Б. А. Бабажанов, А. Б. Хасанов, А. Б. Яхшимуратов, Об обратной задаче для квадратичного пучка операторов Штурма–Лиувилля с периодическим потенциалом,
*Дифференц. уравнения*, 2005, том 41, номер 3, 298–305

*ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2005, том 41, № 3, с. 298–305*

## ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.984.5

# ОБ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ КВАДРАТИЧНОГО ПУЧКА ОПЕРАТОРОВ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ С ПЕРИОДИЧЕСКИМ ПОТЕНЦИАЛОМ

© 2005 г. **Б. А. Бабаджанов, А. Б. Хасанов, А. Б. Яхшимуратов**

В работе [1] Б.А. Дубровиным получена система дифференциальных уравнений для спектральных параметров оператора Штурма–Лиувилля с конечнозонным потенциалом, а в [2] Е. Трубовицем выведена аналогичная система уравнений в случае периодического потенциала и с ее помощью установлена связь между аналитичностью потенциала и порядком убывания длин лакун в спектре. Подобные результаты получены в работе [3] для оператора Дирака.

В настоящей работе для уравнения

$$T(\lambda)y \equiv -y'' + q(x)y + 2\lambda p(x)y - \lambda^2 y = 0, \quad x \in R^1, \tag{1}$$

с $\pi$-периодическими действительными коэффициентами $p(x)$ и $q(x)$ выведен аналог системы уравнений Дубровина–Трубовица, доказана разрешимость этой системы, установлена связь между аналитичностью коэффициентов $p(x)$, $q(x)$ и порядком убывания длин лакун, а также получены тождества для квадратов нормированных собственных функций периодической и антипериодической задач для уравнения (1). При доказательстве основных результатов мы существенно используем методы работ [2, 3].

Рассмотрим операторный пучок $T(\lambda)$, порожденный в пространстве $L_2(-\infty,\infty)$ выражением (1) и имеющий в нем максимальную область определения. Те комплексные значения параметра $\lambda$, для которых $T^{-1}(\lambda)$ существует и является ограниченным оператором, определенным на всем $L_2(-\infty,\infty)$, называются регулярными точками пучка $T(\lambda)$. Дополнение в комплексной плоскости ко множеству регулярных точек называется спектром пучка $T(\lambda)$.

Спектральные задачи для пучка $T(\lambda)$ хорошо изучены в работах [4–7]. В частности, из [5] следует, что при выполнении условий

а) функции $p(x)$, $q(x)$ определены на $R^1$, $\pi$-периодичны, $q(x) \in L_2[0,\pi]$, $p(x) \in W_2^1[0,\pi]$;

б) для всех функций $y(x) \in W_2^2[0,\pi]$, $y(x) \not\equiv 0$, удовлетворяющих условию $y'(0)\bar y(0) - y'(\pi)\bar y(\pi) = 0$, выполняется неравенство

$$\int_0^\pi \{|y'(x)|^2 + q(x)|y(x)|^2\}dx > 0$$

спектр пучка $T(\lambda)$ непрерывен и состоит из последовательности сегментов, разделенных лакунами, т.е. спектр имеет вид

$$E = R^1 \setminus \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} (\lambda_n^-, \lambda_n^+), \tag{2}$$

причем лакуна, содержащая точку $\lambda = 0$ (будем обозначать ее через $(\lambda_0^-, \lambda_0^+)$), всегда является невырожденной.

Будем считать всюду, что условия а) и б) выполняются. Для уравнения (1) функции Вейля–Титчмарша имеют вид

$$m^{\pm}(\lambda) = \frac{\varphi'(\pi,\lambda) - \theta(\pi,\lambda) \mp \sqrt{\Delta^2(\lambda) - 4}}{2\varphi(\pi,\lambda)}, \tag{3}$$

где $\theta(x,\lambda)$ и $\varphi(x,\lambda)$ – решения уравнения (1), удовлетворяющие начальным условиям $\theta(0,\lambda) = 1$, $\theta'(0,\lambda) = 0$ и $\varphi(0,\lambda) = 0$, $\varphi'(0,\lambda) = 1$.

