А. И. Кириллов, О сепарабельности пространств L^p в случае мер на локально выпуклых пространствах, *Изв. вузов. Матем.*, 1991, номер 7, 77

https://www.mathnet.ru/ivm5123

5. Руткас А. Г. Свойства функции рассеяния и прохождения волн в структурах с заданной геометрией // ДАН СССР.— 1976.— Т. 23.— № 1.— С. 38—40.
6. Руткас А. Г. Матрицы передачи и рассеяния многополюсника // Мат. моделирование и теория электрических цепей.— Киев, 1978.— Вып. 16.— С. 3—15.
7. Руткас А. Г. Унитарные реализации голоморфных функций в пространстве с индефинитной метрикой // ДАН УССР.— 1984.— № 4.— С. 16—19.

г. Харьков

Поступила
01.02.1990

А. И. Кириллов

УДК 517.982

О СЕПАРАБЕЛЬНОСТИ ПРОСТРАНСТВ L^p В СЛУЧАЕ МЕР НА ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Пусть X — хаусдорфово топологическое пространство, $\mathbf{B}$ есть σ-алгебра его борелевских подмножеств, m — мера на $\mathbf{B}$, $C(X)$ — банахово пространство непрерывных на X ограниченных функций с топологией равномерной сходимости на X, $C_0(X)$ состоит из функций с компактными носителями, L^p — пополнение $C_0(X)$ по норме

$$\|f\| = \left(\int_X |f(x)|^p \, dm(x)\right)^{1/p},$$

M — пространство классов эквивалентных по отношению $\rho(A, B) = m(A \Delta B)$ множеств из $\mathbf{B}$ конечной меры m. Расстояние в M определяется функцией ρ.

Вопрос о сепарабельности L^p важен для приложений, и с этой точки зрения он недостаточно освещен в монографиях по функциональному анализу. Известно, что L^p сепарабельно тогда и только тогда, когда сепарабельно пространство M ([1], с. 174). В частности, L^p сепарабельно, если X — локально-компактное пространство со счетной базой ([2], с. 142) или сепарабельная локально-компактная группа ([1], с. 260). В этой заметке рассматривается случай, когда X — локально выпуклое топологическое векторное пространство, а m — радонова вероятностная мера на $\mathbf{B}$. Соответствующее пространство L^2 широко используется в теории представлений непрерывных групп, квантовой теории поля и статистической физике (см., напр., [3], с. 451; [4], гл. 7).

Обозначим через X' топологическое сопряженное к X, через $\langle x', x\rangle$, где $x' \in X'$, $x \in X$, — каноническую билинейную форму двойственности X' и X.

Теорема. *Если X' сепарабельно в сильной топологии, мера m радонова и конечна, то пространство L^p сепарабельно.*

Схема доказательства. Достаточно проверить, что сепарабельно пространство L^2. Для этого, во-первых, из теоремы Стоуна — Вейерштрасса ([2], с. 119) выводим, что если $u \in C_0(X)$ и $\forall x' \in X'$ $(u, \exp(i\langle x', x\rangle)) = 0$, то $u \equiv 0$. Отсюда следует, что линейная оболочка функций $\exp(i\langle x', x\rangle)$ плотна в L^2 (ср. [3], с. 454), и остается показать, что эта линейная оболочка сепарабельна. Всюду плотное в ней счетное множество образуют функции вида $\sum_k (a_k + ib_k) \exp(i\langle x'_k, x\rangle)$, где a_k и b_k — рациональные числа, а $x'_1, x'_2, \ldots$ — последовательность, всюду плотная в X'. Для доказательства этого утверждения используется то, что мера m радонова.

Замечание. Очевидно, что утверждение теоремы справедливо и в случае σ-конечной радоновой меры m.

ЛИТЕРАТУРА

1. Халмош П. Теория меры.— М.: Ин. лит., 1953.— 292 с.
2. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. I. Функциональный анализ.— М.: Мир, 1977.— 360 с.
3. Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я. Обобщенные функции. Вып. 4. Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства.— М.: Физматгиз, 1961.— 472 с.
4. Березанский Ю. М., Кондратьев Ю. Г. Спектральные методы в бесконечномерном анализе.— Киев, 1988.— 680 с.

г. Москва

Поступила
27.11.1990