Н. Ю. Золотых, В. Н. Шевченко, Об оценке сложности расшифровки пороговых функций k-значной логики, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1999, том 39, номер 2, 346–352

ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 1999, том 39, № 2, с. 346–352

УДК 519.714.4

ОБ ОЦЕНКЕ СЛОЖНОСТИ РАСШИФРОВКИ ПОРОГОВЫХ ФУНКЦИЙ k-ЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ[1)]

© 1999 г. Н. Ю. Золотых, В. Н. Шевченко

(603600 Нижний Новгород, пр-т Гагарина, 23, Нижегородский гос. ун-т)

Поступила в редакцию 04.12.96 г.
Переработанный вариант 25.12.97 г.

Рассматривается задача нахождения коэффициентов линейного неравенства, разделяющего множества нулей и единиц пороговой функции $f(x)$ k-значной логики от n переменных, при помощи вопросов "является ли x нулем функции $f(x)$?" Показано, что существуют функции, для расшифровки которых требуется не менее $C_n \log_2^{n-2} k$ вопросов, где C_n зависит только от n.

ВВЕДЕНИЕ

Функция f, отображающая гиперкуб $\{0, 1, ..., k-1\}^n$ ($k \geq 2, n \geq 2$) в множество $\{0, 1\}$, называется пороговой, если существует гиперплоскость, отделяющая множество нулей функции f от множества ее единиц. Под алгоритмом расшифровки понимается процедура нахождения коэффициентов какой-нибудь разделяющей гиперплоскости заранее неизвестной пороговой функции с помощью вопросов о ее значении в точке. Сложностью алгоритма расшифровки называется минимальное число вопросов, достаточное для нахождения этих коэффициентов при любой пороговой функции. Сложность наилучшего алгоритма назовем сложностью расшифровки пороговой функции и обозначим через $\eta(n, k)$.

Исследование величины $\eta(n, k)$ было начато в [1] и продолжено в [2], [3] и др. Основное внимание в этих работах уделялось построению алгоритмов расшифровки, получению верхних оценок сложности решения этой задачи. В [3] было показано, что $\eta(n, k) \leq C'_n \log^n k$, где C'_n – некоторая зависящая только от n величина, а $\log \alpha$ означает $\log_2 \alpha$.

Основной из полученных ранее результатов о нижней оценке величины $\eta(n, k)$ – результат из [1] о невозможности построения алгоритма расшифровки со сложностью, ограниченной полиномом от n.

Основная цель данной работы – получение нетривиальных нижних оценок сложности расшифровки пороговых функций. Эти оценки получаются на основании анализа структуры (разд. 4) и мощности (разд. 5) так называемого обучающего множества функции f – такого множества точек гиперкуба, значений функции в которых достаточно для однозначного определения $f(x)$ во всех остальных точках. В разд. 1 даются необходимые определения. Связь между мощностью обучающего множества и сложностью алгоритмов расшифровки устанавливается в разд. 2. Там же формулируется основной результат:

$$\eta(n, k) \geq C_n \log^{n-2} k,$$

где C_n – некоторая положительная величина, зависящая только от n. В разд. 3 содержатся предварительные результаты. В разд. 6 специально рассматривается случай пороговых булевых функций ($k = 2$).

1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Пусть $n \geq 2$, $k \geq 2$ – натуральные числа. Обозначим через $B(n, k)$ множество векторов (точек) $x = (x_1, \ldots, x_n)$ таких, что x_i – целые и $0 \leq x_i \leq k-1$ ($I = 1, 2, \ldots, N$). Пусть

$$f: B(n, k) \longrightarrow \{0, 1\},$$

1) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-00639).

$M_0(f)$ и $M_1(f)$ – множества точек x, в которых f равна нулю или единице соответственно, т.е. $M_\nu(f) = \{x \in B(n, k) \mid f(x) = \nu\}$ ($\nu = 0.1$); $N_\nu(f)$ – множество крайних точек (вершин) выпуклой оболочки множества $M_\nu(f)$. Функция $f(x)$ называется *пороговой*, если существуют действительные числа a_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) такие, что

$$M_0(f) = \left\{x = (x_1, \ldots, x_n) \in B(n, k) \mid \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \le a_0\right\}. \tag{1}$$

Неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \le a_0 \tag{2}$$

назовем *пороговым неравенством* для функции f, а гиперплоскость с уравнением

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = a_0$$

назовем *пороговой гиперплоскостью*. Множество всех пороговых функций, заданных на $B(n, k)$, обозначим через $F(n, k)$.