Концы лакун являются собственными значениями либо периодической $y(0) = y(\pi)$, $y'(0) = y'(\pi)$, либо антипериодической $y(0) = -y(\pi)$, $y'(0) = -y'(\pi)$ граничной задачи для уравнения (1) и состоят из нулей функции $\Delta^2(\lambda) - 4$, где $\Delta(\lambda) = \theta(\pi, \lambda) + \varphi'(\pi, \lambda)$.

**Определение 1.** Нули $\xi_n$, $n \in Z \setminus \{0\}$, функции $\varphi(\pi, \lambda)$ (знаменателя в выражении (3)) и знаки

$$\sigma_n = \operatorname{sign}\left(\frac{1}{\varphi'(\pi, \xi_n)} - \varphi'(\pi, \xi_n)\right) = \pm 1, \quad n \in Z \setminus \{0\},$$

называются спектральными параметрами уравнения (1).

**Определение 2.** Спектральные параметры $\xi_n$, $\sigma_n$, $n \in Z \setminus \{0\}$, и границы $\lambda_n^-$, $\lambda_n^+$, $n \in Z \setminus \{0\}$, спектра назовем спектральными данными уравнения (1).

Из работы [5] следуют оценки

$$\lambda_n^- \le \xi_n \le \lambda_n^+, \quad n \in Z \setminus \{0\}, \quad \lambda_n^\pm = n + c_0 + \frac{c_1}{n} + \frac{\varepsilon_n^\pm}{n}, \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\varepsilon_n^\pm|^2 < \infty,$$

где $c_0$, $c_1$ не зависят от $n$.

**1. Теорема 1.** *Если $u(x) = q(x) - ip(x) \in C^1(R^1)$ – $\pi$-периодический потенциал уравнения (1), имеющий спектр (2) и спектральные параметры $\xi_n \in [\lambda_n^-, \lambda_n^+]$, $\sigma_n = \pm 1$, $n \in Z \setminus \{0\}$, то для любого действительного параметра $t \in R^1$ уравнение*

$$-y'' + q(x+t)y + 2\lambda p(x+t)y - \lambda^2 y = 0, \quad x \in R^1, \tag{4}$$

*имеет тот же спектр $E$ и спектральные параметры*

$$\xi_n(t) \in [\lambda_n^-, \lambda_n^+], \quad \sigma_n(t) = \pm 1, \quad n \in Z \setminus \{0\},$$

*удовлетворяют системе дифференциальных уравнений Дубровина–Трубовица*

$$\frac{d\xi_n(t)}{dt} = -2\sigma_n(t)[(\xi_n(t) - \lambda_n^-)(\lambda_n^+ - \xi_n(t))]^{1/2} \times$$

$$\times \left[(\xi_n(t) - \lambda_0^-)(\xi_n(t) - \lambda_0^+) \prod_{k \ne n, 0} \frac{(\xi_n(t) - \lambda_k^-)(\xi_n(t) - \lambda_k^+)}{(\xi_n(t) - \xi_k(t))^2}\right]^{1/2}, \quad n \in Z \setminus \{0\}, \tag{5}$$

*а также начальным условиям*

$$\xi_n(t)|_{t=0} = \xi_n(0) = \xi_n, \quad \sigma_n(t)|_{t=0} = \sigma_n(0) = \sigma_n, \quad n \in Z \setminus \{0\},$$

*где корни понимаются в арифметическом смысле и знак $\sigma_n(t)$ изменяется на противоположный при каждом столкновении точки $\xi_n(t)$ с границами лакуны $[\lambda_n^-, \lambda_n^+]$.*

**Доказательство.** Легко видеть, что $\xi_n(t)$, $n \in Z \setminus \{0\}$, являются собственными значениями задачи Дирихле $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$ на отрезке $[0, \pi]$ для уравнения (4). Пусть этим собственным значениям соответствуют нормированные собственные функции $y_n(x, t)$, $n \in Z \setminus \{0\}$. Тогда, дифференцируя по $t$ равенство

$$-(y_n'', y_n) + (q(x+t)y_n, y_n) + 2\xi_n(t)(p(x+t)y_n, y_n) - \xi_n^2(t) = 0,$$

имеем

$$-(\dot{y}_n'', y_n) - (y_n'', \dot{y}_n) + (q'(x+t)y_n + q(x+t)\dot{y}_n, y_n) + (q(x+t)y_n, \dot{y}_n) + 2\dot{\xi}_n(t)(p(x+t)y_n, y_n) +$$

$$+ 2\xi_n(t)(p'(x+t)y_n + p(x+t)\dot{y}_n, y_n) + 2\xi_n(t)(p(x+t)y_n, \dot{y}_n) - 2\xi_n(t)\dot{\xi}_n(t) = 0.$$

