И. В. Расина, О. В. Фесько, Достаточные условия относительного минимума для дискретно-непрерывных систем,
Программные системы: теория и приложения, 2020, том 11, выпуск 2, 47–59

https://www.mathnet.ru/ps365

ISSN 2079-3316 ПРОГРАММНЫЕ СИСТЕМЫ: ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ т. 11, №2(45), с. 47–59

ББК B182:B185.42
ГРНТИ 27.37.17,28.15.19,89.23.41
УДК 517.977

И. В. Расина, О. В. Фесько

Достаточные условия относительного минимума для дискретно-непрерывных систем

Аннотация. На основе аналога достаточных условий оптимальности Кротова выводятся достаточные условия относительного минимума для дискретно-непрерывных систем (ДНС). Эти условия могут быть использованы как проверочные для предлагаемого режима управления, так и для построения численных методов.

Ключевые слова и фразы: гетерогенные системы, задача оптимального управления, локальный экстремум.

Введение

Гибридные системы, к которым относят системы переменной структуры [1], дискретно-непрерывные системы [2], логико-динамические системы [3, 4], импульсные системы [5] и ряд других, заняли прочное место в теории оптимального управления. Иногда вместо термина гибридные употребляют название — гетерогенные. Им отводят секции на конференциях по управляемым системам, по этой же тематике издаются специальные журналы. Для каждого типа таких систем строятся математические модели и предлагаются методы их изучения и исследования.

Далее рассматривается один из классов гибридных систем: так называемые дискретно-непрерывные системы (ДНС), для которого характерна с течением времени смена описаний в терминах управляемых дифференциальных систем. Для указанного класса в [2, 6–8] предложена двухуровневая математическая модель, в которой нижний уровень представляет собой описания однородных непрерывных процессов на отдельных этапах, а верхний уровень (дискретный) связывает эти описания в единый процесс и управляет функционированием всей системы в целом с целью обеспечения минимума функционала.

Для такой модели получены достаточные условия оптимальности типа Кротова и построены методы улучшения управления [6–8]. Указанные достаточные условия позволяют найти глобальный минимум функционала в поставленной ЗОУ. Однако для практических задач такой поиск сопряжен с большим количеством трудностей обусловленных, например, сложной структурой множества допустимых управлений или специфическими ограничениями на переменные состояния. Поэтому большинство разработанных численных методов, начиная с градиентного, позволяют найти лишь относительный минимум функционала. Однако проверить, действительно ли найденное решение или предлагаемое специалистами, из области практической задачи, доставляет функционалу относительный минимум не представляется возможным. Цель работы — ликвидировать этот пробел: получить достаточные условия относительного минимума, которые можно использовать для оценки предлагаемого решения задачи, а в дальнейшем для построения численных методов.

1. Модель дискретно-непрерывной системы

Пусть задана абстрактная дискретная управляемая система [9]:

$$(1)\qquad x(k+1)=f\left(k,x(k),u(k)\right),\qquad k\in\mathbf{K}=\{k_I,k_I+1,\dots,k_F\},$$

где k — номер шага (этапа), не обязательно физическое время, x и u — соответственно переменные состояния и управления, f — оператор. Все указанные объекты — произвольной природы (возможно, различной) для различных k, $\mathbf{U}(k,x)$ — заданное при каждом k и x множество, k_I,k_F — начальный и конечный шаги соответственно. На некотором подмножестве $\mathbf{K}'\subset\mathbf{K}$, $k_F\notin\mathbf{K}'$ действует непрерывная система нижнего уровня

$$(2)\qquad \dot{x}^c=\frac{dx^c}{dt}=f^c(z,t,x^c,u^c),\qquad t\in\mathbf{T}(z)=[t_I(z),t_F(z)],$$

$$x^c\in\mathbf{X}^c(z,t)\subset\mathbb{R}^{n(k)},\quad u^c\in\mathbf{U}^c(z,t,x^c)\subset\mathbb{R}^{p(k)},\quad z=(k,\ x,\ u^d).$$

Здесь $\mathbf{U}^c(z,t,x^c)$ — заданное множество.

