Известия вузов. Математика *https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm*
2023, №1, с. 25–35 *e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru*

А.М. ГАЙСИН, Г.А. ГАЙСИНА

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ МАКСИМАЛЬНОГО ЧЛЕНА РЯДА ДИРИХЛЕ

Аннотация. Изучается поведение максимального члена измененного ряда Дирихле с положительными показателями, сумма которого представляет собой целую функцию. Для класса целых рядов Дирихле, определяемого некоторой выпуклой мажорантой роста, доказан критерий эквивалентности логарифмов максимального члена исходного ряда и измененного ряда — адамаровской композиции — на асимптотическом множестве. Соответствующая задача об устойчивости максимального члена для рядов Дирихле произвольного роста ранее изучалась первым автором в связи с проблемой Полиа об асимптотическом поведении целых трансцендентных функций на кривых, уходящих в бесконечность.

Ключевые слова: ряд Дирихле, максимальный член, выпуклая мажоранта, адамаровская композиция, преобразование Юнга.

УДК: 517.53

DOI: 10.26907/0021-3446-2023-1-25-35

Введение

Исследование поведения максимального члена $\mu(\sigma) = \mu(\sigma, F) = \max_{n\geq 0}\left\{|a_n|e^{\lambda_n\sigma}\right\}$ целого ряда Дирихле

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{\lambda_n s}, \quad s = \sigma + it, \quad a_0 = 1, \tag{1}$$

с последовательностью показателей

$$\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}, \quad 0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n \to \infty,$$

является актуальным в теории асимптотических значений, в задачах о росте и убывании рядов (1) на кривых, определенным образом уходящих в бесконечность [1]. Устойчивость максимального члена $\mu(\sigma, F)$ ряда Дирихле (1), абсолютно сходящегося во всей плоскости, впервые исследовалась в [1], где была решена следующая задача Полиа о регулярности роста функции F на кривых: при каких условиях на Λ для любой кривой Γ, уходящей в бесконечность так, что если $s \in \Gamma$ и $s \to \infty$, то $\mathrm{Re}s \to +\infty$, существует последовательность $\{\xi_n\} \subset \Gamma$, $\sup_n |\xi_n| = \infty$, такая, что при $\xi_n \to \infty$

$$\ln|F(\xi_n)| = (1 + \mathrm{o}(1)) \ln M(\mathrm{Re}\xi_n)?$$

Здесь $M(\sigma) = M(\sigma, F) = \sup_{|t|<\infty} |F(\sigma + it)|$.

Поступила в редакцию 15.03.2022, после доработки 18.05.2022. Принята к публикации 29.06.2022.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации по соглашению № 075-02-2022-1826.

В процессе решения данной проблемы естественным образом возникла другая задача об эквивалентности максимальных членов ряда (1) и измененного ряда Дирихле

$$F^*(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n Q'(\lambda_n) e^{\lambda_n s},$$

где

$$Q(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_n^2}\right) \tag{2}$$

— целая функция экспоненциального типа.

В [1] изучались ряды Дирихле без никакого ограничения на рост. Позже аналогичные задачи рассматривались и для рядов Дирихле заданного роста, например, конечного порядка по Ритту [2]. В указанных работах показатели λ_n — нули целой функции экспоненциального типа (2), т. е. последовательность Λ имеет конечную верхнюю плотность. Однако изучение устойчивости максимального члена ряда (1) представляет собой и самостоятельный интерес. В общем случае может оказаться, что показатели ряда (1) даже не нули целой функции конечного порядка. Тем не менее, можно указать оптимальные условия на Λ, а также на последовательность $B = \{b_n\}$ ($b_n \neq 0$, $n \geq 0$), при выполнении которых на асимптотическом множестве

$$\ln \mu(\sigma) \sim \ln \mu_b^*(\sigma), \tag{3}$$

где $\mu_b^*(\sigma)$ — максимальный член измененного, также целого ряда Дирихле

$$F_b^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n e^{\lambda_n s}.$$

Свойство (3) обычно выполняется вне исключительного множества $E \subset \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ малой меры и называется устойчивостью максимального члена $\mu(\sigma)$. Множество $A = \mathbb{R}_+ \setminus E$ называется асимптотическим множеством.

Цель статьи — выяснить, при каких условиях имеет место соотношение (3) для рядов Дирихле (1), где

$$\ln M(\sigma) \leq \Phi(k\sigma),$$

Φ — некоторая положительная выпуклая функция. Постановка задачи принадлежит первому автору. Основной результат статьи получен вторым автором.