Здесь $\dot{\vartheta} \equiv d\vartheta/dt$, $\vartheta' \equiv d\vartheta/dx$ и $(\cdot,\cdot)$ – скалярное произведение пространства $L_2(0, \pi)$. Из последнего равенства находим

$$(-\dot{y}_n'' + q(x+t)\dot{y}_n + 2\xi_n(t)p(x+t)\dot{y}_n, y_n) +$$

$$+(q'(x+t)y_n+2\xi_n(t)p'(x+t)y_n+2\dot{\xi}_n(t)p(x+t)y_n,y_n)-2\xi_n(t)\dot{\xi}_n(t)=0,$$

$$2\xi_n(t)\dot{\xi}_n(t)=([q'(x+t)+2\xi_n(t)p'(x+t)+2\dot{\xi}_n(t)p(x+t)]y_n,y_n),$$

т.е.

$$2\xi_n(t)\dot{\xi}_n(t)=\int_0^\pi\{[q'(x+t)+2\xi_n(t)p'(x+t)+2\dot{\xi}_n(t)p(x+t)]y_n^2(x,t)\}\,dx. \tag{6}$$

Интегрируя по частям в равенстве (6), имеем

$$2\xi_n(t)\dot{\xi}_n(t)=y_n'^2(0,t)-y_n'^2(\pi,t)+2\dot{\xi}_n(t)\int_0^\pi p(x+t)y_n^2(x,t)\,dx. \tag{7}$$

Вводя решения $\theta(x,t,\lambda)$ и $\varphi(x,t,\lambda)$ уравнения (4), удовлетворяющие начальным условиям $\theta(0,t,\lambda)=1$, $\theta'(0,t,\lambda)=0$, $\varphi(0,t,\lambda)=0$, $\varphi'(0,t,\lambda)=1$, и используя равенства

$$y_n(x,t)=\frac{1}{c_n(t)}\varphi(x,t,\xi_n(t)),\quad 2\xi_n\int_0^\pi\varphi^2(x,\xi_n)dx=\varphi'(\pi,\xi_n)\frac{\partial\varphi(\pi,\xi_n)}{\partial\lambda}+2\int_0^\pi p(x)\varphi^2(x,\xi_n)dx,$$

$$\varphi(\pi,t,\lambda)=\pi\prod_{0\neq k=-\infty}^{\infty}\frac{\xi_k(t)-\lambda}{k},\quad \Delta^2(\lambda)-4=-4\pi^2(\lambda-\lambda_0^-)(\lambda-\lambda_0^+)\prod_{0\neq k=-\infty}^{\infty}\frac{(\lambda-\lambda_k^-)(\lambda-\lambda_k^+)}{k^2},$$

преобразуем тождество (7), откуда получим систему (5).

Выполнение начальных условий очевидно. Из того, что функция Ляпунова уравнения (4) не зависит от $t$ (см. [5]), следует независимость спектра этого уравнения от параметра $t$. Теорема 1 доказана.

Для дальнейшего упрощения системы уравнений Дубровина–Трубовица (5) сделаем замену переменных

$$\xi_n(t)=\lambda_n^-+(\lambda_n^+-\lambda_n^-)\sin^2 x_n(t),\quad n\in Z\setminus\{0\}. \tag{8}$$

Начальные условия возьмем в виде

$$x_n(0)=\arcsin\left[\frac{\xi_n(0)-\lambda_n^-}{\lambda_n^+-\lambda_n^-}\right]^{1/2},\quad n\in Z\setminus\{0\}. \tag{9}$$

Тогда система (5) примет вид

$$\frac{dx_n}{dt}=H_n(\ldots,x_{-1},x_1,\ldots),\quad n\in Z\setminus\{0\}, \tag{10}$$

