

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. М. Белоцерковский, Л. М. Крагинский, А. М. Опарин, Численное моделирование пространственных течений в стратифицированной атмосфере, вызванных сильными крупномасштабными возмущениями,
Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2003, том 43, номер 11, 1722–1736

<https://www.mathnet.ru/zvmmf939>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.169

18 апреля 2025 г., 16:24:26



УДК 519.634

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ТЕЧЕНИЙ В СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ АТМОСФЕРЕ, ВЫЗВАННЫХ СИЛЬНЫМИ КРУПНОМАСШТАБНЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ¹⁾

© 2003 г. О. М. Белоцерковский, Л. М. Крагинский, А. М. Опарин

(123056 Москва, 2-ая Брестская ул., 19/18, Ин-т автоматизации проектирования РАН)
e-mail: lkragins@mccme.ru

Поступила в редакцию 06.02.2003 г.

Предлагается несколько новых методов для расчета атмосферных течений, описывается разработанный программный комплекс для решения подобного класса задач на параллельных компьютерах, приводятся результаты расчетов нескольких трехмерных задач: поднятия одиночного термика в атмосфере, распространения дымового облака при крупномасштабном пожаре и моделирования огненного смерча. Библ. 21. Фиг. 6.

ВВЕДЕНИЕ

Приемы численного моделирования используются сравнительно давно, но только в последнее время бурное развитие вычислительной техники позволило производить ресурсоемкие расчеты и получать физически оправданные результаты для трехмерных задач. Кроме того, использование суперкомпьютеров и параллельных программ позволяет повышать производительность вычислений (а следовательно, и точность) в порядке раз.

Тем не менее до сих пор даже полученной производительности бывает часто недостаточно. Это проявляется в задачах, где присутствуют крупномасштабные области типа атмосферы протяженностью в несколько десятков (или сотен) километров, в которых минимальная расчетная ячейка может иметь размеры порядка нескольких десятков (или сотен) метров. Зачастую такой масштаб плохо разрешает определенные физические явления. Поэтому по-прежнему так же остро стоит вопрос выбора наиболее адекватного численного метода, по-прежнему есть потребность улучшать расчетную методичку так, чтобы даже на крупной расчетной сетке были произведены как можно более точные расчеты.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Математическая модель атмосферы строится на основе системы трехмерных нестационарных уравнений Эйлера, описывающих движение многокомпонентного сжимаемого невязкого идеального газа, стратифицированного по высоте под влиянием силы тяжести, в декартовых координатах. Характерное число Рейнольдса для рассматриваемых задач очень велико: от 10^8 до 10^{10} . При таких больших Re возникающие крупномасштабные структуры (которые мы и хотим изучать) не зависят от числа Рейнольдса (см. [1]). В той же работе показано, что для таких задач можно проводить прямое численное моделирование на основе уравнений Эйлера. При этом определенную диссипацию (зависящую от размера сетки) в уравнения привносит сама схема численного решения. В работах [1]–[20] представлен накопленный опыт решения подобных задач, для которых адекватное описание удается получить на сравнительно небольших сетках.

Уравнения Эйлера, записанные в дивергентной форме, выглядят следующим образом:

$$\frac{\partial(\rho\xi_i)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\xi_i\mathbf{V}) = 0, \quad \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u\mathbf{V}) = -\frac{\partial P}{\partial x}, \quad (1a)$$

¹⁾Работа выполнена при финансовой поддержке Комплексной Программы научных исследований Президиума РАН "Математическое моделирование, интеллектуальные системы и управление нелинейными механическими системами" и РФФИ (код проекта 03-01-00700).

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \text{div}(\rho v \mathbf{V}) = -\frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \text{div}(\rho w \mathbf{V}) = -\frac{\partial P}{\partial x} - \rho g, \quad (16)$$

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \text{div}((\rho E + P)\mathbf{V}) = -\rho g w, \quad (17)$$

где t – время, x, y, z – пространственные координаты, ρ – общая плотность, ξ_i – массовые концентрации компонент, $\sum \xi_i = 1, i = 1, \dots, n, n$ – число компонент среды, $\mathbf{V} = (u, v, w)$ – вектор скорости, e – внутренняя энергия, $E = e + V^2/2$ – полная энергия, P – давление, $g > 0$ – абсолютное значение ускорения силы тяжести.

Основные расчетные переменные $\mathbf{Q} = (\rho \xi_i, \rho u, \rho v, \rho w, \rho E)$. Выбор расчетных консервативных переменных и дивергентный вид уравнений позволяет точно удовлетворять интегральным законам сохранения массы, импульса и энергии.

Система уравнений замыкается одним уравнением состояния $P = P(\rho \xi_i, \rho u, \rho v, \rho w, \rho E)$, которое для идеального газа выражается через расчетные компоненты следующим образом:

$$P = (\gamma - 1)\rho e = (\gamma - 1)\left(\rho E - \frac{1}{2}((\rho u)^2 + (\rho v)^2 + (\rho w)^2)\right)/\Sigma \rho \xi_i.$$

Система уравнений (1) может быть записана в виде

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + A \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x} + B \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial y} + C \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial z} = G,$$

где \mathbf{Q} – вектор основных расчетных переменных, A, B, C – матрицы Якоби функций, определяющих потоки \mathbf{Q} по направлениям x, y и z, G – правая часть системы уравнений.

Матрица Якоби A потоков по направлению x имеет собственные значения $(u - c, u, u, \dots, u, u + c)$, матрицы левых и правых собственных векторов Ω и Ω^{-1} могут быть представлены в виде

$$\Omega = \begin{pmatrix} (dE_k + fuc) & (dE_k + fuc) & (dE_k + fuc) & \dots & (-du - fc) & -dv & -dw & -d \\ \xi_2 & -\xi_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \xi_3 & 0 & -\xi_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 - 2dE_k & 1 - 2dE_k & 1 - 2dE_k & \dots & 2du & 2dv & 2dw & 2d \\ -v & -v & -v & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -w & -w & -w & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ (dE_k - fuc) & (dE_k - fuc) & (dE_k - fuc) & \dots & (-du + fc) & -dv & -dw & -d \end{pmatrix},$$

$$\Omega^{-1} = \begin{pmatrix} \xi_1 & 1 & 1 & \dots & \xi_1 & 0 & 0 & \xi_1 \\ \xi_2 & -1 & 0 & \dots & \xi_2 & 0 & 0 & \xi_2 \\ \xi_3 & 0 & -1 & \dots & \xi_3 & 0 & 0 & \xi_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u - c & 0 & 0 & \dots & u & 0 & 0 & u + c \\ v & 0 & 0 & \dots & v & 1 & 0 & v \\ w & 0 & 0 & \dots & w & 0 & 1 & w \\ (H - cu) & 0 & 0 & \dots & \left(H - \frac{1}{2d}\right) & v & w & (H + cu) \end{pmatrix},$$

где $E_k = (u^2 + v^2 + w^2)/2$ – кинетическая энергия, $c = \sqrt{\gamma P/\rho}$ – скорость звука, $H = E + P/\rho$ – энтальпия, $d = (\gamma - 1)/(2c^2), f = 1/(2c^2)$ – коэффициенты. Матрицы Якоби потоков по другим направлениям и матрицы их собственных векторов могут быть получены из приведенных матриц с помо-

щью перестановки соответствующих строк и столбцов и переобозначения скоростных компонент.

Число компонент среды в модели ограничивается двумя: воздух и примесь. Границей облака примеси считается определенная изолиния плотности примеси или определенная изолиния первой или второй производной этой плотности. Считается, что фазовых переходов нет и взаимодействие между фазами отсутствует.