Пусть с каждой функцией $f \in F(n, k)$ связан *оракул*, который по произвольной точке $x \in B(n, k)$ отвечает на вопрос: "$x \in M_0(f)$?" Под *алгоритмом расшифровки* $\mathcal{A}$ функции $f \in F(n, k)$ будем понимать последовательное обращение к оракулу в точках $x^1, \ldots, x^t$ из $B(n, k)$, позволяющее найти такие числа $a_0, \ldots, a_n$, при которых выполняется равенство (1). Обозначим $\eta(\mathcal{A}, f) = t$. Пусть

$$\eta(\mathcal{A}, n, k) = \max_{f \in F(n, k)} \eta(\mathcal{A}, f), \quad \eta(n, k) = \min_{\mathcal{A}} \eta(\mathcal{A}, n, k),$$

где минимум во втором выражении берется по всем алгоритмам $\mathcal{A}$ расшифровки. Величина $\eta(\mathcal{A}, n, k)$ называется *сложностью алгоритма* $\mathcal{A}$, а $\eta(n, k)$ – *сложностью расшифровки* пороговой функции. Множество $T \subseteq B(n, k)$ назовем *обучающим* для $f \in F(n, k)$, если для любой функции $g \in F(n, k)$ ($g \ne f$) существует по крайней мере одна точка $z \in T$ такая, что $g(z) \ne f(z)$. Обучающее множество минимальной мощности назовем *минимальным* обучающим множеством. Его мощность обозначим через $t(f)$. *Длиной обучения* назовем величину

$$t(n, k) = \max_{f \in F(n, k)} t(f).$$

2. НИЖНЯЯ ОЦЕНКА СЛОЖНОСТИ РАСШИФРОВКИ ПОРОГОВЫХ ФУНКЦИЙ

Лемма 1. *При любых n и k выполняется неравенство* $\eta(n, k) \ge t(n, k)$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{A}$ – наилучший алгоритм расшифровки, т.е. такой алгоритм, что $\eta(\mathcal{A}) = \eta(n, k)$. Пусть также функция $f \in F(n, k)$ – наихудшая, т.е. $t(f) = t(n, k)$. Предположим, что доказываемое утверждение ложно: $\eta(n, k) < t(n, k)$, и, следовательно, для расшифровки f достаточно обратиться к оракулу менее, чем $t(f)$ раз. Однако по определению $t(f)$ должна существовать функция $g \in F(n, k)$ ($g \ne f$), значения которой совпадают со значениями функции f на опрашиваемых точках. Понятно, что имеющейся информации недостаточно для определения, какая из функций, f или g, задана, т.е. недостаточно для расшифровки функции f. Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

В разд. 5 будет показано, что $t(n, k) \ge C_n \log^{n-2} k$. Таким образом, справедлива

Теорема 1. *При любых $n \ge 2$ и $k \ge 2$ выполняется неравенство* $\eta(n, k) \ge C_n \log^{n-2} k$, *где C_n – некоторая зависящая только от n положительная величина.*

3. КОНУС РАЗДЕЛЯЮЩИХ ФУНКЦИОНАЛОВ

С каждой функцией $f \in F(n, k)$ в $(n + 2)$-мерном векторном пространстве свяжем конус $K(f)$ разделяющих функционалов $(a_0, \ldots, a_n, \tau)$, описываемый следующей системой линейных неравенство (см. [4]):

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \le a_0 \quad \forall(x_1, \ldots, x_n) \in M_0(f),$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \ge a_0 + \tau \quad \forall(x_1, \ldots, x_n) \in M_1(f), \tag{3}$$

$$\tau \ge 0.$$

Любое решение $(a_0, \ldots, a_n, \tau)$ этой системы при $\tau > 0$ определяет некоторое пороговое неравенство (2) для функции. Верно и обратное: коэффициенты $(a_0, \ldots, a_n)$ любого порогового неравенства функции $f \in F(n, k)$ удовлетворяют системе (3) при некотором положительном τ.

