-2} + 2A_2\omega^{m-3} + \dots + (m-1)A_{m-1}). \quad (9)$$

Второй переход осуществляется по формулам

$$\begin{cases} mT_{2,1}(t) = & (m-1)f'(t) T_{1,1}(t) + & T_{1,2}(t), \\ mT_{2,2}(t) = (m-1)(m^2f(t) - (m\omega + A_1)f'(t)) T_{1,1}(t) - (m\omega + A_1) T_{1,2}(t). \end{cases} \quad (10)$$

Определитель второго перехода будет равен $(m-1)f(t)$, то есть $T_{2,1}(t)$ и $T_{2,2}(t)$ — основные многочлены второго порядка.

Множители второго перехода равны $\tilde{\alpha}_{1,1} = 1$, $\tilde{\alpha}_{1,2} = A_1$.

Проведя вычисления получим:

$$\begin{aligned} T_{2,1}(t) &= \omega^2 ((m-1)\omega^{m-2} + (m-2)A_1\omega^{m-3} + \dots + A_{m-2}), \\ T_{2,2}(t) &= \omega^2 (A_1\omega^{m-2} + (2mA_2 - (m-2)A_1^2)\omega^{m-3} + \dots + \\ &\quad + (m(m-1)A_{m-1} - A_1A_{m-2})). \end{aligned} \quad (11)$$

Следующий переход получить в общем виде не удаётся. Он оказывается существенно различным для разных α .

Подставив значение начальных многочленов и первых переходных многочленов в формулу (5), В. Д. Подсыпанин нашёл несколько первых множителей разложения.

Обозначим $m\omega + A_1 = Q(t)$; $Q(t)f'(t) - m^2f(t) = S(t)$.

Тогда получим

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & -a_1 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q(t) & S(t) \\ 1 & f'(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m-1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f'(t) & -S(t) \\ 1 & -Q(t) \end{pmatrix} \\ &\cdot \prod_{k=2}^{\infty} \begin{pmatrix} Q_{k,1}(t) & Q_{k,2}(t) \\ P_{k,1}(t) & P_{k,2}(t) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (12)$$

Перемножив две первые матрицы и добавив после четвёртой матрицы произведение

$$\begin{pmatrix} m & -a_1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -a_1 \\ 0 & -m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix},$$

и перемножив четвертую и пятую матрицы, мы получим более изящный вид:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} &= \\ &= \begin{pmatrix} t & tf'(t) - mf(t) \\ 1 & f'(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m-1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f'(t) & tf'(t) - mf(t) \\ 1 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -a_1 \\ 0 & -m \end{pmatrix} \\ &\cdot \prod_{k=2}^{\infty} \begin{pmatrix} Q_{k,1}(t) & Q_{k,2}(t) \\ P_{k,1}(t) & P_{k,2}(t) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (13)$$

Формулы (12) и (13) были основой в работе В. Д. Подсыпанина для получения разложений для $m = 3$ и 4 .

6. Многочлены Туэ нулевого, первого и второго порядка для квадратичных иррациональностей

Пусть $m = 2$, $f(t) = t^2 - c$, $c \in \mathbb{N}$, $d = 4c > 0$ и $\alpha = \frac{\sqrt{d}}{2} = \sqrt{c}$, $\alpha' = -\sqrt{c}$ — сопряжённые квадратические вещественные иррациональности, корни неприводимого многочлена $f(t)$.

Для числа α последовательно находим основные многочлены Туэ:

нулевого порядка

$$\begin{aligned} T_{0,1}(t) &= 1, & T_{0,2}(t) &= \alpha, \\ P_{0,1}(t) &= 1, & Q_{0,1}(t) &= 0, \\ P_{0,2}(t) &= 0, & Q_{0,2}(t) &= 1; \end{aligned}$$

первого порядка

$$\begin{aligned} T_{1,1}(t) &= \omega = t - \alpha, & T_{1,2}(t) &= c - \alpha t, \\ P_{1,1}(t) &= t, & Q_{1,1}(t) &= 1, \\ P_{1,2}(t) &= c, & Q_{1,2}(t) &= t; \end{aligned}$$