Для постановки начальных условий используется стандартная атмосфера (см. [2]) с небольшими модификациями. На поверхности Земли давление P_0 полагается равным 1 Атм = 101325 Па, температура $T_0 = 15^\circ\text{C}$. Температура T падает линейно с коэффициентом $k = 6,5^\circ\text{C}/\text{км}$ до уровня стратосферы $Z_{\text{strat}} = 11$ км, выше которого полагается постоянной:

$$\begin{aligned} T &= T_0 - kZ, & Z \leq Z_{\text{strat}}, \\ T &= T_{\text{strat}} = T_0 - kZ_{\text{strat}}, & Z > Z_{\text{strat}}. \end{aligned} \quad (2)$$

Давление определяется из обыкновенного дифференциального уравнения, получаемого из закона гидростатического равновесия:

$$\partial P / \partial z = -\rho g = -Pg / (RT).$$

Сеточную аппроксимацию решения данного уравнения можно получить следующим образом. Полагаем, что во всей ячейке все газодинамические переменные постоянны. Тогда значение давления на границе ячеек $P_{n+1/2}$ можно определить по закону гидростатического равновесия из верхней и нижней ячеек:

$$P_{n+1/2} = P_{n+1} + \rho_{n+1} g \frac{h_{n+1}}{2} = P_n - \rho_n g \frac{h_n}{2}.$$

Подставив в эту формулу значения для плотностей $\rho_{n+1} = P_{n+1} / (RT_{n+1})$ и $\rho_n = P_n / (RT_n)$, получим выражение для давления (значение температуры известно):

$$P_{n+1} = P_n \left(1 - \frac{gh_n}{2RT_n} \right) \left(1 + \frac{gh_{n+1}}{2RT_{n+1}} \right)^{-1}. \quad (3)$$

Плотность определяется по давлению и температуре. Данный выбор начальных условий позволяет добиться устойчивости статического распределения газодинамических параметров стратифицированной атмосферы в отсутствие источников.

Границы области относятся на значительное расстояние (30–100 км), чтобы снизить возможное нефизичное влияние граничных условий. Для боковых границ условия ставятся в зависимости от задачи: в отсутствие ветра ставятся условия непротекания (нормальная компонента скорости равна нулю, производные остальных компонент вдоль нормали равны нулю) или сноса (производные всех компонент вдоль нормали равны нулю); при наличии ветра на той границе, откуда дует ветер, поддерживаются начальные условия, а на других границах ставится условие сноса.

Для горизонтальных границ требуются более сложные условия, поскольку здесь важную роль играет стратификация и сила тяжести. Использовались два типа граничных условий на поверхности Земли. В первом случае на границе поддерживаются начальные значения плотности и давления, для импульса используются условия непротекания:

$$\rho_{-1}^n = \rho_{-1}^0, \quad P_{-1}^n = P_{-1}^0, \quad (\rho u)_{-1}^n = (\rho u)_0^n, \quad (\rho v)_{-1}^n = (\rho v)_0^n, \quad (\rho w)_{-1}^n = 0, \quad Z_{-1} = 0.$$

Второй вариант задания граничных условий заключается в использовании условия стратификации (2), формулы (3) сеточного гидростатического равновесия и аппроксимации уравнений

$$\frac{\partial(\xi_2)}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial(\rho u)}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial(\rho v)}{\partial z} = 0, \quad \rho w = 0, \quad \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g = -\frac{Pg}{RT};$$

$$T_{-1}^n = T_0 - kZ_{-1}, \quad P_{-1}^n = P_0^n \left(1 + \frac{gh_0}{2RT_0} \right) \left(1 - \frac{gh_{-1}}{2RT_{-1}} \right)^{-1},$$

$$(\rho u)_{-1}^n = (\rho u)_0^n, \quad (\rho v)_{-1}^n = (\rho v)_0^n, \quad (\rho w)_{-1}^n = -(\rho w)_0^n, \quad (Z_{-1} = -Z_0).$$

Выбор значений во второй фиктивной ячейке (с номером -2) не имеет существенного значения, например, может использоваться линейная интерполяция (из ячеек с номерами -1 и 0). Постановка граничных условий на верхней границе также несильно влияет на решение: здесь использовались такие же условия, как и на нижней границе, либо вообще поддерживались начальные значения.

2. РАСЧЕТНЫЕ МЕТОДИКИ

Для расчетов использовались два основных метода. Первый метод объединяет следующие методики:

- расщепление Странга (см. [3]) по пространственным переменным (с сохранением второго порядка аппроксимации за счет смены порядка итераций),
- потоковое расщепление Стигера-Уорминга (см. [4]),
- осреднение Роу (см. [5]),
- учет массовых сил в консервативной форме,
- метод для вычисления потоков - обобщение монотонной гибридной схемы второго порядка (см. [9]) для неравномерных сеток.

Для сведения задачи к решению системы одномерных уравнений воспользуемся методом расщепления по физическим процессам и пространственным переменным (см. [6]), т.е. на каждом временном шаге нам нужно решить 3 гиперболических уравнения и учесть правую часть:

$$\frac{\partial Q'}{\partial t} + A \frac{\partial Q'}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial Q''}{\partial t} + B \frac{\partial Q''}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial Q'''}{\partial t} + C \frac{\partial Q'''}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial Q''''}{\partial t} = G.$$

В качестве начальных условий для каждого из уравнений берутся значения, рассчитанные в результате шага по предыдущему направлению. Сохранить второй порядок аппроксимации при вычислении потоков можно, меняя порядок шагов по направлениям x, y и z, например циклически, в следующем порядке: xuz, yxz, zxy, xzy, yzx, zyx.

Учет силы тяжести осуществляется после шага по z. Сила тяжести уравновешивает поток импульса, создавшийся на шаге расщепления по направлению z при расчете конвективных потоков без влияния силы тяжести. Внутренняя энергия при этом не меняется, а член -ρgw означает всего лишь учет изменения кинетической энергии из-за модификации скорости. Поэтому более точно можно учесть влияние силы тяжести по следующим формулам, сохраняющим внутреннюю энергию:

$$\rho w^{n+1} - \rho w^n = -\rho g \tau,$$

$$\rho E^{n+1} - \rho E^n = \frac{1}{2\rho} [(\rho w^{n+1})^2 - (\rho w^n)^2] \quad (\approx -\rho g w \tau).$$

Решение одномерной системы гиперболических уравнений

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial t} + A \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

сводится при переходе к характеристическим переменным к решению нескольких уравнений переноса. На каждом временном шаге в каждой точке фиксируют значение матрицы A и находят локальное решение линейной системы с постоянными коэффициентами. В методах потокового расщепления поток F представляется в виде комбинации двух потоков $F = F(F^+, F^-)$, которые рассматриваются как поток вперед F^+ и назад F^- . При использовании расщепления Стигера-Уорминга (см. [4]) таким образом выделяются характеристики с положительными и отрицательными собственными значениями:

$$F = F^+ + F^-, \quad \Lambda^\pm = \{\text{diag}(\lambda_k^\pm)\}, \quad \lambda_k^\pm = \frac{\lambda_k \pm |\lambda_k|}{2}, \quad \frac{\partial F^\pm}{\partial Q} = A^\pm = \Omega^{-1} \Lambda^\pm \Omega,$$

где Λ - диагональная матрица собственных значений, а Ω и Ω^{-1} - матрицы левых и правых собственных векторов матрицы Якоби $A = dF/dQ$.

Тогда

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F^+}{\partial x} + \frac{\partial F^-}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial t} + A^+ \frac{\partial Q}{\partial x} + A^- \frac{\partial Q}{\partial x} = 0,$$

и, умножая данное уравнение слева на Ω , а справа на Ω^{-1} , получаем несколько линейных уравнений переноса для характеристических переменных α :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \Lambda^+ \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \Lambda^- \frac{\partial \alpha}{\partial x} = 0.$$

Здесь Λ^+ аппроксимируется на левой грани ячейки, а Λ^- – на правой, поскольку слева втекают потоки с положительными скоростями (характеристическими числами), а справа – с отрицательными. Для вычисления матриц Якоби, их собственных значений и матриц перехода от одних переменных к другим на границах ячеек (в полужелтых точках) используется осреднение Роу (см. [5]):

$$\tilde{\rho} = \sqrt{\rho_i \rho_{i+1}},$$

$$\tilde{\psi} = \frac{\sqrt{\rho_i} \psi_i + \sqrt{\rho_{i+1}} \psi_{i+1}}{\sqrt{\rho_i} + \sqrt{\rho_{i+1}}}, \quad \psi = \xi, u, v, w, H.$$

Уравнение переноса $f_t + \lambda f_x = 0$ может решаться различными методами, в числе которых укажем группу приближенных римановых методов (см. [5]) и группу гибридных методов (см. [7]). Все рассматриваемые методы могут быть записаны в консервативном виде, являющемся конечно-разностной аппроксимацией уравнения переноса $f_i^{n+1} = f_i^n - \tau(F_{i+1/2} - F_{i-1/2})/h$, где вычисление потока $F_{i+1/2} = \lambda f_{i+1/2}$ зависит от метода. Шаг по времени τ выбирается из условия Куранта $\tau|\lambda|/h = C < 1$ равномерно по всем характеристикам.