Лемма 2. *Конус $K(f)$ любой функции $f \in F(n, k)$ не содержит ненулевых подпространств.*

Доказательство. Достаточно убедиться в том, что если $a = (a_0, \ldots, a_n, \tau) \in K(f)$ и $-a \in K(f)$, то $a = 0$. Из рассмотрения системы (3) получаем, что в этом случае $\tau = 0$, и, следовательно, $B(n, k) \subseteq \subseteq \{x = (x_1, \ldots, x_n) \mid \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = a_0\}$. Так как размерность $B(n, k)$ равна n, то среди $a_i (i = 0, 1, \ldots, n)$ нет ненулевых чисел.

Лемма 3. *Размерность конуса $K(f)$ любой функции $f \in F(n, k)$ равна $n + 2$.*

Доказательство. Небольшим изменением коэффициентов $a_0, \ldots, a_n$ в пороговом неравенстве можно добиться строгого отделения гиперплоскостью множеств $M_0(f)$ и $M_1(f)$. Чтобы доказать это, достаточно распространить аргументы из [5], приведенные там при $k = 2$, на случай произвольного k. Таким образом, для произвольной $f \in F(n, k)$ существует вектор $(a_0, \ldots, a_n, \tau) \in K(f)$, строго удовлетворяющий всем неравенствам системы (3). Следовательно, $K(f)$ имеет полную размерность.

Используя леммы 2 и 3, из теории линейных неравенств получаем следующий результат (ср. [1]).

Лемма 4. 1. *Конус $K(f)$ имеет единственное с точностью до положительного множителя минимальное порождающее множество*

$$\{a^j = (a_0^j, \ldots, a_n^j, \tau^j), \; j = 1, 2, \ldots, s\}. \tag{4}$$

2. *Существуют определяемые единственным образом такие множества $T_\nu(f) \subseteq M_\nu(f)$ ($\nu = 0$, 1), что система* (3) *эквивалентна системе*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \le a_0 \quad \forall(x_1, \ldots, x_n) \in T_0(f),$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \ge a_0 + \tau \quad \forall(x_1, \ldots, x_n) \in T_1(f), \tag{5}$$

$$\tau \ge 0.$$

Никакая подсистема системы (5) *не эквивалентна исходной системе.*

3. *Для любого $x = (x_1, \ldots, x_n) \in T_0(f)$ существует такое подмножество J множества $\{1, 2, \ldots \ldots, s\}$, что $|J| = n + 1$, подсистема векторов $\{a^j, j \in J\}$ линейно независима и*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^j x_i = a_0^j, \quad j \in J, \quad \sum_{j \in J} \tau^j > 0. \tag{6}$$

4. *Для любого $x = (x_1, \ldots, x_n) \in T_1(f)$ существует такое подмножество J множества $\{1, 2, \ldots \ldots, s\}$ что $|J| = n + 1$, подсистема векторов $\{a^j, j \in J\}$ линейно независима и*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^j x_i = a_0^j + \tau^j, \quad j \in J, \quad \sum_{j \in J} \tau^j > 0.$$

4. СТРУКТУРА ОБУЧАЮЩЕГО МНОЖЕСТВА ПОРОГОВОЙ ФУНКЦИИ

Для произвольных $T_\nu \subseteq M_\nu(f)$ ($\nu = 0, 1$) рассмотрим следующую подсистему системы (3):

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \le a_0 \quad \forall (x_1, \ldots, x_n) \in T_0,\\ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \ge a_0 + \tau \quad \forall (x_1, \ldots, x_n) \in T_1, \\ \tau \ge 0.\end{gathered} \tag{7}$$

Теорема 2. *Для того чтобы множество* $T = T_0 \cup T_1 (T_\nu \subseteq M_\nu(f)$, $\nu = 0, 1)$ *было обучающим для* $f \in F(n, k)$, *необходимо и достаточно, чтобы система неравенств* (7) *была эквивалентна системе неравенств* (3).