второго порядка

$$\begin{aligned} T_{2,1}(t) &= \omega^2 = t^2 + c - 2\alpha t, \\ P_{2,1}(t) &= t^2 + c, & Q_{2,1}(t) &= 2t, \\ T_{2,2}(t) &= \omega^2 \cdot (-\alpha) = 2ct - \alpha(t^2 + c), \\ P_{2,2}(t) &= 2ct, & Q_{2,2}(t) &= t^2 + c. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что справедливы матричные равенства

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & c \\ 1 & t \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} t & c \\ 1 & t \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} t & c \\ 1 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & c \\ 1 & t \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} t^2 + c & 2ct \\ 2t & t^2 + c \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Естественно предположить, что общий вид основных многочленов Туэ порядка n для квадратичной иррациональности α можно задать матричным равенством

$$\begin{pmatrix} P_{n,1}(t) & P_{n,2}(t) \\ Q_{n,1}(t) & Q_{n,2}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & c \\ 1 & t \end{pmatrix}^n.$$

Последовательно получаем:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} P_{0,1}(t) & P_{0,2}(t) \\ Q_{0,1}(t) & Q_{0,2}(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & T_{0,1}(t) &= 1, & T_{0,2} &= -\sqrt{c}; \\ \begin{pmatrix} P_{0,1}(t) & P_{0,2}(t) \\ Q_{0,1}(t) & Q_{0,2}(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & c \\ 1 & t \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} t & c \\ 1 & t \end{pmatrix}, & \begin{vmatrix} P_{0,1}(t) & P_{0,2}(t) \\ Q_{0,1}(t) & Q_{0,2}(t) \end{vmatrix} &= t^2 - c, \\ T_{1,1}(t) &= t - \sqrt{c}, & T_{1,2} &= c - t\sqrt{c}; \\ \begin{pmatrix} P_{2,1}(t) & P_{2,2}(t) \\ Q_{2,1}(t) & Q_{2,2}(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} t & c \\ 1 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & c \\ 1 & t \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} t^2 + c & 2ct \\ 2t & t^2 + c \end{pmatrix}, & \begin{vmatrix} P_{2,1}(t) & P_{2,2}(t) \\ Q_{2,1}(t) & Q_{2,2}(t) \end{vmatrix} &= (t^2 - c)^2, \\ T_{2,1}(t) &= t^2 + c - 2t\sqrt{c} = (t - \sqrt{c})^2, & T_{2,2}(t) &= 2ct - (t^2 + c)\sqrt{c} = -\sqrt{c}(t - \sqrt{c})^2; \\ \begin{pmatrix} P_{3,1}(t) & P_{3,2}(t) \\ Q_{3,1}(t) & Q_{3,2}(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} t^2 + c & 2ct \\ 2t & t^2 + c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & c \\ 1 & t \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} t^3 + 3ct & c(3t^2 + c) \\ 3t^2 + c & t^3 + 3ct \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} P_{3,1}(t) & P_{3,2}(t) \\ Q_{3,1}(t) & Q_{3,2}(t) \end{vmatrix} = (t^2 - c)^3,$$

$$T_{3,1}(t) = t^3 + 3ct - (3t^2 + c)\sqrt{c} = (t - \sqrt{c})^3, \quad T_{3,2}(t) = c(3t^2 + c) - (t^3 + 3ct)\sqrt{c} = -\sqrt{c}(t - \sqrt{c})^3.$$

ТЕОРЕМА 6. Пусть c — безквадратное натуральное число и квадратичная иррациональность $\alpha = \sqrt{c}$ — корень унитарного, неприводимого примитивного многочлена $f(x) = x^2 - c$, тогда для основных многочленов Туэ порядка n справедливо равенство

$$\begin{aligned} T_{n,1}(t) &= t^n + \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} C_n^{2j} t^{n-2j} c^j - \sqrt{c} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} C_n^{n-2j-1} t^{n-2j-1} c^j = (t - \sqrt{c})^n, \\ T_{n,2}(t) &= \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} C_n^{2j+1} t^{n-2j-1} c^{j+1} - \sqrt{c} \left(t^n + \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} C_n^{n-2j-1} t^{n-2j-1} c^j \right) = -\sqrt{c} (t - \sqrt{c})^n; \\ P_{n,1}(t) &= t^n + \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} C_n^{2j} t^{n-2j} c^j, \quad P_{n,2}(t) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} C_n^{2j+1} t^{n-2j-1} c^{j+1}, \\ Q_{n,1}(t) &= \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} C_n^{n-2j-1} t^{n-2j-1} c^j, \quad Q_{n,2}(t) = t^n + \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} C_n^{n-2j} t^{n-2j} c^j, \\ P_{n,1}(t)Q_{n,2}(t) - P_{n,2}(t)Q_{n,1}(t) &= (t^2 - c)^n. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство проведём по индукции.