При переходе к полярным или сферическим координатам можно также сохранить консервативность, записав конечно-разностную аппроксимацию в виде

$$f_i^{n+1} = f_i^n - \frac{\tau(r_{i+1/2}^{v-1} F_{i+1/2} - r_{i-1/2}^{v-1} F_{i-1/2})}{(r_{i+1/2}^v - r_{i-1/2}^v)/v},$$

где $v = 1, 2, 3$ – физическая размерность компоненты r . Эта формула является частным случаем более общей записи, использующей потоковый формализм:

$$f_i^{n+1} = f_i^n - \frac{\tau(S_{i+1/2}^{xy} F_{i+1/2} - S_{i-1/2}^{xy} F_{i-1/2})}{V_i},$$

здесь $S_{i+1/2}^{xy}$ – площадь поверхности грани криволинейной ячейки с индексом i при постоянном $z = z_{i+1/2}$, а V_i – ее объем.

Одним из самых продуктивных методов является сеточно-характеристическое обобщение (см. [8]) монотонной гибридной схемы второго порядка для уравнения переноса (см. [9]):

$$f_{i+1/2} = \alpha f_{i-1}^n + \beta f_i^n + \gamma f_{i+1}^n + \delta f_{i+2}^n,$$

$$\alpha = \frac{C-1}{2}, \quad \beta = \frac{3-C}{2}, \quad \gamma = 0, \quad \delta = 0, \quad \lambda \geq 0, \quad |f_{i+1} - f_i| \geq |f_i - f_{i-1}|,$$

$$\alpha = 0, \quad \beta = \frac{1+C}{2}, \quad \gamma = \frac{1-C}{2}, \quad \delta = 0, \quad \lambda \geq 0, \quad |f_{i+1} - f_i| < |f_i - f_{i-1}|,$$

$$\alpha = 0, \quad \beta = \frac{1-C}{2}, \quad \gamma = \frac{1+C}{2}, \quad \delta = 0, \quad \lambda < 0, \quad |f_{i+2} - f_{i+1}| > |f_{i+1} - f_i|,$$

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = \frac{3-C}{2}, \quad \delta = \frac{C-1}{2}, \quad \lambda < 0, \quad |f_{i+2} - f_{i+1}| \leq |f_{i+1} - f_i|,$$

где $C = \tau|\lambda|/(\Delta x)$ – число Куранта.

Указанные условия осуществляют переключение между четырьмя линейными схемами второго порядка, каждая из которых монотонна при указанном условии. Отдельно проверяется, что в точках стыковки результирующая гибридная схема будет обладать этими свойствами. Схема имеет второй порядок аппроксимации для гладких решений (как по пространству, так и по времени), устойчива при числе Куранта $C \leq 1$, монотонна и консервативна.

Данную схему можно обобщить на случай неравномерной сетки с переменным шагом по пространству. В обычном варианте расчет на неравномерной сетке реализуется путем замены координат $x = x(\eta)$ и решения уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \lambda \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial \eta} = 0$$

для $f(t, \eta)$. Однако можно записать схему для неравномерной сетки, не прибегая к замене координат. Пусть x_i — координаты точек (центров ячеек), в которых функция $f(t, x)$ аппроксимируется значениями f_i^n . Введем обозначения $f_i^R, f_i^L, x_i^R, x_i^L, \Delta x_i = x_i^R - x_i^L, \Delta f_{i+1/2} = f_{i+1}^n - f_i^n, h_{i+1/2} = x_{i+1} - x_i, C_i = \tau \lambda / \Delta x_i$.

Сама схема записывается в виде

$$f_i^{n+1} = f_i^n - \frac{\tau \lambda}{\Delta x_i} (f_i^R - f_i^L), \tag{4a}$$

где

$$f_i^R = \alpha_i f_{i-1}^n + \beta_i f_i^n + \gamma_i f_{i+1}^n + \delta_i f_{i+2}^n, \quad f_i^L = \alpha_i f_{i-2}^n + \beta_i f_{i-1}^n + \gamma_i f_i^n + \delta_i f_{i+1}^n, \tag{4б}$$

$$\begin{aligned} \Delta x_i = x_i^R - x_i^L &= (\alpha_i x_{i-1} + \beta_i x_i + \gamma_i x_{i+1} + \delta_i x_{i+2}) - (\alpha_i x_{i-2} + \beta_i x_{i-1} + \gamma_i x_i + \delta_i x_{i+1}) = \\ &= \alpha_i h_{i-3/2} + \beta_i h_{i-1/2} + \gamma_i h_{i+1/2} + \delta_i h_{i+3/2}. \end{aligned} \tag{4в}$$

Тогда первое дифференциальное приближение схемы (4) будет иметь вид

$$\begin{aligned} f_t + \lambda f_x &= \frac{\lambda f_{xx}}{2\Delta x_i} [\alpha_i h_{i-3/2} (2h_{i-1/2} + h_{i-3/2} - \tau \lambda) + \beta_i h_{i-1/2} (h_{i-1/2} - \tau \lambda) - \gamma_i h_{i+1/2} (h_{i+1/2} + \tau \lambda) - \\ &- \delta_i h_{i+3/2} (2h_{i+1/2} + h_{i+3/2} + \tau \lambda)] + \underline{O} \left(\tau^2 + \frac{[\max(h_{i-3/2}, h_{i-1/2}, h_{i+1/2}, h_{i+3/2})]^3}{\Delta x_i} \right). \end{aligned} \tag{5}$$

Как и в оригинальной схеме, будем использовать схемы с центральными разностями и с разностями против потока. Это значит, что $\delta_i = 0$ при $\lambda > 0$ и $\alpha_i = 0$ при $\lambda < 0$. Схема будет иметь второй порядок аппроксимации по пространству и по времени, если член в квадратных скобках в (5) равен нулю. Кроме того, $\alpha_i + \beta_i + \gamma_i + \delta_i = 1$. Из этих условий можно определить коэффициенты $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ и δ_i . Переключение осуществляется между следующими четырьмя схемами второго порядка (на самом деле схемы 2 и 3 совпадают, но определены для разных λ):

$$1) \lambda > 0, \quad \theta_i = \frac{h_{i-3/2}(2h_{i-1/2} + h_{i-3/2} - \tau|\lambda|)}{h_{i-1/2}(h_{i-1/2} - \tau|\lambda|)}, \quad \alpha_i = -\frac{1}{\theta_i - 1}, \quad \beta_i = \frac{\theta_i}{\theta_i - 1}, \quad \gamma_i = 0, \quad \delta_i = 0,$$

$$2) \lambda > 0, \quad \theta_i = \frac{h_{i-1/2}(2h_{i-1/2} - \tau|\lambda|)}{h_{i+1/2}(h_{i+1/2} + \tau|\lambda|)}, \quad \alpha_i = 0, \quad \beta_i = \frac{1}{\theta_i + 1}, \quad \gamma_i = \frac{\theta_i}{\theta_i + 1}, \quad \delta_i = 0,$$

$$3) \lambda < 0, \quad \theta_i = \frac{h_{i+1/2}(h_{i+1/2} - \tau|\lambda|)}{h_{i-1/2}(h_{i-1/2} + \tau|\lambda|)}, \quad \alpha_i = 0, \quad \beta_i = \frac{\theta_i}{\theta_i + 1}, \quad \gamma_i = \frac{1}{\theta_i + 1}, \quad \delta_i = 0,$$

$$4) \lambda > 0, \quad \theta_i = \frac{h_{i+3/2}(2h_{i+1/2} + h_{i+3/2} - \tau|\lambda|)}{h_{i+1/2}(h_{i+1/2} - \tau|\lambda|)}, \quad \alpha_i = 0, \quad \beta_i = 0, \quad \gamma_i = \frac{\theta_i}{\theta_i - 1}, \quad \delta_i = \frac{1}{\theta_i - 1}.$$