Доказательство. Поскольку достаточность условий очевидна, покажем их необходимость. Предположим, что нашлось решение $b = (b_0, \ldots, b_n, \tau)$ системы (7), не принадлежащее конусу $K(f)$. По лемме 3 можем считать, что $\tau > 0$. Неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} b_i x_i \le b_0$$

определяет некоторую функцию $g \in F(n, k)$, а так как $b \notin K(f)$, то $g \ne f$. Однако $g(x) = f(x)$ для всех $x \in T$. Следовательно, T не является обучающим множеством.

Из доказанной теоремы получаем

Следствие 1. Для любой $f \in F(n, k)$ множество $T = T_0 \cup T_1$, где $T_\nu \subseteq M_\nu$ ($\nu = 0, 1$), является минимальным обучающим тогда и только тогда, когда $T_\nu = T_\nu(f)$ ($\nu = 0, 1$).

Отсюда и из утверждения 2 леммы 4 вытекает

Следствие 2. Для любой $f \in F(n, k)$ минимальное обучающее множество единственно.

Минимальное обучающее множество функции f обозначим через $T(f) = T_0(f) \cup T_1(f)$. В [1] было показано, что при $T_\nu = N_\nu(f)$ ($\nu = 0, 1$) система (7) эквивалентна системе (3). Отсюда и из теоремы 2 следует

Теорема 3. *Для любой* $f \in F(n, k)$ *справедливо включение* $T(f) \subseteq N_0(f) \cup N_1(f)$.

Лемма 5. 1. *Для любого* $y \in T_0(f)$ *существуют такие* $\tau > 0$, $a_0, \ldots, a_n$, *что*

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{n} a_i y_i = a_0,\\ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i < a_0 \quad \forall (x_1, \ldots, x_n) \in M_0(f) \backslash \{y\}, \\ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \ge a_0 + \tau \quad \forall (x_1, \ldots, x_n) \in M_1(f).\end{gathered} \tag{8}$$

2. *Для любого* $y \in T_1(f)$ *существуют такие* $\tau > 0$, $a_0, \ldots, a_n$, *что*

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{n} a_i y_i = a_0 + \tau,\\ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i > a_0 + \tau \quad \forall (x_1, \ldots, x_n) \in M_1(f) \backslash \{y\}, \\ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \le a_0 \quad \forall (x_1, \ldots, x_n) \in M_0(f).\end{gathered}$$

Доказательство. Положим в утверждении 3 леммы 4

$$a_i = \sum_{j \in J} a_i^j, \quad \tau = \sum_{j \in J} \tau^j, \quad 0 < i \le n. \tag{9}$$

Теперь условия (8) легко проверяются:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i y_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j \in J} a_i^j y_i = \sum_{j \in J} a_0^j = a_0.$$

Для произвольного $x = (x_1, \ldots, x_n) \in M_0(f)$ имеем $\Sigma_{i=1}^n a_i x_i \le a_0$, однако $\Sigma_{i=1}^n a_i x_i \ne a_0$ по лемме 4. Действительно, рассмотрим равенства в (6) как систему уравнений относительно x_i. Из леммы 4 следует, что y – ее единственное решение. Следовательно, найдется такое $j' \in J$, что $\Sigma_{i=1}^n a_i^{j'} x_i < a_0^{j'}$. Поэтому $\Sigma_{i=1}^n a_i x_i < a_0$. Для произвольного $x = (x_1, \ldots, x_n) \in M_1(f)$ имеем

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j \in J} a_i^j x_i \ge \sum_{j \in J} (a_0^j + \tau^j) \ge a_0 + \tau.$$

Аналогично доказывается и утверждение 2 леммы 5.