Оператор правой части (1) имеет вид

$$f(k,x,u)=\theta(z,\gamma^c),$$

где

$$\gamma^c=(t_I,x^c_I,\ t_F,x^c_F)\in\mathbf{\Gamma}^c(z),$$
$$\mathbf{\Gamma}^c(z)=\left\{\gamma^c:\ t_I=\tau(z),\ x^c_I=\xi(z),\ (t_F,x^c_F)\in\mathbf{\Gamma}^c_F(z)\right\}.$$

Здесь $z = (k, x, u^d)$ — совокупность переменных верхнего уровня, играющих на нижнем уровне роль параметров, u^d — переменная управления произвольной природы, $t_I = \tau(z)$, $x_I^c = \xi(z)$ — заданные функции z.

Решением этой двухуровневой системы считается набор $m = \big(x(k), u(k)\big)$, называемый *дискретно-непрерывным процессом.* При $k \in \mathbf{K}'$ имеется в виду $u(k) = \big(u^d(k), m^c(k)\big)$, где $m^c(k) \in \mathbf{D}^c\big(z(k)\big)$ — непрерывный процесс $\big(x^c(k,t), u^c(k,t)\big)$, $t \in \mathbf{T}\big(z(k)\big)$. Здесь под $\mathbf{D}^c(z)$ подразумевается множество допустимых процессов m^c, удовлетворяющих указанной дифференциальной системе (2) с дополнительными ограничениями. Предполагается, что $u^c(k,t)$ — кусочно-непрерывные функции, а $x^c(k,t)$ — кусочно-гладкие (на каждом дискретном шаге k).

Совокупность элементов m, удовлетворяющих всем выше перечисленным условиям, обозначим через $\mathbf{D}$ и назовем множеством допустимых дискретно-непрерывных процессов.

Для модели (1), (2) рассматривается задача о поиске минимума на $\mathbf{D}$ функционала $I = F(x(k_F))$ при фиксированных $k_I = 0$, $k_F = K$, $x(k_I)$ и дополнительных ограничениях

$$x(k) \in \mathbf{X}(k), \quad x^c \in \mathbf{X}^c(z,t), \tag{3}$$

$\mathbf{X}(k)$, $\mathbf{X}^c(z,t)$ — заданные множества.

Заметим, что модель (1), (2) удобна для представления неоднородных управляемых процессов. Ее нижний уровень представляет собой описания однородных процессов на отдельных этапах, а верхний — связывает эти описания в единый процесс и управляет функционированием всей системы в целом. В различных задачах управления, в частности в задачах оптимизации, оба уровня рассматриваются во взаимодействии. Взаимодействие с каждой подсистемой нижнего уровня осуществляется через границу этой подсистемы и соответствующего непрерывного процесса γ^c.

Для удобства изложения приведем используемые далее основные конструкции и сами достаточные условия оптимальности.

2. Достаточные условия улучшения и оптимальности управления

Достаточные условия оптимальности для такой модели получаются по аналогии с условиями Кротова для дискретных и непрерывных систем следующим образом. Из ограничений множеств $\mathbf{D}$ и $\mathbf{D}^c$ исключаются дискретная цепочка и дифференциальная система, и вводятся функционалы $\varphi(k,x)$, $\varphi^c(z,t,x^c)$. Последний можно рассматривать как параметрическое семейство функций от аргументов t, x^c с параметром z, которые считаются непрерывными, и по крайней мере, непрерывно-дифференцируемыми по этим аргументам, где $z = \Big(k, x(k), u^d(k)\Big)$. Кроме того, рассматривается обобщенный лагранжиан по аналогии с лагранжианами Кротова для дискретных и непрерывных систем:

$$
\begin{aligned}
L = G\left(x(k_F)\right) - \sum_{\mathbf{K}\setminus\mathbf{K}'\setminus k_F} R\left(k, x(k), u(k)\right) + \\
+ \sum_{\mathbf{K}'} \Bigg(G^c\Big(z(k), \gamma^c\left(z(k)\right)\Big) - \\
- \int\limits_{\mathbf{T}\left(z(k)\right)} R^c\left(z(k), t, x^c(k,t), u^c(k,t)\right) dt \Bigg),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
G(x) &= F(x) + \varphi(k_F, x) - \varphi\left(k_I, x(k_I)\right), \\
R(k,x,u) &= \varphi\left(k+1, f(k,x,u)\right) - \varphi(k,x), \\
G^c(z,\gamma^c) &= -\varphi\left(k+1, \theta(z,\gamma^c)\right) + \varphi(k,x) + \varphi^c(z, t_F, x^c_F) - \\
&\quad - \varphi^c(z, t_I, x^c_I), \\
R^c(z,t,x^c,u^c) &= \varphi^{c\mathrm{T}}_{x^c} f^c(z,t,x^c,u^c) + \varphi^c_t(z,t,x^c), \\
\mu^c(z,t) &= \sup\left\{R^c(z,t,x^c,u^c) :\ x^c \in \mathbf{X}^c(z,t),\ u^c \in \mathbf{U}^c(z,t,x^c)\right\}, \\
l^c(z) &= \inf\left\{G^c(z,\gamma^c) :\ \gamma^c \in \mathbf{\Gamma}(z),\ x^c \in \mathbf{X}^c(z,t_F)\right\}, \\
\mu(k) &= \begin{cases} \sup\left\{R(k,x,u) :\ x \in \mathbf{X}(k),\ u \in \mathbf{U}(k,x)\right\}, & t \in \mathbf{K}\setminus\mathbf{K}', \\ -\inf\Big\{l^c(z) :\ x \in \mathbf{X}(k),\ u^d \in \mathbf{U}^d(k,x)\Big\}, & k \in \mathbf{K}', \end{cases} \\
l &= \inf\{G(x) :\ \ x \in \mathbf{\Gamma} \cap \mathbf{X}(K)\}.
\end{aligned}
$$