1. Необходимые сведения. Основной результат

Пусть L — класс всех непрерывных и неограниченно возрастающих на $\mathbb{R}_+$ функций. Обозначим через $D(\Lambda)$ класс функций F, представимых в $\mathbb{C}$ абсолютно сходящимися рядами Дирихле (1).

Теорема 1 ([3], с. 42). *Для того, чтобы для любой функции $F \in D(\Lambda)$ при $\sigma \to +\infty$ вне некоторого множества $E \subset \mathbb{R}_+$ конечной меры выполнялось асимптотическое равенство*

$$\ln M(\sigma) = (1 + o(1)) \ln \mu(\sigma), \tag{4}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\lambda_n} < \infty. \tag{5}$$

Из оценок [4]

$$\int_0^R \frac{\ln^+ n(x)}{x^2}dx \leq \sum_{0<\lambda_n\leq R} \frac{1}{n\lambda_n} \leq \frac{1}{\ln 2}\left[\int_0^R \frac{\ln^+ n(x)}{x^2}dx + \frac{\ln n(R)}{R}\right], \tag{6}$$

где $a^+ = \max(a,0)$, $n(x) = \sum_{\lambda_n\leq x} 1$, видно, что (5) равносильно условию

$$\int_0^\infty \frac{\ln^+ n(x)}{x^2}dx < \infty. \tag{7}$$

Ограничение (5) (или (7)) можно ослабить, если наложить дополнительное ограничение на рост функции $M(\sigma) = M(\sigma, F)$, что то же самое, на убывание коэффициентов ряда Дирихле (1). Действительно, пусть φ — любая функция, заданная на $\mathbb{R}_+$, $\frac{\varphi(x)}{x} \to \infty$ при $x \to \infty$ (допускается, что на какой-то последовательности $\{x_n\}$, $x_n \uparrow \infty$, φ принимает значение $+\infty$). Сопряженной (или двойственной) по Юнгу называется функция

$$\varphi_*(\xi) = \sup_{x>0}(x\xi - \varphi(x)).$$

Функция φ_* является выпуклой, $\frac{\varphi_*(\xi)}{\xi} \to \infty$ при $\xi \to \infty$, а функция $(\varphi_*)_* = \varphi_{**}$ совпадает с наибольшей выпуклой минорантой функции φ. В частности, если φ выпукла, то $\varphi_{**}(x) \equiv \varphi(x)$ (см. [5]).

Пусть Φ — выпуклая на $\mathbb{R}_+$ функция, $\Phi \in L$, а Ψ — функция, двойственная с ней по Юнгу, $F \in D(\Lambda)$. Как известно [5], $\ln\mu(\sigma) = \ln\mu(\sigma, F) \leq \Phi(\sigma)$ тогда и только тогда, когда

$$|a_n| \leq e^{-\Psi(\lambda_n)}, \quad \Psi(\lambda_n) = \lambda_n\psi(\lambda_n), \quad n \geq 0. \tag{8}$$

Класс рядов Дирихле (1), коэффициенты которых удовлетворяют условию (8), будем обозначать через $D_\psi(\Lambda)$.

Верхней и нижней плотностями измеримого по Лебегу множества $E \subset \mathbb{R}_+$ называются

$$DE = \overline{\lim_{\sigma\to\infty}} \frac{\mu(E\cap[0,\sigma])}{\sigma}, \quad dE = \underline{\lim_{\sigma\to\infty}} \frac{\mu(E\cap[0,\sigma])}{\sigma}.$$

Пусть, как и выше, L — класс всех положительных, непрерывных и неограниченно возрастающих на $\mathbb{R}_+$ функций.

Теорема 2 ([4], с. 216). *Пусть $\psi \in L$. Если для любого $\eta > 0$*

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{\psi(\eta R)} \sum_{0<\lambda_n\leq R} \frac{1}{n\lambda_n} = 0, \tag{9}$$

то для каждой функции $F \in D_\psi(\Lambda)$ при $\sigma \to +\infty$ вне некоторого множества E, $DE = 0$, имеет место соотношение (4).

Если для любого $\eta > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\lambda_n\psi(\eta\lambda_n)} = 0, \tag{10}$$

то (8) является и необходимым для того, чтобы для любой функции $F \in D_\psi(\Lambda)$ при $\sigma \to +\infty$ вне некоторого множества нулевой плотности выполнялось соотношение $\ln M(\sigma) \sim \ln\mu(\sigma)$.