Предположим, что в (4) будет $\tau^j > 0$ при $j = 1, 2, \ldots, \mu$ и $\tau^j = 0$ при $j = \mu + 1, \ldots, s$. Пусть $a = (a_1, \ldots, a_n)$ – целочисленный вектор,

$$M_0(f, a) = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in B(n, k) \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = \max_{y \in M_0(f)} \sum_{i=1}^{n} a_i y_i \right\},$$

$$M_1(f, a) = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in B(n, k) \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = \min_{y \in M_1(f)} \sum_{i=1}^{n} a_i y_i \right\}.$$

Обозначим через $N_\nu(f, a)$ множество крайних точек (вершин) выпуклой оболочки множества $M_\nu(f, a)$ ($\nu = 0, 1$). Из леммы 5 следует

Теорема 4. *Для любой функции $f \in F(n, k)$ имеем*

$$T(f) = \bigcup_{j=1}^{\mu} (N_0(f, a^j) \cup N_1(f, a^j)) = \bigcup_{a} (N_0(f, a) \cup N_1(f, a));$$

в последнем случае объединение берется по всем таким $a = (a_1, \ldots, a_n)$, что неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \le \max_{y \in M_0(f)} \sum_{i=1}^{n} a_i y_i$$

является пороговым для функции f.

5. ОЦЕНКИ ДЛИНЫ ОБУЧЕНИЯ В КЛАССЕ ПОРОГОВЫХ ФУНКЦИЙ

Обозначим через $N(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ множество вершин выпуклой оболочки решений системы

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = a_0,$$

$$x_i \ge 0, \quad x_i \text{ – целое}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

В [6] получена нижняя оценка среднего значения величины $|N(a_0, \ldots, a_n)|$. Из нее следует

Лемма 6 (см. [6]). *При любых $n \ge 2$, $k \ge 2$ существуют положительные $a_0, \ldots, a_n$ такие, что $a_i \le k - 1$ ($i = 0, 1, \ldots, n$) и $|N(a_0, \ldots, a_n)| \ge C_n \log^{n-2} k$, где C_n – некоторая зависящая только от n положительная величина.*

Основной результат данного раздела сформулируем в виде следующего утверждения.

Теорема 5. *При любых $n \geq 2$ и $k \geq 2$ справедливы оценки*

$$C_n \log^{n-2} k \leq t(n, k) \leq C'_n \log^{n-1} k,$$

где C_n и C'_n – некоторые зависящие только от n положительные величины.

Доказательство. Для получения нижней оценки построим пороговую функцию f: в качестве коэффициентов ее порогового неравенства возьмем $a_0, \ldots, a_n$ из формулировки леммы 7. Так как $1 \leq a_i \leq k-1$, то $N(a_0, \ldots, a_n) \subseteq B(n, k)$. Из теоремы 4 теперь следует, что $N(a_0, \ldots, a_n) \subseteq T(f)$, а значит, $t(f) \geq C_n \log^{n-2} k$. Поэтому $t(n, k) \geq C_n \log^{n-2} k$.

Верхняя оценка впервые в явном виде сформулирована в [2]. По теореме 3 имеем $T(f) \subseteq N_0(f) \cup \cup N_1(f)$, кроме того, в [2], [3] доказано, что $|N_0(f)| + |N_1(f)| \leq C'_n \log^{n-1} k$, где C'_n – некоторая зависящая только от n величина. Отсюда получаем, что $t(f) \leq C'_n \log^{n-1} k$ для любой функции $f \in F(n, k)$. Теорема доказана.

Теорема 1 вытекает теперь из леммы 1.

Заметим, что при $n = 3$ коэффициенты порогового неравенства функции f, на которой достигается нижняя оценка в теореме 5, можно указать в явном виде. Положим $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 2$, $\gamma_2 = \gamma'_2 = 1$ и для каждого натурального $m \geq 2$ определим $\beta_{m+1} = 2\beta_m + \beta_{m-1}$, $\gamma_{m+1} = \beta_m + \gamma'_m$, $\gamma'_{m+1} = \beta_{m+1} - \beta_m + \gamma_m$. Если теперь взять $k = a_1 = \beta_m$, $a_2 = \beta_{m+1}$, $a_3 = \beta_m + \beta_{m-1}$ и при четном m выбрать $a_0 = a_3\gamma_m$, а при нечетном выбрать $a_0 = a_3\gamma'_m$, то нетрудно доказать, что $|N(a_0, a_1, a_2, a_3)| \geq m$ и m пропорционально логарифму от k. Доказательство можно найти в [7, § 3.5].