Переключение между ними осуществляется таким образом, что каждая из выбранных схем используется при условии своей монотонности. Определим условия переключения следующим образом:

$$\text{схема 1) используется при } \lambda > 0, \quad |\Delta f_{i+1/2}| \geq \sigma_1 |\Delta f_{i-1/2}|, \tag{6a}$$

$$\text{схема 2) используется при } \lambda > 0, \quad |\Delta f_{i+1/2}| \leq \sigma_2 |\Delta f_{i-1/2}|, \tag{6б}$$

схема 3) используется при $\lambda < 0$, $|\Delta f_{i-1/2}| \leq \sigma_2 |\Delta f_{i+1/2}|$. (6в)

схема 4) используется при $\lambda < 0$, $|\Delta f_{i-1/2}| \geq \sigma_1 |\Delta f_{i+1/2}|$. (6г)

Можно показать, что эти схемы монотонны при следующих условиях на сетку, σ_1 и σ_2 :

$$\sigma_1 \geq \frac{-C_{i+1}\alpha_{i+1}}{C_{i+1}(1-\alpha_{i+1}) - C_{i+2}\alpha_{i+2}}, \quad \sigma_2 \leq \frac{1 - C_i\beta_i + C_{i-1}(1-\beta_{i-1})}{C_i(1-\beta_i)}, \quad (7а)$$

$$\sqrt{2} - 1 \leq \frac{h_{j-1/2}}{h_{j-3/2}} = \frac{x_j - x_{j-1}}{x_{j-1} - x_{j-2}} \leq \sqrt{2} + 1. \quad (7б)$$

Последнее требование на отношение размеров близлежащих ячеек – не превосходить $\sqrt{2} + 1$ – не является слишком ограничительным. В реальности неравномерная сетка чаще всего задается гладкой функцией, но даже если шаг сетки увеличивается в два раза, указанное неравенство выполнено, схема монотонна и имеет второй порядок.

Области монотонности схем 1) и 2), а также схем 3) и 4) пересекаются. Наиболее адекватным выбором для σ_1 и σ_2 является $\sigma_1 = \sigma_2 = h_{i+1/2}/h_{i-1/2}$ (можно показать, что такой выбор σ_1 и σ_2 удовлетворяет условиям (7а), требуемым для обеспечения монотонности схем), что позволяет переписать условия переключения (6) схем 1)–4) в следующем виде:

схема 1) используется при $\lambda > 0$, $|\Delta f_{i+1/2}/h_{i+1/2}| \geq |\Delta f_{i-1/2}/h_{i-1/2}|$,

схема 2) используется при $\lambda > 0$, $|\Delta f_{i+1/2}/h_{i+1/2}| < |\Delta f_{i-1/2}/h_{i-1/2}|$,

схема 3) используется при $\lambda < 0$, $|\Delta f_{i-1/2}/h_{i-1/2}| \leq |\Delta f_{i+1/2}/h_{i+1/2}|$,

схема 4) используется при $\lambda < 0$, $|\Delta f_{i-1/2}/h_{i-1/2}| > |\Delta f_{i+1/2}/h_{i+1/2}|$.

Данные условия отвечают точкам смены знака второй производной и дают возможность получить в точках стыковки второй порядок аппроксимации по пространству на гладких решениях, так же, как это делается в исходной схеме для равномерного случая.

В данной записи схема (4), вообще говоря, неконсервативна, если понимать консервативность как сохранение интегральной величины

$$Sf = \sum_i \left(f_i \frac{h_{i-1/2} + h_{i+1/2}}{2} \right).$$

Однако если вычислять интегральные компоненты не как в предыдущей формуле, а в виде $\tilde{S}f = \Sigma(f_i \Delta x_i)$, то эти компоненты $\tilde{S}f$ сохраняются, и в этом смысле схема является консервативной. Кроме того, можно вычислять по указанным формулам только один поток, например поток справа, а поток слева вычислять из предыдущей ячейки. В этом случае сохраняются все интегральные величины Sf .

Второй метод, который будет рассмотрен ниже, – метод крупных частиц (см. [10]). В нем используется принцип расщепления по физическим процессам следующим образом: на лагранжевом этапе учитываются только эффекты переноса

$$\partial(Q_i)/\partial t + \text{div}(Q_i \mathbf{V}) = 0,$$

а на эйлеровом этапе, который обычно идет первым, учитываются все остальные эффекты:

$$\frac{\partial(\rho \xi_i)}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x}, \quad \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial(\rho w)}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial z} - \rho g, \quad \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} = -\text{div}(P \mathbf{V}) - \rho g w. \quad (8)$$

На лагранжевом этапе могут использоваться метод первого порядка (уголок), метод второго порядка с разностями против потока или же рассмотренная выше монотонная гибридная схема второго порядка.

К схеме для расчета на эйлеровом этапе предъявляются повышенные требования; в частности, она должна обеспечивать устойчивость всего метода. Для обеспечения устойчивости можно вводить псевдовязкость q , используя вместо давления $\tilde{P} = P + q$.

Существуют и неявные схемы для расчета на эйлеровом этапе. В целом их использование более привлекательно в силу лучшей устойчивости даже без введения псевдовязкости. В [11] пред-

ложена неявная схема для эйлера этапа, в основе которой лежит уравнение для внутренней энергии, из которого с использованием уравнения состояния выводится уравнение для давления. Преимуществом данной схемы является то, что несмотря на ее неявность, она является схемой бегущего счета и не требует дополнительных итераций. Приведем трехмерный аналог указанной схемы для уравнений Эйлера с силой тяжести. В отличие от двумерной схемы из [11] также не подразумевается равенство шагов $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ по разным пространственным направлениям.

Уравнение для давления следует из (8):

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \text{div}(P\mathbf{V}) + \rho g w = \frac{\partial(\rho \epsilon)}{\partial t} + \text{div}(P\mathbf{V}) - (\mathbf{V} \text{grad}(P)) = \frac{\partial(\rho \epsilon)}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial t} + P \text{div}(\mathbf{V}) = 0,$$

при условии

$$\rho \epsilon = f(\rho, P), \quad \frac{\partial(\rho \epsilon)}{\partial P} = \frac{\partial f(\rho, P)}{\partial P} = \kappa: \quad \frac{\partial P}{\partial t} + \kappa^{-1} P \text{div}(\mathbf{V}) = 0.$$

Аппроксимация уравнений для скорости запишется в следующем виде:

$$u_{i,j,k}^{n+1} = u_{i,j,k}^n - \frac{1}{\rho_{i,j,k}^n} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\frac{P_{i,j,k}^{n+1} + P_{i+1,j,k}^n}{2} - \frac{P_{i-1,j,k}^{n+1} + P_{i,j,k}^n}{2} \right), \quad (9a)$$

$$v_{i,j,k}^{n+1} = v_{i,j,k}^n - \frac{1}{\rho_{i,j,k}^n} \frac{\Delta t}{\Delta y} \left(\frac{P_{i,j,k}^{n+1} + P_{i,j+1,k}^n}{2} - \frac{P_{i,j-1,k}^{n+1} + P_{i,j,k}^n}{2} \right), \quad (9б)$$

$$w_{i,j,k}^{n+1} = w_{i,j,k}^n - \frac{1}{\rho_{i,j,k}^n} \frac{\Delta t}{\Delta z} \left(\frac{P_{i,j,k}^{n+1} + P_{i,j,k+1}^n}{2} - \frac{P_{i,j,k-1}^{n+1} + P_{i,j,k}^n}{2} \right) - \Delta t g, \quad (9в)$$