При $n = 0$ имеем:

$$P_{0,1}(t) = 1, \quad P_{0,2}(t) = 0, \quad Q_{0,1}(t) = 0, \quad Q_{0,2}(t) = 1, \quad T_{0,1}(t) = 1, \quad T_{0,2}(t) = -\sqrt{c}$$

и

$$P_{0,1}(t)Q_{0,2}(t) - P_{0,2}(t)Q_{0,1}(t) = 1,$$

поэтому утверждение теоремы справедливо.

Пусть $n \geq 0$ и утверждение теоремы справедливо, то есть

$$\begin{pmatrix} P_{n,1}(t) & P_{n,2}(t) \\ Q_{n,1}(t) & Q_{n,2}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^n + \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} C_n^{2j} t^{n-2j} c^j & \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} C_n^{2j+1} t^{n-2j-1} c^{j+1} \\ \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} C_n^{n-2j-1} t^{n-2j-1} c^j & t^n + \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} C_n^{n-2j} t^{n-2j} c^j \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим многочленную матрицу

$$\begin{pmatrix} P_{n+1,1}(t) & P_{n+1,2}(t) \\ Q_{n+1,1}(t) & Q_{n+1,2}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{n,1}(t) & P_{n,2}(t) \\ Q_{n,1}(t) & Q_{n,2}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & c \\ 1 & t \end{pmatrix}.$$

Последовательно получим

$$\begin{aligned} P_{n+1,1}(t) &= t \cdot \left(t^n + \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} C_n^{2j} t^{n-2j} c^j \right) + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} C_n^{2j+1} t^{n-2j-1} c^{j+1} = \\ &= t^{n+1} + \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} C_n^{2j} t^{n+1-2j} c^j + \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} C_n^{2j-1} t^{n+1-2j} c^j = t^{n+1} + \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} C_{n+1}^{2j} t^{n+1-2j} c^j, \\ P_{n+1,2}(t) &= c \cdot \left(t^n + \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} C_n^{2j} t^{n-2j} c^j \right) + t \cdot \left(\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} C_n^{2j+1} t^{n-2j-1} c^{j+1} \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} C_n^{2j} t^{n-2j} t^{n-2j} c^{j+1} + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} C_n^{2j+1} t^{n-2j} c^{j+1} = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} C_{n+1}^{2j+1} t^{n+1-2j-1} c^{j+1}, \\
Q_{n+1,1}(t) &= t \cdot \left(\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} C_n^{n-2j-1} t^{n-2j-1} c^j \right) + t^n + \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} C_n^{n-2j} t^{n-2j} c^j = \\
&= \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} C_n^{n-2j-1} t^{n-2j} c^j + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} C_n^{n-2j} t^{n-2j} c^j = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n+1-1}{2} \rfloor} C_{n+1}^{n+1-2j-1} t^{n+1-2j-1} c^j, \\
Q_{n+1,2}(t) &= c \cdot \left(\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} C_n^{n-2j-1} t^{n-2j-1} c^j \right) + t \cdot \left(t^n + \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} C_n^{n-2j} t^{n-2j} c^j \right) = \\
&= \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} C_n^{n-2j-1} t^{n-2j-1} c^{j+1} + t^{n+1} + \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} C_n^{n-2j} t^{n+1-2j} c^j = t^{n+1} + \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} C_{n+1}^{n+1-2j} t^{n+1-2j} c^j, \\
P_{n+1,1}(t)Q_{n+1,2}(t) - P_{n+1,2}(t)Q_{n+1,1}(t) &= \begin{vmatrix} P_{n+1,1}(t) & P_{n+1,2}(t) \\ Q_{n+1,1}(t) & Q_{n+1,2}(t) \end{vmatrix} = \\
&= \begin{vmatrix} P_{n,1}(t) & P_{n,2}(t) \\ Q_{n,1}(t) & Q_{n,2}(t) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} t & c \\ 1 & t \end{vmatrix} = (t^2 - c)^n (t^2 - c) = (t^2 - c)^{n+1}
\end{aligned}$$

и теорема полностью доказана. \square

7. Системы совместных полиномов Туэ нулевого, первого и второго порядка для квадратичных иррациональностей

Пусть $1 < a < b$ — два бесквадратных натуральных числа, например $a = 2$, $b = 3$, и $\alpha = \sqrt{a}$, $\beta = \sqrt{b}$.