В случае, когда $\lambda_n = \ln(n+1)$, $n \geq 0$, имеем

$$\sum_{0<\lambda_n\leq\lambda_k} \frac{1}{n\lambda_n} \sim \ln\lambda_k, \quad k\to\infty.$$

Поэтому для целых рядов Дирихле

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^s, \quad a_1 = 1,$$

из класса $D_\psi(\Lambda)$ условие согласованности (9) выполнено тогда и только тогда, когда в оценках (8) функция $\psi \in L$ будет удовлетворять требованию

$$\frac{\psi(x)}{\ln x} \to \infty \text{ при } x\to\infty.$$

Поэтому для классических рядов Дирихле по системе $\{n^s\}$, имеющих конечный порядок ρ_R по Ритту, соотношение (4) будет иметь место только тогда, когда $\rho_R = 0$ (см. [6]).

В настоящей статье изучаются целые ряды Дирихле из класса $D(\Phi)$, определяемого некоторой мажорантой $\Phi \in L$, $\dfrac{\Phi(x)}{x} \to \infty$ при $x \to \infty$. В терминах соответствующей функции ψ из (8) будет доказан критерий устойчивости максимального члена. Поскольку функция $\ln M(\sigma)$ выпуклая, естественно считать, что и мажоранта $\Phi(\sigma)$ тоже выпуклая.

Итак, пусть Φ — положительная выпуклая на $\mathbb{R}_+$ функция,

$$D_m(\Phi) = \{F \in D(\Lambda):\ \ln M(\sigma) \leq \Phi(m\sigma)\},\ m \geq 1.$$

Положим

$$D(\Phi) = \bigcup_{m=1}^{\infty} D_m(\Phi).$$

Если $F \in D(\Phi)$, то $\ln\mu(\sigma) \leq \ln M(\sigma) \leq \Phi(m\sigma)$ при некотором $m \in \mathbb{N}$ и потому

$$|a_n| \leq e^{-\frac{\lambda_n}{m}\psi\left(\frac{\lambda_n}{m}\right)}, \quad n \geq 0. \tag{11}$$

Условия (10), (11) обеспечивают абсолютную сходимость ряда (1) в $\mathbb{C}$. Наряду с (1) введем ряд

$$F_b^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n e^{\lambda_n s}, \tag{12}$$

где последовательность $B = \{b_n\}_{n=0}^{\infty}$, $b_0 = 1$, $b_n \neq 0$ при $n \geq 1$, удовлетворяет условию

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{|\ln|b_n||}{\lambda_n} < \infty. \tag{13}$$

В силу условия (13) при достаточно большом $m \in \mathbb{N}$ также имеем $\ln\mu_b^*(\sigma) \leq \Phi(m\sigma)$. Поэтому $F_b^* \in D_m(\Phi)$, и для коэффициентов $a_n b_n$ ряда (12) будут верны те же оценки (11).

Будем говорить, что последовательность $B = \{b_n\}$ является $W(\psi)$-нормальной, если найдется функция $\theta \in L$ такая, что

$$\ln\frac{1}{|b_n|} \leq \theta(\lambda_n), \quad n \geq 0,$$

причем для любого $\eta > 0$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\psi(\eta x)} \int_1^x \frac{\theta(t)}{t^2}\,dt = 0. \tag{14}$$

Пусть $\ln n(t) = \mathrm{o}(t)$ при $t \to \infty$, а $n_l(t)$ — наименьшая вогнутая мажоранта функции $\ln n(t)$. Такая мажоранта определена корректно, причем $n_l(t) = \mathrm{o}(t)$ при $t \to \infty$.

Теорема 3 ([7]). *Пусть $B = \{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ $(b_0 = 1, b_n \neq 0, n \geq 1)$ — последовательность, удовлетворяющая условию (13), Φ — выпуклая функция из класса L. Предположим, что для функции φ, обратной к Φ, выполняется условие*

$$\varlimsup_{x\to\infty} \frac{\varphi(x^2)}{\varphi(x)} < \infty,$$

а для мажоранты $n_l(t)$ — условие (14).

Для того, чтобы для любой функции $F \in D(\Phi)$ при $\sigma \to +\infty$ вне некоторого множества $E \subset \mathbb{R}_+$ нулевой нижней плотности было справедливо асимптотическое равенство

$$\ln \mu(\sigma) = (1 + o(1)) \ln \mu_b^*(\sigma), \tag{15}$$

достаточно, а для $W(\varphi)$-нормальной последовательности $B = \{b_n\}$ и необходимо, чтобы существовала функция $w \in \underline{W}(\varphi)$ такая, что

$$|\ln |b_n|| \leq w(\lambda_n), \quad n \geq 0.$$

По определению $\underline{W}(\varphi)$ — класс функций $w \in W$, $\sqrt{x} \leq w(x)$, причем для любого $\eta > 0$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{w(x)}{x\varphi(\eta x)} = 0, \quad \varliminf_{x\to\infty} \frac{1}{\varphi(\eta x)} \int_1^{\infty} \frac{w(t)}{t^2} dt = 0.$$

Аналогично определяется и класс $W(\varphi)$, где в последнем из предыдущих условий нижний предел заменяется на обычный.