а уравнения для давления – в виде

$$P_{i,j,k}^{n+1} = P_{i,j,k}^n - \kappa^{-1} P_{i,j,k}^{n+1/2} \left[\frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\frac{u_{i,j,k}^{n+1} + u_{i+1,j,k}^n}{2} - \frac{u_{i-1,j,k}^{n+1} + u_{i,j,k}^n}{2} \right) + \frac{\Delta t}{\Delta y} \left(\frac{v_{i,j,k}^{n+1} + v_{i,j+1,k}^n}{2} - \frac{v_{i,j-1,k}^{n+1} + v_{i,j,k}^n}{2} \right) + \frac{\Delta t}{\Delta z} \left(\frac{w_{i,j,k}^{n+1} + w_{i,j,k+1}^n}{2} - \frac{w_{i,j,k-1}^{n+1} + w_{i,j,k}^n}{2} \right) \right], \quad (10)$$

где $P_{i,j,k}^{n+1/2} = \frac{1}{6} (P_{i-1,j,k}^{n+1} + P_{i,j-1,k}^{n+1} + P_{i,j,k-1}^{n+1} + P_{i+1,j,k}^n + P_{i,j+1,k}^n + P_{i,j,k+1}^n)$.

Подставляя в (10) значения $u_{i,j,k}^{n+1}, v_{i,j,k}^{n+1}$ и $w_{i,j,k}^{n+1}$, получаемые из (9), а затем извлекая из этого выражения $P_{i,j,k}^{n+1}$, получаем в итоге

$$P_{i,j,k}^{n+1} = \left(1 - \frac{\kappa^{-1} P_{i,j,k}^{n+1/2}}{4\rho_{i,j,k}^n} \left(\left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 + \left(\frac{\Delta t}{\Delta y} \right)^2 + \left(\frac{\Delta t}{\Delta z} \right)^2 \right) \right)^{-1} \times \\ \times \left\{ P_{i,j,k}^n - \frac{\kappa^{-1} P_{i,j,k}^{n+1/2}}{2} \left[\frac{\Delta t}{\Delta x} (u_{i+1,j,k}^n - u_{i-1,j,k}^{n+1}) + \frac{\Delta t}{\Delta y} (v_{i,j+1,k}^n - v_{i,j-1,k}^{n+1}) + \frac{\Delta t}{\Delta z} (w_{i,j,k+1}^n - w_{i,j,k-1}^{n+1}) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{2g(\Delta t)^2}{\Delta z} - \frac{1}{2\rho_{i,j,k}^n} \left(\left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 (P_{i+1,j,k}^n - P_{i-1,j,k}^{n+1} - P_{i,j,k}^n) + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \left(\frac{\Delta t}{\Delta y} \right)^2 (P_{i,j+1,k}^n - P_{i,j-1,k}^{n+1} - P_{i,j,k}^n) + \left(\frac{\Delta t}{\Delta z} \right)^2 (P_{i,j,k+1}^n - P_{i,j,k-1}^{n+1} - P_{i,j,k}^n) \right) \right] \right\}. \quad (11)$$

Формулы (9) и (11) задают схему для эйлера этапа. Сначала применяется формула (11) для вычисления давления $P_{i,j,k}^{n+1}$, а затем по вычисленному давлению находятся по формуле (9) компоненты скорости $u_{i,j,k}^{n+1}, v_{i,j,k}^{n+1}$ и $w_{i,j,k}^{n+1}$. Для проведения вычислений в точке (i, j, k) требуется

знать некоторые значения s ($n + 1$)-го временного слоя в точках $(i - 1, j, k)$, $(i, j - 1, k)$ и $(i, j, k - 1)$. Поэтому, задав любой обход области, при котором указанные точки обходятся раньше, чем (i, j, k) (например, лексикографический в любом порядке следования переменных x, y, z), получим схему бегущего счета.

3. ПАРАЛЛЕЛЬНАЯ ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

В рамках работ по численному моделированию, проведенных в ИАП РАН, был разработан программный пакет, позволяющий последовательную программу, разработанную для однопроцессорной ЭВМ, распараллелить с минимальными затратами на модификацию программного кода. В пакете используется стандартный интерфейс обмена сообщениями MPI (см. [12]), что позволяет использовать его на разных платформах, под управлением различных операционных систем, не модифицируя при этом программный код, написанный на языке C++.

Также используется модель программирования SPMD (Single Program Multiple Data), в которой одновременно исполняются несколько копий одной программы параллельно на разных процессорах. Каждый процесс программы выполняет одну и ту же программу, но в зависимости от своего номера выполняет свою порцию вычислений. Существует один мастер-процесс, который кроме выполнения общей для всех процессов вычислительной части также управляет другими процессами и осуществляет ввод/вывод данных задачи.

Возможен запуск результирующей программы, состоящей только из одного процесса. Также возможно запускать программу на кластере машин с различными операционными системами при использовании соответствующих реализаций MPI. Пакет тестировался на платформах Intel, Param, MBC-1000 с операционными системами Windows, Solaris, Linux; использовались следующие реализации MPI: WMPI, MPICH.

При использовании данного пакета внешняя структура программы не меняется, кроме того, основная масса программного кода как была, так и остается последовательной. Внешне программа скрывает свою параллельную реализацию. Логика работы программы остается одинаковой как для параллельной программы, так и для обычной. Изменяется только выделенное количество мест в программе, в которых требуется расширение логики работы обычной программы по сравнению с логикой работы одного процесса параллельной программы (со своей частью распределенных данных).

В программе реализована декомпозиция по трем пространственным переменным, что приводит к объему коммуникаций порядка $3\sqrt[3]{N}$ вместо N при декомпозиции по одной пространственной переменной. Это позволяет улучшить масштабируемость программы по числу процессоров.

Для реализации обменов данными, представленными в памяти программы не последовательно, а с определенным шаблоном, а также абстрагирования от специфики шаблона и обмениваемых данных применяются так называемые пользовательские типы данных MPI (см. [12]). Эти типы данных, описывающие шаблон, определяются в локализованном блоке в процессе инициализации программы и могут быть легко изменены. В функциях обмена тип данных используется в качестве параметра и позволяет реализовать логику обмена абстрактно; так, например, обмены в разных направлениях выполняет один и тот же программный код.

Для коммуникаций типа мастер-подчиненный используется стандартный блокирующий режим посылок. Самому себе мастер-процесс раздает данные не через посылку блокирующего сообщения, а путем прямого копирования данных. Для коммуникаций между процессами-соседями используются оптимизированные объединенные операции отправки и приема сообщения, реализованные для некоторых платформ с помощью неблокирующей операции `SendRecv`, а для некоторых – с помощью попарного чередования `Send` и `Recv`. Кроме того, при использовании нестандартных реализаций MPI проводятся дополнительные проверки, препятствующие операциям с `MPI_PROC_NULL`.

Основные операции с расчетными компонентами и потоками реализованы как векторные операции, что позволяет параметризовать количество расчетных компонент, а также их вид введением функций, вычисляющих матрицы собственных векторов и собственные значения матрицы Якоби задачи.

Начальные и граничные условия, а также другие настройки программы вынесены в отдельные файлы, которые собираются вместе с программой. Наличие простого программного интерфейса позволяет легко реализовывать альтернативные варианты, не переделывая другие части программы. Возможно добавление новых расчетных методов в существующую программу; при-

чем если метод укладывается в общую схему вычисления потоков, то требуется минимальная модификация в локализованной части программы, отвечающей за реализацию собственно расчетного метода.

Параметры программы разделяются на скалярные, векторные и функциональные. Решение новой прикладной задачи осуществляется путем задания скалярных параметров и реализации определенного числа функций, описывающих специфику задачи, которые имеют четко описанный интерфейс и компилируются с другими стабильными частями программы. Векторные параметры, такие как начальные данные, задаются в функциях с определенным интерфейсом и сохраняются в памяти до следующих вызовов.