Здесь $\varphi^c_{x^c}$ — градиент φ^c в пространстве (x^c), T — знак транспонирования.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть имеются последовательность дискретно-непрерывных процессов $\{m_s\} \subset \mathbf{D}$ и функционалы φ, φ^c, такие что:*

1) *$\mu^c(z,t)$ — кусочно-непрерывна при каждом z;*
2) *$R\left(k, x_s(k), u_s(k)\right) \to \mu(k)$, $k \in \mathbf{K}$;*
3) *$\int_{\mathbf{T}(z_s)} \Big(R^c\left(z_s, t, x^c_s(t), u^c_s(t^c)\right) - \mu^c(z_s,t)\Big)\, dt \to 0$ при всех $k \in \mathbf{K}'$ и $t \in \mathbf{T}(z_s)$;*

4) $G^c(z_s,\gamma_s^c) - l^c(z_s) \to 0,\ k \in \mathbf{K}'$;

5) $G\big(x_s(t_F)\big) \to l$.

Тогда последовательность $\{m_s\}$ *— минимизирующая для* I *на* $\mathbf{D}$.

Доказательство дано в [6, 8].

3. Относительный минимум

Предположим, что $x^c(k,t_I) = \xi\big(k,x(k)\big)$, $k_I, k_F, x(k_I), t_I(k), t_F(k)$ фиксированы, ограничения на переменные состояния обоих уровней и управления верхнего уровня отсутствуют и подсистемы нижнего уровня не зависят от u^d, $\mathbf{X(k)} = \mathbb{R}^{d(k)}$, $\mathbf{X^c(k,t)} = \mathbb{R}^{p(k)}$, $\mathbf{U(k,x)} = \mathbb{R}^{r(k)}$, а используемые конструкции достаточных условий оптимальности таковы, что справедливы все ниже следующие операции. Пусть $\bar{x}(k), \bar{x}^c(k,t)$ элементы из $\mathbf{D}$, причем имеется, по крайней мере, по одному элементу $u(k), u^c(k,t)$, соответствующих значениям $\bar{x}(k+1)$, $\bar{x}^c(k,t)$, а именно $\bar{u}(k), \bar{u}^c(k,t)$, которые являются внутренними точками множеств $\mathbf{U}, \mathbf{U^c}$.

Обозначим через $\mathbf{D}_\epsilon$ подмножество элементов множества $\mathbf{D}$, удовлетворяющих дополнительным условиям

$$|x(k) - \bar{x}(k)| < \epsilon, \quad |x^c(k,t) - \bar{x}^c(k,t)| < \epsilon, \quad \epsilon > 0.$$

Будем говорить, что функционал I достигает на дискретно-непрерывном процессе $\bar{m}$ относительного минимума на $\mathbf{D}$, если $I(\bar{m}) = \inf\limits_{\mathbf{D}_\epsilon} I$. На основании выше указанной теоремы достаточными условиями относительного минимума функций R, R^c являются:

$$dR = 0, \qquad dP^c = 0, \tag{4}$$

$$d^2R < 0, \qquad d^2P^c < 0, \tag{5}$$

где $P^c(k,t,x^c) = \sup\limits_{u^c \in \mathbf{U^c}} R^c(k,t,x^c,u^c)$.