где $H_n(x)=-\sigma_n(0)h_n(\xi)$, $\xi_n=\xi_n(t)=\lambda_n^-+(\lambda_n^+-\lambda_n^-)\sin^2 x_n(t)$, $n\in Z\setminus\{0\}$,

$$h_n=\left[(\xi_n-\lambda_0^-)(\xi_n-\lambda_0^+)\prod_{k\neq n,0}\frac{(\xi_n-\lambda_k^-)(\xi_n-\lambda_k^+)}{(\xi_n-\xi_k)^2}\right]^{1/2}.$$

Для изучения задачи Коши (10), (9) введем банахово пространство

$$K=\left\{x=(\ldots,x_{-1},x_1,\ldots):\ \|x\|=\sum_{0\neq n=-\infty}^{\infty}(\lambda_n^+-\lambda_n^-)|x_n|<\infty,\ x_n\in C\right\},$$

обозначим $H=(\ldots,H_{-1},H_1,\ldots)$ и запишем систему (10) в банаховом пространстве $K$ в виде одного уравнения $dx/dt=H(x)$.

Докажем, что $H(x)$ удовлетворяет условию Липшица в пространстве $K$. Введем множество $D = \prod_{0\neq k=-\infty}^{\infty} D_k$, где $D_k$, $k \in Z \setminus \{0\}$, – непересекающиеся открытые круги. Круг $D_k$ находится в $\lambda$-плоскости, содержит замкнутую лакуну $[\lambda_k^-, \lambda_k^+]$, центр его находится в точке $(\lambda_k^- + \lambda_k^+)/2$ и радиусы $r_k$ для достаточно больших $|k|$ определяются формулами

$$r_k = \frac{\lambda_k^+ - \lambda_k^-}{2} + \frac{1}{k^2}.$$

Как и в работе [2], доказываются следующие утверждения:

1) если $\xi \in D$, то выполняются оценки $h_n = O(n)$, $n \to \infty$, $dh_n/d\xi_k = O(1)$, $|n| \to \infty$;

2) если $x, y \in K$, то $|h_n(\xi) - h_n(\eta)| \leq c\|x - y\|$, где $c = \text{const}$, $\xi_n = \lambda_n^- + (\lambda_n^+ - \lambda_n^-)\sin^2 x_n$, $\eta_n = \lambda_n^- + (\lambda_n^+ - \lambda_n^-)\sin^2 y_n$;

3) если $x, y \in K$, то $\|H(x) - H(y)\| \leq \text{const} \cdot \|x - y\|$.

Из условия 3) следует, что бесконечная система уравнений (10) имеет единственное решение при любых начальных данных, взятых из множества $K$, и это решение существует для всех $t \in R^1$.

При помощи системы уравнений Дубровина–Трубовица изучается связь длин лакун с аналитичностью коэффициентов $p(x)$ и $q(x)$ уравнения (1).

**Теорема 2.** *Если $p(x)$, $q(x)$ – $\pi$-периодические действительные функции из класса $C^2(-\infty, \infty)$ и длины лакун $\lambda_n^+ - \lambda_n^-$ экспоненциально убывают, т.е. если существуют постоянные числа $a > 0$, $b > 0$, для которых $\lambda_n^+ - \lambda_n^- < ae^{-b|n|}$ при любых целых $n$, то $p(x)$ и $q(x)$ являются действительными аналитическими функциями на всей прямой.*

**Доказательство.** Нетрудно показать, что если $|y_n| \leq (b/4)|n|$, то

$$\xi_n = \lambda_n^- + (\lambda_n^+ - \lambda_n^-)\sin^2 z_n \in D_n,$$

где $z_n = x_n + iy_n$, $n \in Z \setminus \{0\}$.

Рассмотрим множество $F$ комплексных последовательностей $z = (\ldots, z_{-1}, z_1, \ldots)$ с действительной частью $x = (\ldots, x_{-1}, x_1, \ldots)$ из пространства $K$ и мнимой частью $|y_n| \leq (b/4)|n|$, $n \in Z$. Очевидно, что $F \subset K$.

Значит, на множестве $F$ для $H(z)$ выполняется условие Липшица.