Функциональные и алгоритмические параметры реализуются в виде функций с определенным интерфейсом. Результаты работы этих функций обычно являются промежуточными вычислениями и не сохраняются надолго. Пользователь может задавать свои алгоритмы, реализуя заданный интерфейс. Каждый из таких взаимозаменяемых алгоритмов выполняет строго ограниченные по смыслу манипуляции с данными.

В связи с указанной многовариантностью методов, наличием большого числа ортогональных дополняющих частей результирующего метода и получаемым удобством использования наиболее адекватным является объектный подход (см. [13]) к описанию солверов. При использовании данного подхода каждая часть методики (в том числе вид расщепления по пространственным переменным, выбор типа осреднения, энтропийная коррекция, конечно-разностная схема и др.) описывается отдельным программным классом. Это удобно для комбинирования существующих нужных программных блоков, описанных в виде классов, в необходимую именно для данного расчета программу. Таким образом, повышается уровень повторного использования кода, один раз созданные и, что также важно, протестированные классы, можно повторно использовать в других программах.

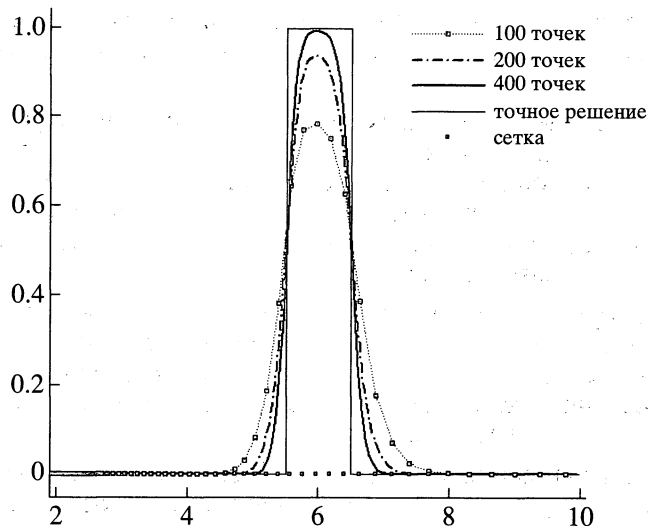
На 32 процессорах компьютера МВС-1000 с кластерной архитектурой на задаче с сеткой $100 \times 100 \times 80$ программа показывает ускорение порядка 30, что является довольно высоким показателем для машин данного класса. При этом время расчета одного часа в задаче соответствует 2 ч и 40 мин машинного времени. Это позволяет вести расчет на соответствующей сетке ($80 \times 80 \times 60$) в реальном масштабе времени.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

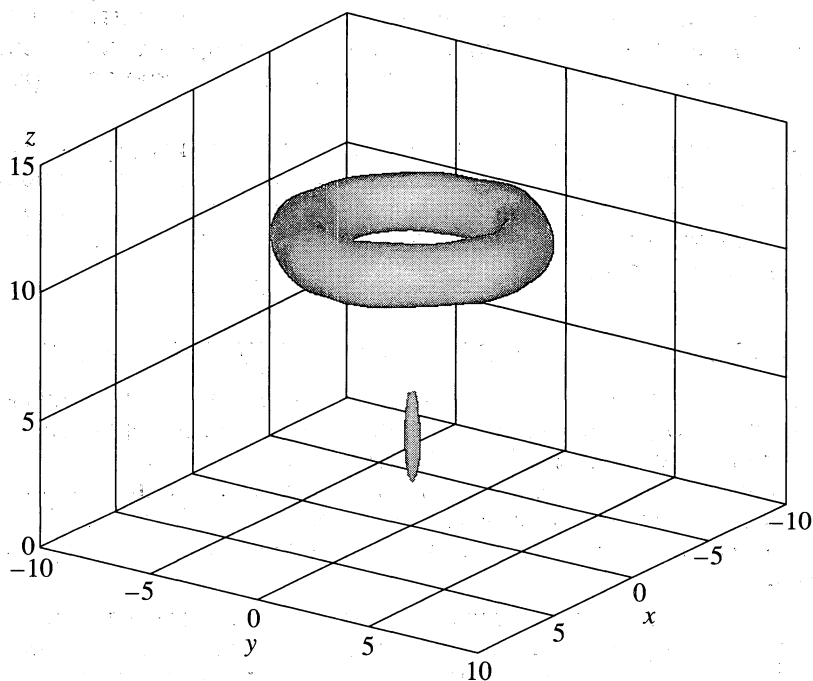
С помощью данного пакета было рассчитано несколько задач моделирования течений в атмосфере. Тестировалась программа сначала на одномерных задачах: уравнении переноса, задаче о распаде разрыва, стационарной атмосфере. Затем переходили к многомерному тестированию: были посчитаны задачи, которые неоднократно моделировались с помощью разных числовых схем и алгоритмов, в частности двойное маховское отражение (2D) (см. [14]) и подъем термика в атмосфере (3D) (см. [15]). Во всех задачах было получено сходство с другими расчетными и опытными данными.

На фиг. 1 представлено исследование сходимости гибридной схемы для неравномерной сетки на одномерном уравнении переноса. Скорость звука $\lambda = 1$, начальные условия – ступенька, решение представлено при $t = 5.5$. Сетка сгущается к нулю (использована гиперболическая замена координат $x = D^2/\eta - 0.3D$, при $D/1.3 \leq \eta \leq D/0.3$). Сеточный шаблон состоит из 100, 200, 400 точек, при этом на ступеньку в конечный момент расчета $t = 5.5$ приходится, соответственно, 5, 10 и 20 точек, что в два раза меньше, чем в равномерном случае. Количество шагов по времени при числе Куранта $C = 0.1$ равно, соответственно, 2400, 4800, 9600 (заметим, что в данном случае, чем больше число Куранта, тем лучше решение приближает исходный профиль, а при $C = 1$ вообще получается точное решение). Оба варианта схемы демонстрируют одинаковую сходимость и дают сходные по качеству результаты.

В трехмерном тесте рассматривается задача о поднятии одиночного термика (см. [15]) в стандартной, стратифицированной по высоте атмосфере. В начальный момент термик представляет собой приповерхностное облако нагретого газа в виде полусферы радиуса $R = 1360$ м. Температура в центре облака $T_0 = 7085$ К и далее падает экспоненциально до границ облака $T = T_0 \exp(-Br^2/R^2)$, $B = 1$. Облако газа представлено на фиг. 2 в момент времени $t = 4$ мин. Облако сворачивается в тороидальное кольцо (к 2–2.5 мин), вращающееся в вертикальной плоскости. Точки с максимальной завихренностью несколько смещены вверх по отношению к центральному экватору тора. Это и обеспечивает подъем термика. Высота подъема и радиус кольца рас-



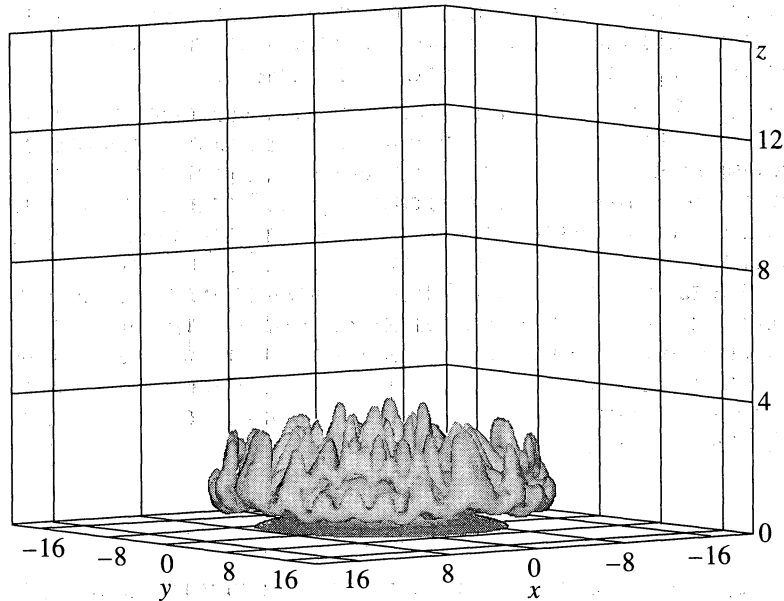
Фиг. 1.