Рассмотрим конкретный вид этих условий, как указано выше, для задачи со свободным правым концом, т.е. когда $x(k_I)$ фиксировано, а $x(k_F) \in \mathbb{R}^{d(k)}$ свободно. При этом будем считать, что множество $\mathbf{\Gamma}^c(z)$ имеет вид: $\mathbf{\Gamma}^c(z) = \{\gamma^c : \ x_I^c = \xi(z),\ x_F^c \in \mathbb{R}^{p(k)}\}$.

Из условия (4) следует, что

$$R_x = 0, \qquad R_u = 0, \qquad P^c_{x^c} = 0, \qquad P^c_x = 0, \tag{6}$$

где $dR = R_x^T\Delta x + R_u^T\Delta u$. Все указанные производные подсчитаны на элементе $\bar{m}$.

Из (6) имеем:

$$\psi(k) = H_x, \qquad H_u = 0, \tag{7}$$
$$H(k,\psi,x,u) = \psi^T(k+1)f(k,x,u), \qquad k \in \mathbf{K} \setminus \mathbf{K}',$$

$$\dot{\psi}^c(k,t) = -\mathcal{H}^c_{x^c}, \qquad \dot{\lambda}(k,t) = \mathcal{H}^c_x, \tag{8}$$
$$H(k,\psi,x^c_I,x^c_F) = \psi^T(k+1)\theta(k,x^c_I,x^c_F), \qquad k \in \mathbf{K}' \setminus k_F,$$
$$H^c(k,t,x,x^c,u^c) = \psi^{c\mathrm{T}}(k,t)f^c(k,t,x^c,u^c), \qquad \mathcal{H}^c = \sup_{u^c} H^c.$$

Условие $d^2R < 0$ или

$$d^2R = \Delta x^T R_{xx}\Delta x + 2\Delta x^T R_{xu}\Delta u + \Delta u^T R_{uu}\Delta u < 0$$

для $k \in \mathbf{K} \setminus \mathbf{K}'$, как и в [10], заменим равносильными:

$$\max_{\Delta u} d^2R < 0, \tag{9}$$

$$\Delta u^T R_{uu}\Delta u < 0. \tag{10}$$

Поскольку максимум достигается в стационарной точке, будем иметь $R^T_{xu}\Delta x + R_{uu}\Delta u = 0$, откуда $\Delta u = -R^{-1}_{uu}R_{xu}\Delta x$. Тогда $\max\limits_{\Delta u} d^2R = \Delta x^T(R_{xx} - R_{xu}R^{-1}_{uu}R^T_{xu})\Delta x$.

Вводя в рассмотрение отрицательно определенную матрицу $\Theta(k)$ и с учетом вида производных $R_{xx},\ R_{xu},\ R_{uu}$, условие (6) запишем в виде равенства:

$$\sigma(k) = f^T_x\sigma(k+1)f_x + H_{xx} - H_{xu}H^{-1}_{uu}H_{ux} - \Theta(k), \tag{11}$$

где $\sigma(k) = \varphi_{xx}(k,x)$. Рассмотрим теперь условие

$$d^2P^c = \Delta x^{c\mathrm{T}} P^c_{x^cx^c}\Delta x^c + 2\Delta x^{c\mathrm{T}} P_{x^cx}\Delta x + \Delta x^T P_{xx}\Delta x < 0.$$

Матрица M вторых производных рассматриваемого дифференциала имеет вид:

$$M = \begin{pmatrix} P^c_{x^cx^c} & P^c_{x^cx} \\ P^c_{xx^c} & P^c_{xx} \end{pmatrix}.$$

Введем в рассмотрение матрицу

$$\Theta^* = \begin{pmatrix} \Theta_2 & 0 \\ 0 & \Theta_3 \end{pmatrix},$$

где Θ_2, Θ_3 — отрицательно определенные матрицы. Тогда условие $d^2P^c < 0$ представимо в виде равенства $M = \Theta^*$, из которого следуют уравнения:

$$\dot\sigma^c = -\mathcal{H}^c_{x^c x^c} - \mathcal{H}^c_{x^c\psi^c}\sigma^c - \sigma^c\mathcal{H}^{c\mathrm{T}}_{x^c\psi^c} - \sigma^c\mathcal{H}^c_{\psi^c\psi^c}\sigma^c + \Theta_2(k,t), \tag{12}$$

$$\dot\beta = -\mathcal{H}^c_{xx} - \omega\mathcal{H}_{\psi^c x} - \mathcal{H}_{x\psi^c}\omega - \omega\mathcal{H}_{\psi^c\psi^c}\omega + \Theta_3(k,t), \tag{13}$$

$$\dot\omega = -\mathcal{H}^c_{xx^c} - \mathcal{H}^c_{x^c\psi^c}\omega - \sigma^c\mathcal{H}^c_{\psi^c x} - \sigma^c\mathcal{H}^c_{\psi^c\psi}\omega. \tag{14}$$