Исследуем последовательность вектор-функций

$$z_n^{(0)}(t) = x_n(0) = \arcsin\left[\frac{\xi_n(0) - \lambda_n^-}{\lambda_n^+ - \lambda_n^-}\right]^{1/2}, \quad n \in Z \setminus \{0\},$$

$$z_n^{(m+1)}(t) = x_n(0) + \int_0^t H_n(\ldots, z_{-1}^{(m)}(s), z_1^{(m)}(s), \ldots)ds, \quad m = 0, 1, 2, \ldots,$$

где $t$ – комплексный аргумент. Из неравенства

$$|y_n^{(m+1)}(t)| \leq \left|\int_0^t H_n(\ldots, z_{-1}^{(m)}(s), z_1^{(m)}(s), \ldots)ds\right| \leq c|t|\,|n|$$

при $|t| \leq b/(4c)$ получим оценки $|y_n^{(m)}(t)| \leq (b/4)|n|$, $m = 0, 1, 2, \ldots$

Значит, для $|t| \leq b/(4c)$ последовательность вектор-функций $z^{(m)}(t)$ принадлежит множеству $F$. Используя условие Липшица, можно показать равномерную сходимость этой последовательности в круге $|t| \leq b/(4c)$.

Из того, что члены последовательности $z^{(m)}(t)$ являются голоморфными вектор-функциями в круге $|t| \leq b/(4c)$, в силу теоремы Вейерштрасса следует голоморфность предельной вектор-функции $z(t)$ в этом круге. Отсюда вытекает голоморфность функций $\xi_n(t) = \lambda_n^- + (\lambda_n^+ - \lambda_n^-)\sin^2 z_n(t)$ в круге $|t| \leq b/(4c)$.

Из равномерной сходимости рядов

$$\tilde{p}(t)=\frac{\lambda_0^+ + \lambda_0^-}{2}+\sum_{0\neq k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{\lambda_k^+ + \lambda_k^-}{2}-\xi_k(t)\right), \tag{11}$$

$$\tilde{q}(t)+2\tilde{p}^2(t)=\frac{(\lambda_0^+)^2+(\lambda_0^-)^2}{2}+\sum_{0\neq k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{(\lambda_k^+)^2+(\lambda_k^-)^2}{2}-\xi_k^2(t)\right) \tag{12}$$

следует голоморфность их сумм $\tilde{p}(x)$, $\tilde{q}(t)+2\tilde{p}^2(t)$.

При действительных $t$ суммы рядов (11) и (12) в силу формул следов превращаются в функции $p(t)$ и $q(t)+2p^2(t)$. Отсюда следует аналитичность в окрестности нуля коэффициентов $p(t)$ и $q(t)$.

Рассмотрев вместо уравнения (1) уравнение

$$-y''+q(x+t_0)y+2\lambda p(x+t_0)y-\lambda^2 y=0, \quad x\in R^1,$$

где $t_0$ – действительное фиксированное число, установим аналитичность функций $p(t+t_0)$ и $q(t+t_0)$ в точке $t=0$. Значит, функции $p(t)$ и $q(t)$ аналитичны в точке $t_0$. Теорема 2 доказана.

**Теорема 3.** *Если $p(t)$ и $q(t)$ – действительные аналитические $\pi$-периодические функции, то длины лакун $\lambda_n^+ - \lambda_n^-$ убывают экспоненциально.*

**Доказательство.** Рассмотрим граничную задачу

$$-y''+q(x+it)y+2\lambda p(x+it)y-\lambda^2 y=0, \quad x\in[0,\pi], \tag{13}$$

$$y(0)=0, \quad y(\pi)=0 \tag{14}$$

при действительных $t$. Из работы [6] следует, что собственные значения задачи (13), (14) имеют следующую асимптотику:

$$\xi_n(it)=n+\mathrm{const}+O(1/n), \quad |n|\to\infty. \tag{15}$$

Из непрерывности $\xi_n(it)$ по $t$ вытекает, что оценка (15) является равномерной для ограниченных промежутков.

**Лемма 1.** *Для достаточно больших $|n|$ и для некоторой положительной постоянной $c$ на множестве $D$ выполняется оценка $|\operatorname{Re} h_n|>c|n|$.*

**Доказательство.** Пусть

$$A_n=\prod_{k\neq n,0}\frac{(\xi_n-\lambda_k^-)(\xi_n-\lambda_k^+)}{(\xi_n-\xi_k)^2}, \quad \xi\in D.$$