6. ПОРОГОВЫЕ БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ

Для булевых пороговых функций из теоремы 4 получаем $\eta(n, 2) = t(n, 2) = 2^n$.

Рассмотрим теперь классы $F_\mu(n)$ и $F_\pi(n)$ монотонных и пороговых монотонных функций, отображающих $B(n, 2)$ в $\{0, 1\}$. Как и в разделе 1, для этих классов определим сложность расшифровки $\eta_\mu(n)$ и $\eta_\pi(n)$ и длину обучения $t_\mu(n)$ и $t_\pi(n)$ соответственно. Известно [8], что $\eta_\mu(n) = t_\mu(n) = \binom{n}{[n/2]} + \binom{n}{[n/2]+1}$, причем для расшифровки функции f', задаваемой пороговым неравенством

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leq \left[\frac{n}{2}\right],$$

необходимо $\eta_\mu(n)$ обращений.

Покажем, что f' остается "наихудшей" и при сужении класса функций от $F_\mu(n)$ до $F_\pi(n)$. Действительно, на пороговой гиперплоскости функции f' находится $\binom{n}{[n/2]}$ точек из $M_0(f')$, а на гиперплоскости, описываемой уравнением

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \left[\frac{n}{2}+1\right],$$

находится $\binom{n}{[n/2]+1}$ точек из $M_1(f')$. Очевидно, что каждая из этих точек принадлежит множеству $N([n/2], 1; \ldots, 1)$ или $N([n/2]+1, 1, \ldots, 1)$ соответственно. Из теоремы 4 теперь следует

Теорема 6. *Для любого $n \geq 2$ справедливо равенство*

$$\eta_\pi(n) = t_\pi(n) = \binom{n}{[n/2]} + \binom{n}{[n/2]+1}.$$

Заметим, что теорема 6 сформулирована также в [2] со ссылкой на работу [9], с которой авторам, к сожалению, не удалось познакомиться (ср. также [1]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шевченко В.Н.* О расшифровке пороговых функций многозначной логики // Комбинаторно-алгебраич. методы в прикл. матем. Горький: Горьковский гос. ун-т, 1987. С. 155–163.
2. *Hegedüs T.* Geometrical concept learning and convex polytopes // Proc. 7th Ann. ACM Conf. Comput. Learning Theory. New York: ACM Press, 1994. P. 228–236.
3. *Золотых Н.Ю., Шевченко В.Н.* Расшифровка пороговых функций k-значной логики // Дискретный анализ и иссл. операций. 1995. Т. 2. № 3. С. 18–23.
4. *Шевченко В.Н.* О некоторых функциях многозначной логики, связанных с целочисленным программированием // Методы дискретного анализа в теории графов и схем. Новосибирск: Ин-т матем. СО АН СССР, 1985. Вып. 42. С. 99–108.
5. *Нечипорук Э.И.* О синтезе схем из пороговых элементов // Пробл. кибернетики. М.: Наука, 1964. Вып. 11. С. 49–62.
6. *Веселов С.И.* Нижняя оценка среднего числа неприводимых и крайних точек в двух задачах дискретного программирования. – Деп. в ВИНИТИ, 1984. № 619-84.
7. *Шевченко В.Н.* Качественные вопросы целочисленного программирования. М.: Физматгиз, 1995.
8. *Ансель Ж.* О числе монотонных булевых функций n переменных // Кибернетич. сб. Нов. сер. М.: Мир, 1968. Вып. 5. С. 53–57.
9. *Antony M., Brightwell G., Cohen D., Shawe-Taylor J.* On exact specification by examples // Proc. 5th Ann. ACM Conf. Comput. Learning Theory. New York: ACM Press, 1992. P. 311–318.

Сдано в набор 30.10.98 г. Подписано к печати 06.01.99 г. Формат бумаги $60 \times 88^1/_8$
Офсетная печать Усл. печ. л. 22.0 Усл. кр.-отт. 10.1 тыс. Уч.-изд. л. 21.9 Бум. л. 11.0
Тираж 449 экз. Зак. 2237

Отпечатано в типографии "Наука", 121099, Москва, Шубинский пер., 6