Система совместных основных полиномов Туэ порядка не ниже 0-ого задается матрицей

$$\begin{pmatrix} P_{0,1}(t) & P_{0,2}(t) & P_{0,3}(t) \\ R_{0,1}(t) & R_{0,2}(t) & R_{0,3}(t) \\ Q_{0,1}(t) & Q_{0,2}(t) & Q_{0,3}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Система совместных основных полиномов Туэ порядка не ниже 1-ого задается матрицей

$$\begin{pmatrix} P_{1,1}(t) & P_{1,2}(t) & P_{1,3}(t) \\ R_{1,1}(t) & R_{1,2}(t) & R_{1,3}(t) \\ Q_{1,1}(t) & Q_{1,2}(t) & Q_{1,3}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & a & t^2 \\ t & t^2 & b \\ 1 & t & t \end{pmatrix}, \\
\begin{vmatrix} t & a & t^2 \\ t & t^2 & b \\ 1 & t & t \end{vmatrix} = (t^2 - a)(t^2 - b).$$

Мы получаем пары совместных полиномов Туэ порядка не ниже 1-ого:

$$\begin{aligned}
T_{1,1}(t) &= t - \alpha, & U_{1,1}(t) &= t - \beta; \\
T_{1,2}(t) &= a - \alpha t = -\alpha(t - \alpha), & U_{1,2}(t) &= t^2 - \beta t = t(t - \beta); \\
T_{1,3}(t) &= t^2 - \alpha t = t(t - \alpha), & U_{1,3}(t) &= b - \beta t = -\beta(t - \beta).
\end{aligned}$$

Перейдём, теперь, к получению пары совместных полиномов Туэ порядка не ниже 2-ого. Если $T_2(t) = P_2(t) - \alpha Q_2(t)$, $U_2(t) = R_2(t) - \alpha Q_2(t)$ — пары совместных полиномов Туэ порядка не ниже 2-ого, то справедливы следующие четыре соотношения:

$$t^2 - a \mid P_2(t) - tQ_2(t), \quad t^2 - b \mid R_2(t) - tQ_2(t), \quad (14)$$

$$t^2 - a \mid P_2'(t) - tQ_2'(t), \quad t^2 - b \mid R_2'(t) - tQ_2'(t). \quad (15)$$

Из соотношений (14) следует, что

$$P_2(t) = tQ_2(t) + (t^2 - a)g(t), \quad R_2(t) = tQ_2(t) + (t^2 - b)g_1(t), \quad g(t), g_1(t) \in \mathbb{Z}[t].$$

Отсюда следует, что

$$P_2'(t) = Q_2(t) + tQ_2'(t) + 2tg(t) + (t^2 - a)g'(t), \quad R_2'(t) = Q_2(t) + tQ_2'(t) + 2tg_1(t) + (t^2 - b)g_1'(t).$$

Отсюда и из (15) следует, что

$$t^2 - a \mid Q_2(t) + 2tg(t), \quad t^2 - b \mid Q_2(t) + 2tg_1(t).$$

Таким образом, имеем:

$$Q_2(t) = (t^2 - a)p(t) - 2tg(t) = (t^2 - b)q(t) - 2tg_1(t), \quad p(t), q(t) \in \mathbb{Z}[t].$$

Располагая по степеням t , получим уравнение

$$t^2(p(t) - q(t)) + 2t(g_1(t) - g(t)) = ap(t) - bq(t)$$

в целых многочленах $p(t)$, $q(t)$, $g(t)$ и $g_1(t)$.