Поскольку в теореме 3 φ — вогнутая функция, в определениях класса $\underline{W}(\varphi)$- и $W(\varphi)$-нормальности последовательности B достаточно положить $\eta = 1$.

Отметим, что критерий устойчивости максимального члена для рядов Дирихле (1) произвольного роста получен в [1], а для более широкого класса последовательности показателей $\Lambda = \{\lambda_n\}$ — в [8].

Сформулируем теперь основной результат.

Теорема 4. *Пусть $B = \{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ $(b_0 = 1,\ b_n \neq 0,\ n \geq 1)$ — последовательность комплексных чисел, удовлетворяющая условию (13), Φ — положительная возрастающая выпуклая на $\mathbb{R}_+$ функция, Ψ — функция, сопряженная с ней по Юнгу, $\psi(t) = \dfrac{\Psi(t)}{t}$. Предположим, что последовательность Λ удовлетворяет условиям (9), (10).*

Для того, чтобы для любой функции $F \in D(\Phi)$ при $\sigma \to +\infty$ вне некоторого множества $E \subset \mathbb{R}_+$ нулевой нижней плотности было справедливо соотношение (15), достаточно, а для $W(\psi)$-нормальной последовательности B и необходимо, чтобы нашлась функция $w \in \underline{W}(\psi)$ такая, что

$$|\ln |b_n|| \leq w(\lambda_n), \quad n \geq 0. \tag{16}$$

2. Доказательство основного результата

Предварительно сделаем одно замечание относительно условий на последовательности B и Λ.

Замечание. Условие (9) в силу оценок (6) можно сформулировать в следующем виде: для любого $\eta > 0$

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{\psi(\eta R)} \int_0^R \frac{\ln^+ n(t)}{t^2} dt = 0. \tag{17}$$

Замечание состоит в том, что в условиях (14), (17) функции $\theta(t)$ и $\ln n(t)$ можно заменить на мажоранту более быстрого роста, сохранив эти условия в силе [2], а именно, показать, что существует функция $\omega \in L$, удовлетворяющая (14), (17), такая, что

$$\ln n(t) \le \omega(t), \quad \theta(t) \le \omega(t),$$

причем $\ln n(t) = \mathrm{o}(\omega(t))$, $\theta(t) = \mathrm{o}(\omega(t))$ при $t \to \infty$. Легко также показать, что тогда функция ω будет удовлетворять и условию (10). Действительно, из условия, например, (14), для ω будем иметь следующее: для всякого $\eta > 0$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\psi(\eta x)} \int_{x/2}^{x} \frac{\omega(t)}{t^2} dt = 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\omega\left(\dfrac{x}{2}\right)}{\dfrac{x}{2}\psi(\eta x)} = 0.$$

Для заданного $\xi > 0$ положим $\eta = \dfrac{\xi}{2}$. Тогда, действительно, условие (10) для ω выполнено.

Далее мажоранта w из (16) обладает следующими свойствами:

a) $w(x) = \mathrm{o}(x\psi(\eta x))$ при $x \to \infty$,

b) для некоторой последовательности $\{x_n\}$, $x_n \uparrow \infty$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\psi(\eta x_n)} \int_0^{x_n} \frac{\alpha(t)}{t^2} dt = 0, \tag{18}$$

где $\alpha(t) = \max_{\lambda_n \le t}\{\ln^+ |b_n|, n \ge 0\}$, $b(\lambda_n) = b_n$, $b_0 = 1$. Ясно, что $\alpha(t)$ — наименьшая неубывающая мажоранта последовательности B. Пусть $\{t_n\}$ — последовательность всех точек разрыва функции $\alpha(t)$. Тогда $\alpha(t) = \alpha_n$ при $t_n \le t < t_{n+1}$, $n \ge 1$, $\alpha(t) \equiv 0$ для $0 \le t < t_1$.