Тогда

$$A_n=\prod_{k\neq n,0}\left(1+\frac{\lambda_k^+\lambda_k^- - \xi_k^2-\xi_n(\lambda_k^+ + \lambda_k^- - 2\xi_k)}{(\xi_n-\xi_k)^2}\right)=$$

$$=\exp\left\{\sum_{k\neq n,0}^{\infty}\ln\left(1+\frac{\lambda_k^+\lambda_k^- - \xi_k^2-\xi_n(\lambda_k^+ + \lambda_k^- - 2\xi_k)}{(\xi_n-\xi_k)^2}\right)\right\}=$$

$$=\exp\left\{\sum_{k\neq n,0}^{\infty}\ln\left(1-\frac{1}{\xi_n}(\lambda_k^+ + \lambda_k^- - 2\xi_k)+O\left(\frac{1}{\xi_n^2}\right)\right)\right\}=$$

$$=\exp\left\{-\frac{1}{\xi_n}\sum_{k\neq n,0}^{\infty}(\lambda_k^+ + \lambda_k^- - 2\xi_k)+O\left(\frac{1}{\xi_n^2}\right)\right\}=1+O\left(\frac{1}{n}\right), \quad |n|\to\infty,$$

поэтому для достаточно больших $|n|$ выполняется неравенство $\operatorname{Re} A_n > 1/2$. Отсюда для достаточно больших $|n|$ получаем

$$|\operatorname{Re} h_n|^2 \geq \operatorname{Re} h_n^2 = \operatorname{Re}((\xi_n - \lambda_0^-)(\xi_n - \lambda_0^+)A_n) =$$

$$= \operatorname{Re}((\xi_n - \lambda_0^-)(\xi_n - \lambda_0^+)) \operatorname{Re} A_n - \operatorname{Im}((\xi_n - \lambda_0^-)(\xi_n - \lambda_0^+)) \operatorname{Im} A_n \geq c^2 n^2.$$

Лемма доказана.

Воспользовавшись уравнением (4), нетрудно показать аналитичность спектральных параметров $\xi_n(t)$. Из (8) и (9) следует аналитичность $x_n(t)$. Продолжим решение $x_n(t)$, $n \in Z \setminus \{0\}$, на мнимые аргументы.

Из уравнений Дубровина–Трубовица вытекает тождество

$$x_n(t) = x_n(0) + \int\limits_0^t H_n(\ldots, x_{-1}(\tau), x_1(\tau), \ldots) d\tau,$$

которое выполняется и при достаточно малых комплексных $t$. В частности, при $t = is$, $s \in R^1$, достаточно малом:

$$x_n(is) = x_n(0) + \int\limits_0^{is} H_n(\ldots, x_{-1}(\tau), x_1(\tau), \ldots)\, d\tau. \tag{16}$$

В равенстве (16) сделаем замену переменных $\tau = i\omega$, тогда оно примет вид

$$x_n(is) = x_n(0) + \int\limits_0^s iH_n(\ldots, x_{-1}(i\omega), x_1(i\omega), \ldots) d\omega.$$

Отсюда находим, что

$$|\operatorname{Im} x_n(is)| = \left| \int\limits_0^s \operatorname{Re} H_n(\ldots, x_{-1}(i\omega), x_1(i\omega), \ldots) d\omega \right| = |s \operatorname{Re} H_n(\ldots, x_{-1}(i\omega_0), x_1(i\omega_0), \ldots)| \geq c_1|n|$$

для малых $s$ и достаточно больших $|n|$. Из асимптотики для $\xi_n(is)$ и последнего неравенства получаем неравенство

$$o(1) = |\xi_n(is) - \lambda_n^-| = (\lambda_n^+ - \lambda_n^-)|\sin x_n(is)|^2 \geq (\lambda_n^+ - \lambda_n^-) \operatorname{sh}^2(\operatorname{Im} x_n(is)) \geq (\lambda_n^+ - \lambda_n^-) \operatorname{sh}^2(c_1|n|).$$

Таким образом, для некоторых $a > 0$, $b > 0$, начиная с некоторого значения $|n|$, выполняется неравенство $\lambda_n^+ - \lambda_n^- \leq ae^{-b|n|}$. Теорема 3 доказана.