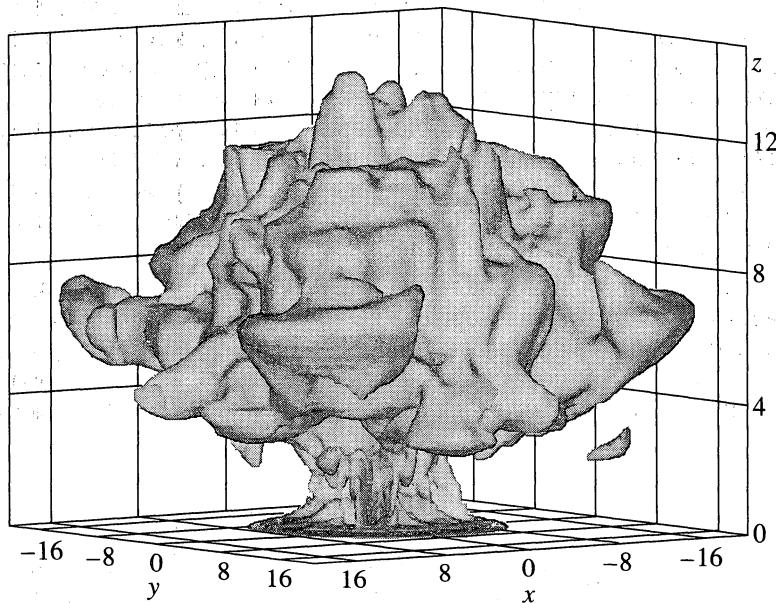
Фиг. 2.

тут приблизительно как $C\sqrt{t}$ до тех пор, пока облако не достигнет уровня стратосферы, после чего подъем облака останавливается.

В задаче о крупномасштабном пожаре (см. [16], [17]) сам пожар моделируется источником энергии и примеси. Источник горения поверхностный, с радиусом 10 км, с мощностью выделения энергии 0.05 МВт/м^2 , что составляет общую мощность энерговыделения источника $q = 1.57 \times 10^7 \text{ МВт}$. Облако горения визуализируется концентрацией легковетесной примеси, извергаемой в источнике. Источник работает в течение часа, затем выключается. Размер сетки составляет $128 \times 128 \times 64$. Сетка увеличивается по мере удаления от центра и от поверхности Земли. Размер одной ячейки в центре области составляет порядка 300 м. Боковые границы отнесены на расстояние в 30 км, верхняя граница 24 км. На фиг. 3 и 4 представлено положение облака примеси на моменты времени $t = 10 \text{ мин}$ и 1 ч. Высота подъема конвективной колонки составляет на момент времени 1.5 ч порядка 13.5 км, что соответствует результатам статьи [16], где утверждается, что



Фиг. 3.



Фиг. 4.

для источников с радиусом $R \geq 8$ км высота подъема отличается (в меньшую сторону) от эмпирической формулы из [18] для точечного источника $z = Aq^{1/4}$, где q – общая мощность энерговыделения, измеряемая в МВт, а z – высота подъема в километрах, при $A = 0.255 - 0.31$ (см. [19]).

В начальные моменты времени на краю источника в вертикальной плоскости образуется вихрь, приводящий к началу подъема облака по периметру источника. Затем, в силу того, что выделяется большая энергия, течение быстро становится неустойчивым, а в области над очагом пожара наблюдается интенсивное перемешивание горячего воздуха, приходящего из источника, и холодного атмосферного воздуха. При этом образуются характерные для неустойчивости Рэлея–Тейлора (см. [20]) структуры. Характерные струи горячего воздуха сначала поднимаются вверх, затем охлаждаются и стекают на некоторое расстояние вниз, образуя грибообразные пузыри. Заметно явление укрупнения масштаба струй с течением времени. К 15 мин в центре об-

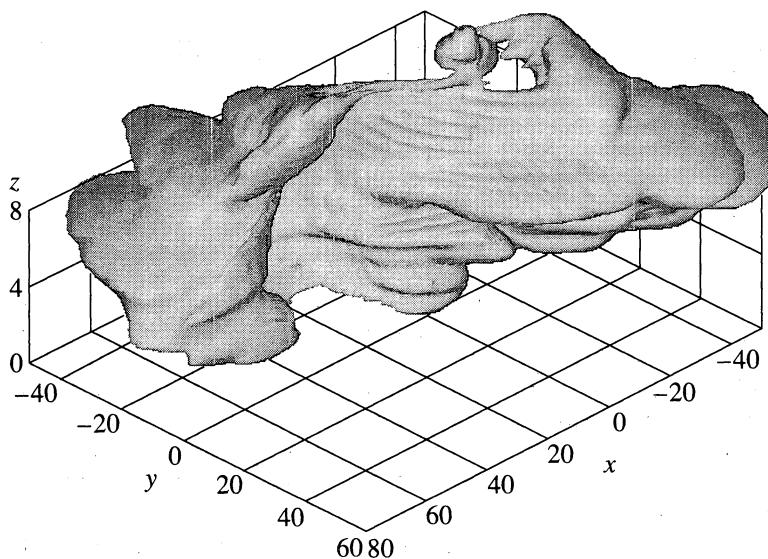
лака образуется конвективная колонка, в которой течение имеет направленное движение вверх. Облако достигает стратосферы, однако основная масса облака, сосредоточенная у Земли, продолжает подниматься и перемешиваться в процессе подъема.

К моменту времени 25–30 мин облако выходит на характерные высоты растекания, сосредоточенные в диапазоне от 3.5 до 9 км. При дальнейшем распространении облако развивается неравномерно по всем направлениям в горизонтальной плоскости, что обусловлено определенным типом неустойчивости, нарушающей осевую симметрию. Наличие выделенных направлений декартовой сетки определяет эти направления развития языков облака: вдоль лучей, параллельных координатным направлениям, и лучей, идущих под 45° к ним. При этом языки чередуют несколько выделенных высот растекания: 4.5, 6.5 и 8.5 км в зависимости от направления. Наличие нескольких языков облака было замечено также и в осесимметричной постановке в [16]. Асимметрия также проявляется и в ножке пожара, имеющей на порядок меньший радиус, чем радиус очага. Ножка устойчиво существует вплоть до выключения источника в момент времени 1 ч. На дальних моментах времени наблюдается колебание облака относительно средней высоты растекания с частотой Вейсяля–Брента

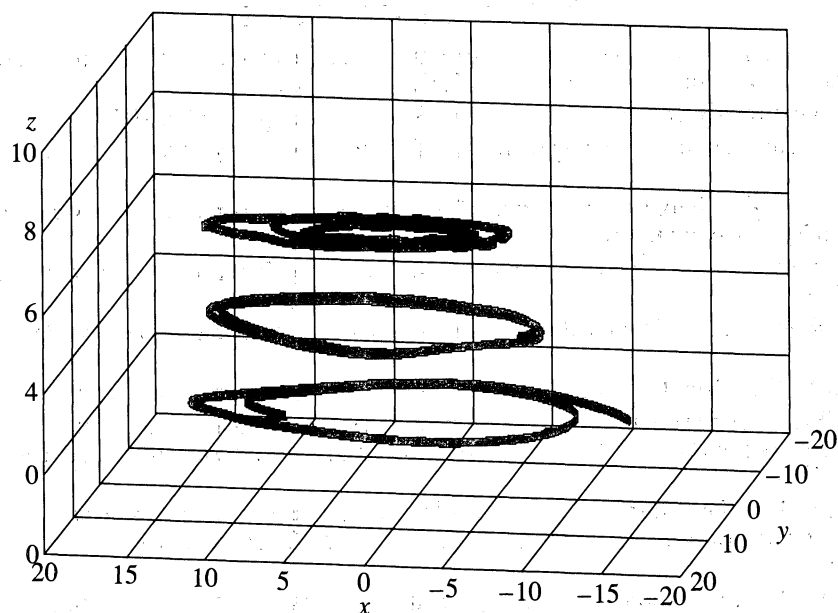
$$v = \sqrt{\frac{g \partial \rho}{\rho \partial t}}$$