Пусть $x_n \in [t_{m_n-1}, t_{m_n})$, тогда

$$\frac{1}{\psi(\eta t_{m_n})} \int_0^{t_{m_n}} \frac{\alpha(t)}{t^2} dt \le \frac{1}{\psi(\eta x_n)} \int_0^{x_n} \frac{\alpha(t)}{t^2} dt + \frac{\alpha(x_n)}{x_n \psi(\eta x_n)}.$$

Так как $\alpha(x_n) = \mathrm{o}(x_n\psi(\eta x_n))$ при $n \to \infty$, то из (18) следует, что для некоторой подпоследовательности $\{t_{m_n}\}$, $t_{m_n} = \lambda_{j_n}$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\psi(\eta t_{m_n})} \int_0^{t_{m_n}} \frac{\alpha(t)}{t^2} dt = 0, \tag{19}$$

где $\eta > 0$ любое.

Доказательство теоремы 4. *Достаточность*. Пусть выполнены условия (9), (10) и (16), где $w \in \underline{W}(\psi)$. В силу замечания существует функция $w^* \in \underline{W}(\psi)$, $w^*(t) \equiv 0$ при $t \in [0, t_0)$, удовлетворяющая тем же условиям и имеющая вид $w^*(t) = \beta(t)w_0(t)$, $\beta \in L$, $w_0 \in L$, причем

$$\ln n(t) \le w_0(t), \quad w(t) \le w_0(t).$$

Если учесть (19), то функцию w^*, очевидно, можно выбрать так, чтобы для любого $\eta > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\psi(\eta t_{m_n})} \int_0^{t_{m_n}} \frac{w^*(et)}{t^2} dt = 0, \quad t_{m_n} = \lambda_{j_n}. \tag{20}$$

Убедимся, что при всех $\sigma \geq 0$ вне некоторого множества $E \subset \mathbb{R}_+$ нулевой нижней плотности верны оценки

$$|a_n|e^{\lambda_n\sigma} \leq \mu(\sigma)\exp\left\{-\int_{\lambda_\nu}^{\lambda_n} \frac{\lambda_n - t}{t^2} w^*(et)dt\right\}, \quad n \geq 0, \tag{21}$$

где $\mu(\sigma) = \mu(\sigma, F)$, $\nu = \nu(\sigma, F)$ — максимальный член и центральный индекс ряда (1), $F \in D(\Phi)$.

Действительно, положим [9]

$$\alpha(t) = \int_0^t \frac{w^*(et)}{t^2}dt, \quad \alpha_n = \exp\left\{-\int_0^{\lambda_n} \alpha(t)dt\right\},$$

$\tau_n = \alpha(\lambda_n)$, $A_n = \dfrac{|a_n|}{\alpha_n}$, $n \geq 0$.

Пусть $[R_n, R_{n+1})$ — полуинтервал, в котором центральный индекс ряда Дирихле с коэффициентами A_n совпадает с $\nu = \nu(\sigma) = n$. Тогда, как показано в [9], оценки (21) верны для всех $\sigma \geq 0$ вне множества

$$E_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty}[R_n + \tau_{n-1}, R_n + \tau_n).$$

Поскольку $F \in D(\Phi)$, то при некотором $m \in \mathbb{N}$ имеем $F \in D_m(\Phi)$, т. е. $\ln \mu(\sigma) \leq \ln M(\sigma) \leq \Phi(m\sigma)$. Тогда для коэффициентов a_n верны оценки (11).

Если $\sigma \in [R_n + \tau_n, R_{n+1} + \tau_n)$ при некотором $n \geq 1$, то $\nu(\sigma) = n$, причем согласно (11)

$$0 \leq \ln \mu(\sigma) \leq -\frac{\lambda_n}{m}\psi\left(\frac{\lambda_n}{m}\right) + \lambda_n\sigma$$

при $n \geq n_0$. Отсюда

$$\sigma \geq \frac{1}{m}\psi\left(\frac{\lambda_n}{m}\right), \quad n \geq n_0. \tag{22}$$

В данном случае

$$\mu(E_1 \cap [0, \sigma]) = \mu(E_1 \cap [0, R_n + \tau_n]) \leq \sum_{j=1}^{n}(\tau_j - \tau_{j-1}) \leq \tau_n.$$

Пусть $d(E_1; \sigma)$ — переменная плотность множества E_1, т. е.

$$d(E_1; \sigma) = \frac{\mu(E_1 \cap [0, \sigma])}{\sigma}.$$

Согласно (22)

$$d(E_1; \sigma) \leq \frac{\tau_n}{m^{-1}\psi\left(\dfrac{\lambda_n}{m}\right)}, \quad \tau_n = \alpha(\lambda_n), \quad n \geq n_0. \tag{23}$$