**2.** В работах [8, 9] получено тождество

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k \varphi_{2k}^2(x) = 1$$

для квадратов ортонормированных собственных функций $\varphi_{2k}(x)$, соответствующих собственным значениям $\lambda_{2k}$ оператора Штурма–Лиувилля с периодическими и антипериодическими граничными условиями. Здесь $\varepsilon_k$ зависит только от $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$ и является положительным, если $\lambda_{2k} - \lambda_{2k-1} > 0$, и $\varepsilon_k$ равно нулю, если $\lambda_{2k} - \lambda_{2k-1} = 0$. Это тождество играет важную роль при сведении спектральной задачи для оператора Штурма–Лиувилля с конечнозонным потенциалом к задаче Неймана о движении точки на сфере единичного радиуса под действием квадратичного потенциала (см. [10, 11]). Отметим, что подобные тождества имеются и в работах [3, 12].

В этом пункте получим некоторые тождества для квадратов собственных функций квадратичного пучка операторов Штурма–Лиувилля с периодическим потенциалом.

Обозначим через

$$\ldots, y_{-1}^-(x), y_{-1}^+(x), y_0^-(x), y_0^+(x), y_1^-(x), y_1^+(x), \ldots \tag{17}$$

нормированные собственные функции, соответствующие собственным значениям $\ldots < \lambda_{-1}^- \le \le \lambda_{-1}^+ < \lambda_0^- \le \lambda_0^+ < \lambda_1^- \le \lambda_1^+ < \ldots$ периодической или антипериодической задачи на отрезке $[0,\pi]$.

**Теорема 4.** *Для функций (17) выполняются тождества*

$$\sum_{0\ne k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{f'(\lambda_k^-)}\left\{-\frac{\Delta'(\lambda_k^-)}{2\lambda_k^-} + \frac{1}{\lambda_k^-}\int_0^\pi p(t)\varphi(\pi,\lambda_k^-,t)dt\right\}(y_k^-(t))^2 = p(t) - \frac{\lambda_0^+ + \lambda_0^-}{2} - \frac{c}{2}, \tag{18}$$

$$\sum_{0\ne k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{g'(\lambda_k^+)}\left\{-\frac{\Delta'(\lambda_k^+)}{2\lambda_k^+} + \frac{1}{\lambda_k^+}\int_0^\pi p(t)\varphi(\pi,\lambda_k^+,t)dt\right\}(y_k^+(t))^2 = p(t) - \frac{\lambda_0^+ + \lambda_0^-}{2} + \frac{c}{2}, \tag{19}$$

*где*

$$f(\lambda) = \pi \prod_{0\ne k=-\infty}^{\infty} \frac{\lambda-\lambda_k^-}{k}, \quad g(\lambda) = \pi \prod_{0\ne k=-\infty}^{\infty} \frac{\lambda-\lambda_k^+}{k}, \quad c = \sum_{0\ne k=-\infty}^{\infty} (\lambda_k^+ - \lambda_k^-), \tag{20}$$

*и* $\varphi(x,\lambda,t)$ *– решение уравнения (4), удовлетворяющее начальным условиям* $\varphi(0,\lambda,t) = 0$, $\varphi'(0,\lambda,t) = 1$ ($t$ *– действительный параметр).*

**Доказательство.** Используя разложение

$$\varphi(\pi,\lambda,t) = \pi \prod_{0\ne k=-\infty}^{\infty} \frac{\lambda-\xi_k(t)}{k},$$

изучим при $|\lambda| \to \infty$ $(\lambda \in C)$ асимптотику функции

$$\frac{\varphi(\pi,\lambda,t)}{f(\lambda)} = \left[\prod_{0\ne k=-\infty}^{\infty} \frac{\lambda-\lambda_k^+}{\lambda-\lambda_k^-}\right]^{1/2} \left[\prod_{0\ne k=-\infty}^{\infty} \frac{\lambda-\xi_k(t)}{\lambda-\lambda_k^-}\frac{\lambda-\xi_k(t)}{\lambda-\lambda_k^+}\right]^{1/2} =$$

$$= \left[\exp\left\{\sum_{0\ne k=-\infty}^{\infty} \ln\left(1+\frac{\lambda_k^- - \lambda_k^+}{\lambda-\lambda_k^-}\right)\right\}\right]^{1/2} \left[\exp\left\{\sum_{0\ne k=-\infty}^{\infty} \ln\left[1+\frac{\lambda_k^- - \xi_k(t)}{\lambda-\lambda_k^-} + \frac{\lambda_k^+ - \xi_k(t)}{\lambda-\lambda_k^+} + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \frac{\lambda_k^- - \xi_k(t)}{\lambda-\lambda_k^-}\frac{\lambda_k^+ - \xi_k(t)}{\lambda-\lambda_k^+}\right]\right\}\right]^{1/2} =$$