Следующий эксперимент моделирует явление огненного шторма (см. [21]) Проведено сравнение распространения облака загрязнения в случае отсутствия ветра и при наличии завихренности ветрового потока. В данной постановке пожар, моделируемый источником загрязняющей примеси и энергии радиусом 10 км, находится на границе двух крупномасштабных сред, движущихся в противоположных направлениях со скоростью 5 м/с. В реальности такое наблюдается при встрече циклона и антициклона или при взаимодействии циклона или антициклона с морскими ветрами. На фиг. 5 представлено распределение облака примеси в постановке задачи огненного шторма. Визуализируется определенная изоповерхность плотности легковесной примеси, извергаемой в источнике. Представленный рисунок соответствует моменту времени $t = 3$ ч. Максимальная высота подъема облака 14 км достигается за промежуток времени ~ 40 мин, после этого высота подъема начинает снижаться и составляет к моменту окончания расчета (3 ч 20 мин) 11 км. В данном случае нет ярко выделенной высоты растекания, высота, на которой достигается максимум интегрального содержания примеси составляет 6.5 км.

Оба показателя приблизительно совпадают с соответствующими цифрами для расчета без закрутки, однако нужно также учитывать, что в случае огненного шторма вихрь развивается не одновременно и за это время две половины облака успевают удалиться друг от друга на определенное расстояние. Соответственно, энергия каждой из частей разнесенного облака равна лишь половине общей энергии. Поэтому более адекватно сравнивать высоты растекания с высотами



Фиг. 5.



Фиг. 6.

в случае одиночного пожара с вдвое меньшим энерговыделением или с двумя взаимодействующими пожарами, каждый из которых имеет вдвое меньшее энерговыделение, но удаленными на некоторое расстояние. В обоих случаях высоты растекания меньше, чем в случае с одним источником с таким же энерговыделением, и меньше, чем в случае с закруткой, поскольку часть кинетической энергии вихря преобразуется во внутреннюю энергию и в вертикальную составляющую скорости.

На фиг. 5 также видна характерная форма воронки, образованной вихрем. Наиболее сильный вихрь наблюдается у поверхности Земли. Крупномасштабная вихревая структура формируется к моменту времени 0.5 ч. На начальных стадиях образуется несколько меньших по размеру вихрей, которые затем взаимодействуют и складываются в один большой, который продолжает устойчиво существовать, возможно, перемещаясь в пространстве. Устойчивая структура вихря наблюдается от поверхности Земли до уровня порядка 9 км. Завихренность и масштаб вихря уменьшаются от поверхности Земли до указанного уровня. Выше также присутствуют вихри (один или несколько), но они не составляют устойчивой структуры, наблюдаемой на нижних уровнях. На фиг. 6 показаны трубки тока в данном течении на уровнях 2, 4 и 6 км. Вертикальная составляющая скорости в точках, через которые они проходят, практически отсутствует, поэтому все трубки находятся приблизительно на одном уровне.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе с помощью численных методов на параллельных компьютерах моделируются атмосферные течения, возникающие под действием крупномасштабных высокоэнергетических источников. Рассматривается модель на основе трехмерных нестационарных уравнений Эйлера в поле силы тяжести. Предлагаются несколько новых численных методов, в том числе монотонный гибридный метод второго порядка для неравномерных сеток и модификация метода крупных частиц для трехмерных уравнений Эйлера с силой тяжести, с неявной схемой бегущего счета для эйлерова этапа. Описывается разработанный программный комплекс для решения подобного класса задач на параллельных компьютерах, приводятся результаты тестовых расчетов и результаты нескольких трехмерных расчетов. Изучается распространение дымового облака при крупномасштабном пожаре. Впервые прослежено развитие огненного смерча в аналогичной постановке при наличии крупномасштабного вихря.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белоцерковский О.М. Прямое численное моделирование свободной развитой турбулентности // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1985. Т. 25. № 12. С. 1856–1882.
2. Таблицы стандартной атмосферы. ГОСТ 4401-48. М.: Стандартизация, 1974.
3. Strang G. On the construction and comparison of difference schemes // SIAM J. Numer. Anal. 1968. V. 5. P. 506–517.
4. Steger J.L., Warming R.F. Flux vector splitting of the inviscid gasdynamics equations with application to finite difference methods // J. Comput. Phys. 1981. V. 40. P. 263–293.
5. Roe P.L. Approximate Riemann solvers, parameter vectors and difference schemes // J. Comput. Phys. 1981. V. 43. P. 357–372.
6. Ковеня В.М., Яненко Н.Н. Метод расщепления в задачах газовой динамики. Новосибирск: Наука, 1981.
7. Магомедов К.М., Холодов А.С. Сеточно-характеристические численные методы. М.: Наука, 1988.
8. Опарин А.М. Численное моделирование проблем, связанных с интенсивным развитием гидродинамических неустойчивостей // Новое в числ. моделировании: алгоритмы, вычисл. эксперимент, результаты. М.: Наука, 2000.
9. Белоцерковский О.М., Гуцин В.А., Коньшин В.Н. Метод расщепления для исследования течений стратифицированной жидкости со свободной поверхностью // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1987. Т. 27. № 4. С. 594–609.
10. Белоцерковский О.М., Давыдов Ю.М. Метод крупных частиц в газовой динамике. М.: Наука, 1982.
11. Гришин Ю.А. Новые схемы метода крупных частиц и их использование для оптимизации газоздушных трактов двигателей // Матем. моделирование. 2000. Т. 14. № 8. С. 51–55.
12. Snir M., Otto S., Huss-Lederman S. et al. MPI: The Complete Reference. Cambridge: MIT Press, 1996.
13. Буч Г. Объектно-ориентированное проектирование с примерами применения. М.: Конкорд, 1992.
14. Glaz H.M., Colella P., Glass I., Deschambault R.L. A numerical study of oblique shock-wave reflections with experimental comparisons // Proc. Roy. Soc. London. 1985. V. A 398. P. 117–140.
15. Андрущенко В.А., Горбунов А.А., Пасконов В.М., Чудов Л.А. Решение задачи о взаимодействии четырех приземных термиков на многопроцессорном комплексе ЕС 1037-ЕС 2706 // Матем. моделирование. 1992. Т. 4. № 3. С. 40–52.
16. Музафаров И.Ф., Утюжников С.В. Численное моделирование конвективных колонок над большим пожаром в атмосфере // Теплофиз. высоких т-р. 1995. Т. 33. № 4. С. 594–601.
17. Antonenko M.N., Konyukhov A.V., Kraginskii L.M. et al. Numerical modeling of intensive convective flows in atmosphere, induced by large-scale fire // CFD Journal. 2001. V. 10. № 3. P. 372–375.
18. Morton B.R., Taylor G.T., Turner Y.S. Turbulent gravitational convection from maintained an instantaneous sources // Proc. Roy. Soc. A. 1956. V. 234. № 1196. P. 1.
19. Голицын Г.С., Гостинцев Ю.А., Солодовник А.Ф. Турбулентная плавучая струя в стратифицированной атмосфере // Прикл. матем. техн. физ. 1989. № 6. С. 61.
20. Белоцерковский О.М., Опарин А.М. Численный эксперимент в турбулентности: от порядка к хаосу. М.: Наука, 2000.
21. Андрущенко В.А., Шевелев Ю.Д. Численное моделирование трехмерных вихревых течений в неоднородной атмосфере // Изв. РАН. Мех. жидкости и газа. 1997. № 2. С. 30–38.