Если же $\sigma \in [R_n + \tau_{n-1}, R_n + \tau_n)$, то $\sigma \geq R_n + \tau_n - (\tau_n - \tau_{n-1}) \geq \dfrac{1}{m}\psi\left(\dfrac{\lambda_n}{m}\right) - \tau_n$, $n \geq n_0$, ибо оценка (22) верна и при $\sigma = R_n + \tau_n$. Значит,

$$d(E_1; \sigma) \leq \frac{\tau_n}{m^{-1}\psi\left(\dfrac{\lambda_n}{m}\right) - \tau_n}, \quad \tau_n = \alpha(\lambda_n). \tag{24}$$

Но для любого $\eta > 0$ согласно (20) имеем $\alpha(t_{m_n}) = \mathrm{o}(t_{m_n}\psi(\eta t_{m_n}))$, $n \to \infty$, где $t_{m_n} = \lambda_{j_n}$. Тогда, учитывая (23), (24), заключаем, что в условиях теоремы 4 оценки (21) имеют место при всех $\sigma \geq 0$ вне E_1, $d(E_1; t_{m_n}) = \mathrm{o}(1)$, $n \to \infty$.

Пусть $v = v(\sigma)$ — решение уравнения

$$w^*(v) = 2\ln\mu(\sigma). \tag{25}$$

Тогда, полагая в (21) $n = 0$ и учитывая, что $a_0 = 1$, будем иметь

$$\ln\mu(\sigma) \geq \int_0^{\lambda_\nu} \frac{w^*(et)}{t}dt \geq \int_{\lambda_\nu/e}^{\lambda_\nu} \frac{w^*(et)}{t}dt \geq w^*(\lambda\nu).$$

Принимая во внимание (25), получаем, что $w^*(v) \geq 2w^*(\lambda_\nu) > w^*(\lambda_\nu)$, т. е. $v = v(\sigma) > \lambda_\nu$ при всех $\sigma \geq 0$ вне E_1. Следовательно, учитывая (16), (25), имеем

$$\mu(\sigma) = |a_\nu|e^{\lambda_\nu\sigma} = |a_\nu b_\nu|e^{\lambda_\nu\sigma}|b_\nu|^{-1} \leq \mu_b^*(\sigma)e^{w(\lambda_\nu)} \leq \mu_b^*(\sigma)e^{w^*(v(\sigma))} = \mu_b^*(\sigma)[\mu(\sigma)]^{\mathrm{o}(1)}$$

при $\sigma \to \infty$ вне E_1. Это означает, что при $\sigma \to \infty$ вне E_1

$$(1 + \mathrm{o}(1))\ln\mu(\sigma) \leq \ln\mu_b^*(\sigma). \tag{26}$$

С другой стороны,

$$\mu_b^*(\sigma) = |a_k b_k|e^{\lambda_k\sigma} \leq \mu(\sigma) \leq \mu(\sigma)e^{w(\lambda_k)},$$

где $k = k(\sigma)$ — центральный индекс ряда (12). Пусть $p = p(\sigma)$ — решение уравнения

$$w^*(p) = 2\ln\mu_b^*(\sigma). \tag{27}$$

Так как при достаточно большом $m \in \mathbb{N}$

$$\ln\mu(\sigma) \leq \Phi(m\sigma), \quad \ln\mu_b^*(\sigma) \leq \Phi(m\sigma),$$

то для коэффициентов ряда (12) верны те же оценки (11), следовательно и оценки (21), при всех $\sigma \geq 0$ вне некоторого множества E_2, $dE_2 = 0$. Отсюда следует, что $\lambda_{k(\sigma)} < p(\sigma)$ при всех $\sigma \geq 0$ вне E_2 (см. выше). Следовательно, если учесть (27), то при $\sigma \to +\infty$ вне E_2

$$\mu_b^*(\sigma) \leq \mu(\sigma)e^{w(p(\sigma))} = \mu(\sigma)[\mu_b^*(\sigma)]^{\mathrm{o}(1)},$$

т. е. верно асимптотическое неравенство

$$(1 + \mathrm{o}(1))\ln\mu_b^*(\sigma) \leq \ln\mu(\sigma). \tag{28}$$

Таким образом, из (26), (28) получаем, что при $\sigma \to +\infty$ вне $E = E_1 \cup E_2$

$$\ln\mu(\sigma) = (1 + \mathrm{o}(1))\ln\mu_b^*(\sigma).$$

Поскольку $d(E_1; t_{m_n}) = \mathrm{o}(1)$ при $n \to \infty$, а также из тех же соображений $d(E_2; t_{m_n}) = \mathrm{o}(1)$ при $n \to \infty$, то и $d(E; t_{m_n}) = \mathrm{o}(1)$, $n \to \infty$. Значит, $dE = 0$, и достаточность доказана.