$$= \left[\exp\left\{\frac{1}{\lambda}\sum_{0\ne k=-\infty}^{\infty}(\lambda_k^- - \lambda_k^+) + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\right\}\right]^{1/2} \left[\exp\left\{\frac{1}{\lambda}\sum_{0\ne k=-\infty}^{\infty}(\lambda_k^- + \lambda_k^+ - 2\xi_k(t)) + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\right\}\right]^{1/2} =$$

$$= 1 + \frac{1}{\lambda}\left(p(t) - \frac{\lambda_0^+ + \lambda_0^-}{2} - \frac{c}{2}\right) + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right). \tag{21}$$

При выводе асимптотики (21) мы воспользовались обозначениями (20) и формулами следов

$$\lambda_0^- + \lambda_0^+ + \sum_{0\ne k=-\infty}^{\infty} (\lambda_k^- + \lambda_k^+ - 2\xi_k(t)) = 2p(t).$$

Согласно теореме Миттаг–Леффлера,

$$\frac{\varphi(\pi,\lambda,t)}{f(\lambda)} = 1 + \sum_{0\neq k=-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\pi,\lambda_k^-,t)}{f'(\lambda_k^-)}\frac{1}{\lambda-\lambda_k^-},$$

следовательно,

$$\frac{\varphi(\pi,\lambda,t)}{f(\lambda)} = 1 + \frac{1}{\lambda}\sum_{0\neq k=-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\pi,\lambda_k^-,t)}{f'(\lambda_k^-)} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right), \quad |\lambda|\to\infty \quad (\lambda\in C). \tag{22}$$

Приравнивая асимптотики (21) и (22), имеем

$$\sum_{0\neq k=-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\pi,\lambda_k^-,t)}{f'(\lambda_k^-)} = p(t) - \frac{\lambda_0^+ + \lambda_0^-}{2} - \frac{c}{2}. \tag{23}$$

Далее нам понадобится

**Лемма 2.** *Справедливо равенство*

$$\varphi(\pi,\lambda_k^-,t) = \left\{-\frac{\Delta'(\lambda_k^-)}{2\lambda_k^-} + \frac{1}{\lambda_k^-}\int_0^\pi p(t)\varphi(\pi,\lambda_k^-,t)\,dt\right\}(y_k^-(t))^2.$$

Используя лемму 2, из (23) выводим тождество (18). Тождество (19) выводится аналогично. Теорема доказана.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Дубровин Б.А.* // Функц. анализ. 1975. Т. 9. № 3. С. 41–51.
2. *Trubowitz E.* // Comm. Pure. Appl. Math. 1977. V. 30. P. 321–337.
3. *Хасанов А.Б., Ибрагимов А.М.* // Узб. мат. журн. 2001. № 3–4. С. 48–55.
4. *Гусейнов Г.Ш.* // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. 1984. № 3. С. 14–21.
5. *Гусейнов Г.Ш.* // Спектральная теория операторов и ее приложения. Баку, 1985. Вып. 6. С. 56–97.
6. *Гусейнов Г.Ш.* Асимптотические формулы для решений и собственных значений квадратичного пучка уравнений Штурма–Лиувилля. Баку, 1984 (Препринт / Ин-т физики АН АзССР: 113).
7. *Гасымов М.Г., Гусейнов Г.Ш.* // Докл. АН АзССР. 1981. Т. 37. № 2. С. 19–23.
8. *Mckean H., Trubowitz E.* // Comm. Pure and Appl. Math. 1976. V. 29. P. 143–226.
9. *Deift P., Trubowitz E.* // Comm. Pure and Appl. Math. 1981. V. 34. P. 713–717.
10. *Веселов А.П.* // Функц. анализ и его приложения. 1980. Т. 14. Вып. 1. С. 48–50.
11. *Мозер Ю.* // Успехи мат. наук. 1981. Т. 36. Вып. 5 (221). С. 109–151.
12. *Савин А.В.* // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. 1984. № 6. С. 83–85.


Ургенчский государственный университет,
Узбекистан

Поступила в редакцию
30.05.2003 г.