Нетрудно видеть, что на множестве $\mathbf{K}'$

$$\begin{aligned}\sigma(k) = \theta_x^{\mathrm{T}}\sigma(k+1)\theta_x + H_{xx} + \xi_x^{\mathrm{T}}\theta_{x_I^c}\sigma(k+1)\theta_x + \\ + \theta_x^{\mathrm{T}}\sigma(k+1)\theta_{x_I^c}\xi_x + \xi_x^{\mathrm{T}}\theta_{x_I^c}^{\mathrm{T}}\sigma(k+1)\theta_{x_I^c}\xi_x + \\ + \xi_x^{\mathrm{T}}\sigma^c(k,t_I)\xi_x + \xi_x\omega^T(k,t_I) + \omega(k,t_I).\end{aligned} \tag{15}$$

Здесь $\sigma^c(k,t) = \varphi^c_{x^c x^c}(k,t,x,x^c)$, $\beta(k,t) = \varphi^c_{xx}(k,t,x,x^c)$, $\omega(k,t) = \varphi^c_{xx^c}(k,t,x,x^c)$.

Рассмотрим теперь условия первого и второго порядков минимума функций G, G^c. Обозначим через $\mathbf{\Gamma}$ подмножество элементов множества $\mathbf{D}$, удовлетворяющих дополнительным условиям $|x(k_F)-\bar x(k_F)| < \epsilon$, $\epsilon > 0$ и через $\mathbf{\Gamma^c}$ подмножество элементов множества $\mathbf{D}$, удовлетворяющих дополнительным условиям $|x(k_F)-\bar x(k_F)| < \epsilon$, $|x^c(k,t_F)-\bar x^c(k,t_F)| < \epsilon$, $\epsilon > 0$. На основании теоремы 1 достаточными условиями относительного минимума функций G, G^c на множествах $\mathbf{\Gamma}$, $\mathbf{\Gamma^c}$ являются:

$$\begin{aligned} dG &= 0, & dG^c &= 0, \\ d^2G &> 0, & d^2G^c &> 0. \end{aligned} \tag{16}$$

Из условия (16) следует, что

$$G_{x_F} = 0, \qquad G^c_x = 0, \qquad G^c_{x^c_F} = 0.$$

Тогда

$$\psi(k_F) = -F_{x_F}, \qquad \psi^c(k,t_F) = -H_{x^c_F}, \qquad \lambda(k,t_F) = 0. \tag{17}$$

Из условия $d^2G > 0$ для $k \in \mathbf{K}\setminus\mathbf{K}'$ получим: $\sigma(k_F) = -F_{x_F x_F} + \Theta_1$, где Θ_1 — положительно определенная матрица. В свою очередь, условие $d^2G^c > 0$ по аналогии с ранее рассмотренным условием $d^2P^c < 0$ представимо в виде:

$$\begin{aligned}\sigma^c(k,t_F) &= \theta^{\mathrm{T}}_{x^c_F}\sigma(k+1)\theta_{x^c_F} + H_{x^c_F x^c_F}, \\ \omega(k,t_F) &= 0, \qquad \beta(k,t_F) = 0.\end{aligned}$$

Как и ранее, все указанные производные подсчитаны на элементе $\bar m$.

Теорема 2. *Для того чтобы на элементе $\bar{m}$ достигался относительный минимум функционала I на множестве $\mathbf{D}$, достаточно существования таких вектор функций ψ, ψ^c, λ, матриц σ, σ^c, β, ω, отрицательно определенных матриц $\Theta(k)$, $-\Theta^1(k)$, $\Theta^2(k,t)$, $\Theta^3(k,t)$, что выполняются условия* (7), (8), (11)–(15).