Необходимость. Условие (16) равносильно следующему: существует функция $\varphi \in \underline{W}(\psi)$ такая, что при $n \geq 0$

$$|b_n| \leq e^{\varphi(\lambda_n)}, \quad |b_n^{-1}| \leq e^{\varphi(\lambda_n)}.$$

Таким образом, если последовательность $B = \{b_n\}$ $W(\psi)$-нормальна, а условие (16) не выполнено, то для последовательности

$$\{\ln|b_n|\}_{n=0}^\infty$$

не существует мажоранты вида $\varphi(\lambda_n)$, где $\varphi \in \underline{W}(\psi)$. Поскольку числа b_n удовлетворяют условию (13), имеем $\alpha(t) = o(t\varphi(t))$ при $t \to \infty$. По определению класса $\underline{W}(\psi)$, учитывая наше предположение, существует $\eta_0 > 0$ такое, что

$$\varliminf_{r\to\infty} \frac{1}{\psi(\eta_0 r)} \int_0^r \frac{\alpha(t)}{t^2} dt > 0,$$

где $\alpha(t) = \max_{\lambda_n \le t}\{\ln^+ |b(\lambda_n)|, n \ge 0\}, b(\lambda_n) = b_n$. Ясно, что $\alpha(t)$ — неубывающая ступенчатая функция, непрерывная справа.

Пусть $t_0 = 0$, а $\{t_n\}$ — последовательность всех точек разрыва функции $\alpha(t)$, $t_n = \lambda_{j_n}$. Тогда $\alpha(t) = \alpha_n$ при $t_n \le t < t_{n+1}$, $n \ge 0$. Ясно, что $\alpha(t) \equiv 0$ при $t \in [0, t_1)$, и

$$\frac{1}{\psi(\eta_0 t_n)} \int_0^{t_n} \frac{\alpha(t)}{t^2} dt \ge \beta > 0, \quad n \ge 1. \tag{29}$$

Введем последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ такую, что

$$x_n = \frac{G_{n+1} - G_n}{t_{n+1} - t_n}, \quad G_n = t_n I(t_n),$$

где

$$I(t_n) = \int_0^{t_n} \frac{g(t)}{t^2} dt, \quad g(t) = q\alpha(t), \quad 0 < q < 1, \quad n \ge 1.$$

Точно так же, как в [2], строим выпуклый полигон Ньютона L с последовательностью вершин $P_n = (t_n; G_n)$ для ряда Дирихле

$$F(s) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_k e^{\lambda_k s}, \quad s = \sigma + it, \tag{30}$$

где

$$a_k = \begin{cases} e^{-G_n}, & k = j_n, \quad \lambda_{j_n} = t_n, \\ 0, & k \ne j_n. \end{cases}$$

Заметим, что $\{t_n\}_{n=0}^{\infty}$ — последовательность центральных показателей ряда (30), абсолютно сходящегося во всей плоскости. Имея это в виду, оценим максимальный член ряда (30) сверху.

Для $x_{n-1} \le \sigma < x_n$ имеем [10]

$$\ln \mu(\sigma) = t_n(-I(t_n) + \sigma) < \frac{t_n t_{n+1}}{t_{n+1} - t_n} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{g(t)}{t^2} dt = q\alpha_n, \quad n \ge 1.$$

С другой стороны,

$$\mu_b^*(\sigma) \ge |a_{j_n} b_{j_n}| e^{\lambda_{j_n}\sigma}, \quad \lambda_{j_n} = t_n, \quad n \ge 1.$$

Поскольку $b_{j_n} = e^{\alpha(t_n)} = e^{\alpha_n}$, $\ln \mu_b^*(\sigma) \ge \ln \mu(\sigma) + \alpha_n$ для $x_{n-1} \le \sigma < x_n$ $(n \ge 1)$, то выполняется оценка

$$\varlimsup_{\sigma\to+\infty} \frac{\ln \mu(\sigma)}{\ln \mu_b^*(\sigma)} \le q < 1. \tag{31}$$

Осталось убедиться в том, что $F \in D(\Phi)$. Отметим, что

$$\Phi(\sigma) = \sup_{t>0}(t\sigma - \Psi(t)), \quad \Psi(t) = t\psi(t).$$

Действительно, из (29) следует

$$I(t_n) \ge \beta\psi(\eta_0 t_n), \quad t_n = \lambda_{j_n}, \quad n \ge 1.$$

Значит,

$$M(\sigma) \le 1 + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\beta t_n \psi(\eta_0 t_n) + t_n \sigma}.$$