Положим $p(t) = tp_1(t) + c$, $q(t) = tq_1(t) + d$, $g_2(t) = g_1(t) - g(t)$, получим

$$t^3(p_1(t) - q_1(t)) + t^2(c - d) + t(2g_2(t) - ap_1(t) + bq_1(t)) = ac - bd.$$

Отсюда следует, что $c = \frac{b}{(a,d)}f$, $d = \frac{a}{(a,b)}f$ и f — любое целое число. Далее получим:

$$t^2(p_1(t) - q_1(t)) + t \frac{b-a}{(a,d)}f = ap_1(t) - bq_1(t) - 2g_2(t).$$

Используя матрицу перехода от системы совместных основных полинома Туэ порядка не ниже 1-ого к системе совместных основных полинома Туэ порядка не ниже 2-ого, получим:

$$\begin{pmatrix} P_{2,1}(t) & P_{2,2}(t) & P_{2,3}(t) \\ R_{2,1}(t) & R_{2,2}(t) & R_{2,3}(t) \\ Q_{2,1}(t) & Q_{2,2}(t) & Q_{2,3}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & a & t^2 \\ t & t^2 & b \\ 1 & t & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{1,1}(t) & m_{1,2}(t) & m_{1,3}(t) \\ n_{1,1}(t) & n_{1,2}(t) & n_{1,3}(t) \\ k_{1,1}(t) & k_{1,2}(t) & k_{1,3}(t) \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} tm_{1,1}(t) + an_{1,1}(t) + t^2k_{1,1}(t) & tm_{1,2}(t) + an_{1,2}(t) + t^2k_{1,2}(t) & tm_{1,3}(t) + an_{1,3}(t) + t^2k_{1,3}(t) \\ tm_{1,1}(t) + t^2n_{1,1}(t) + bk_{1,1}(t) & tm_{1,2}(t) + t^2n_{1,2}(t) + bk_{1,2}(t) & tm_{1,3}(t) + t^2n_{1,3}(t) + bk_{1,3}(t) \\ m_{1,1}(t) + tn_{1,1}(t) + tk_{1,1}(t) & m_{1,2}(t) + tn_{1,2}(t) + tk_{1,2}(t) & m_{1,3}(t) + tn_{1,3}(t) + tk_{1,3}(t) \end{pmatrix}.$$

Таким образом, имеем:

$$P_{2,\nu}(t) = tm_{1,\nu}(t) + an_{1,\nu}(t) + t^2k_{1,\nu}(t), \quad R_{2,\nu}(t) = tm_{1,\nu}(t) + t^2n_{1,\nu}(t) + bk_{1,\nu}(t), \\ Q_{2,\nu}(t) = m_{1,\nu}(t) + tn_{1,\nu}(t) + tk_{1,\nu}(t), \quad (\nu = 1, 2, 3).$$

Условия на полиномы Туэ порядка не ниже второго запишутся следующим образом:

$$(t - \alpha)^2 \mid P_{2,\nu}(t) - \alpha Q_{2,\nu}(t) = \frac{1}{2t}(t - \alpha)^2 Q_{2,\nu}(t) + P_{2,\nu}(t) - \frac{t^2 + a}{2t} Q_{2,\nu}(t), \\ (t - \beta)^2 \mid R_{2,\nu}(t) - \beta Q_{2,\nu}(t) = \frac{1}{2t}(t - \beta)^2 Q_{2,\nu}(t) + R_{2,\nu}(t) - \frac{t^2 + b}{2t} Q_{2,\nu}(t), \quad (\nu = 1, 2, 3).$$

Это даёт общий вид для пары совместных полиномов Туэ порядка не ниже второго:

$$T(t) = Q(t) \frac{t^2 + a}{2} + (t^2 - a)^2 P(t) - \alpha t Q(t) = (t - \alpha)^2 \left(\frac{Q(t)}{2} + (t + \alpha)^2 P(t) \right),$$

$$U(t) = Q(t) \frac{t^2 + b}{2} + (t^2 - b)^2 R(t) - \beta t Q(t) = (t - \beta)^2 \left(\frac{Q(t)}{2} + (t + \beta)^2 R(t) \right).$$