Доказательство. Зададим функции φ, φ^c в виде:

$$\begin{aligned}\varphi(k,x) &= \psi^T(k)x + \frac{1}{2}(x-\bar{x})^T\sigma(k)(x-\bar{x}),\\ \varphi^c(z,t,x^c) &= \lambda^T(k,t)x + \psi^{c\mathrm{T}}(k,t)x^c +\\ &\qquad + \frac{1}{2}(x^c-\bar{x}^c)^T\sigma^c(k,t)(x^c-\bar{x}^c)+\\ &\qquad + \frac{1}{2}(x-\bar{x})^T\beta(k,t)(x-\bar{x}) + (x-\bar{x})^T\omega(k,t)(x^c-\bar{x}^c),\end{aligned}$$

где ψ, ψ^c, λ, σ, σ^c, β, ω удовлетворяют условиям теоремы. Выполнение перечисленных условий означает, что функции R, R^c, G, G^c достигают относительного экстремума на элементе $\bar{m}$ и в точках $\bar{x}(k_F)$, $\bar{x}^c(k,t_F)$. Это, в свою очередь, означает, что найдется такое $\epsilon > 0$, что функции R, R^c достигают экстремума на множестве $|x(k)-\bar{x}(k)| < \epsilon$, $|x^c(k,t) - \bar{x}^c(k,t)| < \epsilon$, а функции G, G^c достигают экстремума на множестве $|x(k_F)-\bar{x}(k_F)| < \epsilon$, $|x^c(k,t_F)-\bar{x}^c(k,t_F)| < \epsilon$. Отсюда в силу теоремы 1 следует, что функционал I достигает на элементе $\bar{m}$ минимума на множестве $\mathbf{D}_\epsilon$, то есть относительного минимума. □

Таким образом, теорема 2 утверждает, что если в выделенной окрестности радиуса ϵ найденного элемента $\bar{m}$ существуют решения уравнений (7), (8), (11)–(15), то этот элемент доставляет функционалу относительный минимум.

4. Пример

Рассмотрим работу метода на примере системы, динамика которой включает в себя два этапа.

1-ый этап:

$$\dot{x}_1^c = (x_1^c)^2(x_2^c-u)^2, \qquad \dot{x}_2^c = x_1^c x_2^c + \frac{1}{3}u^3,$$
$$x_1^c(0) = -1, \qquad x_2^c(0) = -1, \qquad t \in [0,2].$$

2-ой этап:

$$\dot{x}_1^c = (x_1^c - t)^2 + u^2, \quad t \in [2,3].$$

Функционал имеет вид: $I = x_1^c(3) \to \min$.

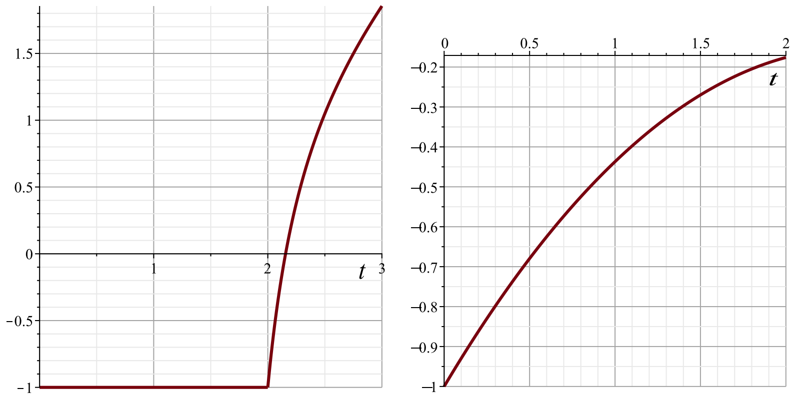
Построим ДНС. Нетрудно видеть, что $K = 0, 1, 2$. Поскольку оба этапа связаны через переменную x_1^c, то она и играет роль x, а дискретный процесс верхнего уровня принимает вид:

$$x(0) = x_1^c(0,0) = -1, \qquad x(1) = x_1^c(0,2), \qquad x(2) = x_1^c(1,3),$$
$$I = x(2), \qquad x_1^c(1,2) = x(1), \qquad \xi = x(1).$$

Основные конструкции имеют вид:

$$H^c(0,t,x_1^c,x_2^c,u,\psi_1^c,\psi_2^c) = \psi_1^c\left((x_1^c)^2(x_2^c-u)^2\right) + \psi_2^c\left(x_1^c x_2^c + \frac{1}{3}u^3\right),$$
$$H^c(1,t,x_1^c,u,\psi_1^c) = \psi_1^c\left((x_1^c - t)^2 + u^2\right).$$

Пример был решен методом улучшения первого порядка в работе [11]. Начальное управление: $u^{\mathrm{I}} = 0.5$, $I^{\mathrm{I}} = 1.98$. Результаты представлены на рисунках 1, 2 и в таблице 1.