Поскольку $\ln n = \mathrm{o}(\lambda_n \psi(\eta_0 x_n))$ при $n \to \infty$, то

$$C_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left\{-\frac{\beta}{2} t_n \psi(\eta_0 t_n)\right\} < \infty.$$

Следовательно,

$$M(\sigma) \le 1 + C_0 \exp\left\{\sup_{n\ge 1}\left(-\frac{\beta}{2} t_n \psi(\eta_0 t_n) + t_n \sigma\right)\right\},$$

отсюда

$$\ln M(\sigma) \le C_1 + \frac{\beta}{2\eta_0}\Phi\left(\frac{2}{\beta}\sigma\right) \le C_2 \Phi\left(\frac{2}{\beta}\sigma\right).$$

Но поскольку функция Φ выпукла, то

$$C_2 \Phi\left(\frac{2}{\beta}\sigma\right) \le \Phi\left(\frac{2C_2}{\beta}\sigma\right) \le \Phi(m\sigma)$$

при некотором $m \in \mathbb{N}$. Значит, $\ln M(\sigma) \le \Phi(m\sigma)$, и $F \in D_m(\Phi)$, а потому $F \in D(\Phi)$.

Таким образом, если условие (16) не выполняется, то найдется функция $F \in D(\Phi)$, для которой имеет место оценка (31).

Теорема 4 доказана. □

Литература

[1] Гайсин А.М. *Оценка роста и убывания целой функции бесконечного порядка на кривых*, Матем. сб. **194** (8), 55–82 (2003).

[2] Гайсин А.М., Латыпов И.Д. *Асимптотика логарифма максимального члена измененного ряда Дирихле*, Изв. вузов. Матем. (9), 15–24 (2002).

[3] Скаскив О.Б. *О поведении максимального члена ряда Дирихле, задающего целую функцию*, Матем. заметки **37** (1), 41–47 (1985).

[4] Шеремета М.Н. *Об эквивалентности логарифмов максимума модуля и максимального члена целого ряда Дирихле*, Матем. заметки **42** (2), 215–226 (1987).

[5] Евграфов М.А. *Асимптотические оценки и целые функции* (Наука, М., 1979).

[6] Гайсин А.М., Гайсина Г.А. *Теоремы типа Ритта–Сугимуры*, Владикавказск. матем. журн. **22** (3), 47–57 (2020).

[7] Гайсин А.М., Аиткужина Н.Н. *Критерий устойчивости максимального члена ряда Дирихле*, Пробл. матем. анал. **113**, 7–15 (2022).

[8] Skaskiv O.B., Trakalo O.M. *On the stability of the maximum term of the entire Dirichlet series*, Ukr. Math. J. **57** (4), 571–576 (2005).

[9] Шеремета М.Н. *О производной целого ряда Дирихле*, Матем. сб. **137** (1), 128–139 (1988).

[10] Леонтьев А.Ф. *Ряды экспонент* (Наука, М., 1976).

Ахтяр Магазович Гайсин

Институт математики с вычислительным центром
Уфимского федерального исследовательского центра
Российской академии наук,
ул. Чернышевского, д. 112, г. Уфа, 450008, Россия,

`e-mail:` gaisinam@mail.ru

Галия Ахтяровна Гайсина

Башкирский государственный университет,
ул. З. Валиди, д. 32, г. Уфа, 450076, Россия,

e-mail: gaisinaga@mail.ru

A.M. Gaisin and G.A. Gaisina

On the stability of the maximum term of the Dirichlet series

Abstract. We study the behavior of the maximum term of the modified Dirichlet series with positive exponents, the sum of which is an entire function. In this article, we prove a criterion for the equivalence of the logarithm of the maximum term of the original series and of the logarithm of the maximum term of the the modified series on the asymptotic set for the class of entire Dirichlet series defined by some convex majorant of growth. The corresponding problem on the stability of the maximum term for entire Dirichlet series of arbitrary growth was studied by the first author in connection with the Polya problem on the asymptotic behavior of entire transcendental functions on curves going to infinity.

Keywords: Dirichlet series, maximal term, convex majorant, Hadamard composition, Young transform.

Ahtjar Magazovich Gaisin

Institute of Mathematics with Computing Centre
Ufa Federal Research Centre of Russian Academy of Science,
112 Chernyshevsky str., Ufa, 450008 Russia,

e-mail: gaisinam@mail.ru

Galiya Ahtjarovna Gaisina

Bashkir State University,
32 Zaki Validy str., Ufa, 450076 Russia,

e-mail: gaisinaga@mail.ru