Поэтому матрицу системы основных полиномов Туэ порядка не ниже второго можно задать так:

$$\begin{pmatrix} P_{2,1}(t) & P_{2,2}(t) & P_{2,3}(t) \\ R_{2,1}(t) & R_{2,2}(t) & R_{2,3}(t) \\ Q_{2,1}(t) & Q_{2,2}(t) & Q_{2,3}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 + a & t^2 + a + (t^2 - a)^2 & t^2 + a \\ t^2 + b & t^2 + b & t^2 + b + (t^2 - b)^2 \\ 2t & 2t & 2t \end{pmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} P_{2,1}(t) & P_{2,2}(t) & P_{2,3}(t) \\ R_{2,1}(t) & R_{2,2}(t) & R_{2,3}(t) \\ Q_{2,1}(t) & Q_{2,2}(t) & Q_{2,3}(t) \end{vmatrix} = 2t(t^2 - a)^2(t^2 - b)^2.$$

После вычислений находим матрицу перехода от системы основных полиномов Туэ порядка не ниже первого к системе основных полиномов Туэ порядка не ниже второго:

$$\begin{pmatrix} 0 & t(t^2 - a) & t(t^2 - b) \\ 1 & 1 + a - t^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 + b - t^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & t(t^2 - a) & t(t^2 - b) \\ 1 & 1 + a - t^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 + b - t^2 \end{vmatrix} = 2t(t^2 - a)(t^2 - b).$$

8. Заключение

Сравнивая формулы для основных полиномов Туэ для одной квадратичной иррациональности и для основных полиномов системы совместных полиномов Туэ двух квадратичных иррациональностей, мы видим, что переход к системе совместных полиномов Туэ гораздо сложнее. В частности, на сегодняшний момент трудно сформулировать гипотезу о виде матриц перехода. Ясно, что вид этих матриц может зависеть от порядка системы совместных полиномов Туэ.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Добровольский М. Н. О разложении иррациональностей третьей степени в непрерывные дроби // Чебышевский сборник. Т. XI, вып. 4(36). С. 4 — 24.
2. В. А. Кречмар О верхнем пределе числа представлений целого числа некоторыми бинарными формами четвертой степени // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1939. Т. 3, вып. 3. С. 289–302.
3. Е. А. Морозова Многочлены Туэ для квадратичных иррациональностей // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения : Материалы XIII Международной конференции, Тула, 15–17 апреля 2015 года / Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого. – Тула: Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого, 2015. – С. 161-168.
4. Подсыпанин В. Д. О многочленах Туэ и разложении иррациональностей четвертой степени в непрерывную дробь // Чебышевский сборник. Т. XI, вып. 4(36). С. 25 — 69.
5. Siegel C. L. Über einige Anwendungen Diophantischer Approximationen // Abhandlungen der Preuss. Akad. d. Wissensch., 1929, Phys.-Math. Klasse. PP. 1–70.

6. Thue A. Über Annäherungswerte algebraischer Zahlen // *J. reine ang. Math.* 1910. Vol. 135. PP. 284–305.

REFERENCES

1. Dobrovolskii M. N. 2010 "On the decomposition of irrationalities of the third degree into continuous fractions" *Chebyshevsky Sb.* vol. XI, №. 4 (36). pp. 4–24.
2. V. A. Kretschmar 1939, "On the upper limit of the number of representations of an integer by some binary forms of the fourth degree", *Izv. AN USSR. Ser. matem.* Vol. 3, issue 3. pp. 289–302.
3. E. A. Morozova 2015, "Tue polynomials for quadratic irrationalities", *Algebra, number theory and discrete geometry: modern problems and applications : Proceedings of the XIII International Conference, Tula, April 15-17, 2015 / Tolstoy Tula State Pedagogical University. – Tula: Tula State Pedagogical University named after L.N. Tolstoy, – pp. 161-168.*
4. Podsypanin V. D. 2010 "On Thue polynomials and the expansion of irrationalities of the fourth degree into a continued fraction" *Chebyshevskii sbornik.* T. XI, vol. 4 (36). pp. 25–69.
5. Siegel C. L. 1929, "Über einige Anwendungen Diophantischer Approximationen", *Abhandlungen der Preuss. Akad. d. Wissensch., Phys.-Math. Klasse.* PP. 1–70.
6. Thue A. 1910. "Über Annäherungswerte algebraischer Zahlen", *J. reine ang. Math.* Vol. 135. PP. 284–305.

Получено: 17.06.2022

Принято в печать: 8.12.2022