(а) x_1^c (б) x_2^c

Рисунок 1. Переменные состояния

Таблица 1. Изменение функционала I по итерациям

Итерация	Метод 1-го порядка
0	1.98
1	1.85

Проверим, доставляет ли найденное решение функционалу относительный минимум. Так как решение примера было найдено численно,

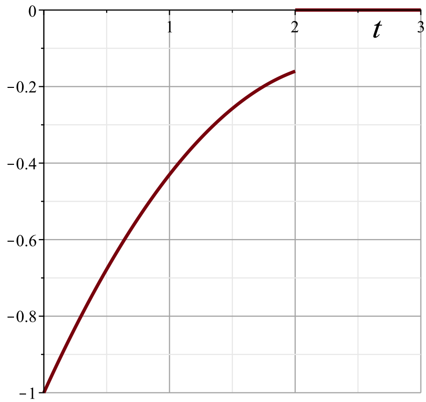
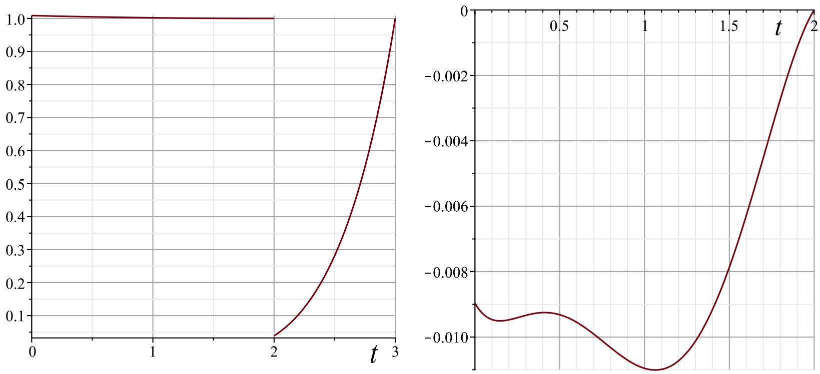


Рисунок 2. Управление u

то поиск функции $\mathcal{H}^c$ и ее производных первого и второго порядков также проводился численно. Поскольку уравнения каждого из этапов не зависят от переменной x верхнего уровня, то $\lambda = 0$, $\beta = 0$, $\omega = 0$. Нетрудно видеть, что на первом этапе вектор $\psi^{c\mathrm{T}} = (\psi_1^c, \psi_2^c)^T$, а матрица

$$\sigma^c = \begin{pmatrix} \sigma_{11}^c & \sigma_{12}^c \\ \sigma_{21}^c & \sigma_{22}^c \end{pmatrix}.$$

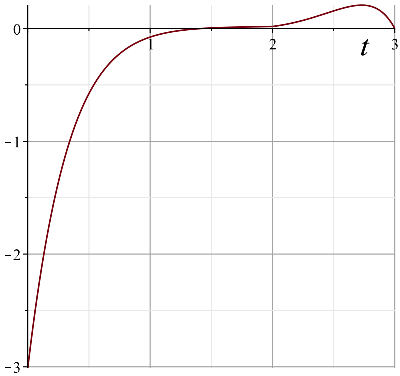
Результаты расчетов, приведенные на рисунках 3–4, показывают, что



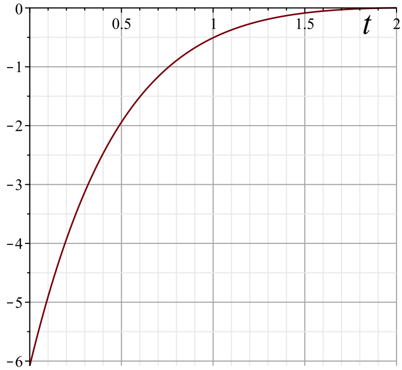
(а) ψ^1 (б) ψ^2

Рисунок 3. Вектор ψ^c

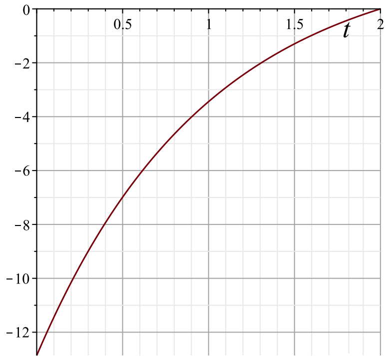
система векторно-матричных уравнений для ψ^c, σ^c на обоих этапах



(а) σ_{11}



(б) $\sigma_{12} = \sigma_{21}$



(в) σ_{22}

Рисунок 4. Матрица σ^c

имеет решение. Следовательно, исследуемый элемент $\bar{m}$ доставляет функционалу относительный минимум.

Заключение

Таким образом, в работе получены достаточные условия относительного минимума для ДНС, позволяющие анализировать предложенное решение задачи оптимального управления на предмет обеспечения функционалу локального минимума. Приведен иллюстративный пример.

Список литературы

[1] С. В. Емельянов (ред.). *Теория систем с переменной структурой*, Наука, М., 1970. ↑47

[2] В.И. Гурман. «К теории оптимальных дискретных процессов», *Автоматика и телемеханика*, 1973, №7, с. 53–58. ↑47

[3] С.Н. Васильев. «Теория и применение логико-управляемых систем», *Труды 2-ой Международной конференции «Идентификация систем и задачи управления»*, SICPRO'03 (29–31 января 2003 г., Москва), Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, М., 2003, ISBN 5-201-14948-0, с. 23–52. ↑47

[4] А.С. Бортаковский. «Достаточные условия оптимальности детерминированными логико-динамическими системами», *Информатика. Сер. Автоматизация проектирования*, 1992, №2–3, с. 72–79. ↑47

[5] Б.М. Миллер, Е.Я. Рубинович. *Оптимизация динамических систем с импульсными управлениями*, Наука, М., 2005, ISBN 978-5-9710-5725-3, 429 с. ↑47

[6] В. И. Гурман, И. В. Расина. «Дискретно-непрерывные представления импульсных процессов в управляемых системах», *Автоматика и телемеханика*, 2012, №8, с. 16–29. ↑47,48,51

[7] И. В. Расина. «Итерационные алгоритмы оптимизации дискретно-непрерывных процессов», *Автоматика и телемеханика*, 2012, №10, с. 3–17. ↑47,48

[8] И.В. Расина. *Иерархические модели управления системами неоднородной структуры*, Физматлит, М., 2014, ISBN 978-5-94052-238-6, 160 с. ↑47,48,51

[9] В.Ф. Кротов. «Достаточные условия оптимальности для дискретных управляемых систем», *ДАН СССР*, **172**:1 (1967), с. 18–21. ↑48

[10] В.И. Гурман. *Вырожденные задачи оптимального управления*, Наука, М., 1977, 304 с. ↑52

[11] И.В. Расина, О.В. Фесько. «Метод улучшения первого порядка для дискретно-непрерывных систем», *Программные системы: теория и приложения*, **9**:3(38) (2018), с. 65–76. URL doi ↑55

Поступила в редакцию	15.03.2020
Переработана	09.04.2020
Опубликована	10.05.2020

Рекомендовал к публикации *д.т.н. А. М. Цирлин*

Пример ссылки на эту публикацию:

И. В. Расина, О. В. Фесько. «Достаточные условия относительного минимума для дискретно-непрерывных систем». *Программные системы: теория и приложения*, 2020, **11**:2(45), с. 47–59.
10.25209/2079-3316-2020-11-2-47-59
URL http://psta.psiras.ru/read/psta2020_2_47-59.pdf

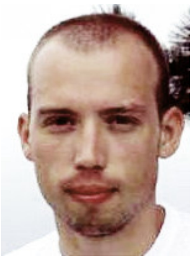
Эта же статья по-английски: 10.25209/2079-3316-2020-11-2-61-73

Об авторах:

Ирина Викторовна Расина

д.ф.-м.н., г.н.с. Исследовательского центра системного анализа Института программных систем им. А. К. Айламазяна РАН, специалист в области моделирования и управления гибридными системами, автор и соавтор более 100 статей и 5 монографий

0000-0001-8939-2968
e-mail: irinarasina@gmail.com



Олесь Владимирович Фесько

к.т.н., н.с. ИЦСА Института программных систем им. А.К. Айламазяна РАН. Специалист по численным экспериментам в математической теории управления

0000-0002-9329-5754
e-mail: oles.fesko@hotmail.com

Sample citation of this publication:

Irina V. Rasina, Oles V. Fesko. "Sufficient relative minimum conditions for discrete-continuous control systems". *Program Systems: Theory and Applications*, 2020, **11**:2(45), pp. 47–59. (*In Russian*). 10.25209/2079-3316-2020-11-2-47-59
URL http://psta.psiras.ru/read/psta2020_2_47-59.pdf

The same article in English: 10.25209/2079-3316-2020-11-2-61-73