А. А. Миронов, О свойствах наборов степеней вершин обобщенных графов, *Докл. РАН*, 1992, том 324, номер 5, 959–963

Доклады Академии наук
1992. Том 324, № 5

УДК 519.9 КИБЕРНЕТИКА И ТЕОРИЯ РЕГУЛИРОВАНИЯ

© А.А. МИРОНОВ

О СВОЙСТВАХ НАБОРОВ СТЕПЕНЕЙ ВЕРШИН ОБОБЩЕННЫХ ГРАФОВ

(Представлено академиком Н.Н. Моисеевым 6 II 1992)

Пусть $\Gamma_{Z,L}(c)$ и $\Gamma_Z(c)$ – классы неориентированных мультиграфов с петлями и без петель, $\Gamma_L(c)$ и $\Gamma(c)$ – классы неориентированных графов с петлями и без петель, кратность или вес ребер (петель) которых не превышает $c \geqslant 0$ ($\Gamma_{Z,L}(1)$, $\Gamma_Z(1)$ – классы графов с петлями и без петель). Элементы из $\Gamma[c] = \Gamma_{Z,L}(c) \cup \cup \Gamma_Z(c) \cup \Gamma_L(c) \cup \Gamma(c)$ называются о б о б щ е н н ы м и г р а ф а м и. С т е п е н ь ю в е р ш и н ы о б о б щ е н н о г о г р а ф а G из $\Gamma[c]$ называется количество или сумма весов ребер и петель, инцидентных этой вершине. Набор чисел $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ называется р е а л и з у е м ы м в о б о б щ е н н ы й г р а ф, если A – набор степеней вершин некоторого $G = G(A)$ из $\Gamma[c]$, называемого р е а л и з а ц и е й A.

При $n \geqslant 2$ обозначим $\bar{R}^n = \{A = \{a_1, \ldots, a_n\}\colon\ a_i \geqslant a_{i+1}, 1 \leqslant i \leqslant n-1; a_n \geqslant 0\}$ и $\bar{Z}^n = \{A \in \bar{R}^n\colon\ a_i \in Z,\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$. Если $c \geqslant 0$, то $\bar{R}^n_{r,L}(c)$ и $\bar{R}^n_r(c)$ – подмножества наборов чисел из $\bar{R}^n$, соответственно реализуемых во взвешенные графы из $\Gamma_L(c)$ и $\Gamma(c)$. Если $c \in Z$, $c \geqslant 0$, то $\bar{Z}^n_{r,L}(c)$ и $\bar{Z}^n_r(c)$ – подмножества наборов из $\bar{Z}^n$, реализуемых в мультиграфы из $\Gamma_{Z,L}(c)$ и $\Gamma_Z(c)$.

Для A из $\bar{R}^n$ или $\bar{Z}^n$ следующие утверждения очевидны: а) A реализуем в обобщенный граф с петлями: если $A \in \bar{R}^n_r(c)$ ($A \in \bar{Z}^n_r(c)$), то $A \in \bar{R}^n_{r,L}(a_1)$ ($A \in Z^n_{r,L}(a_1)$); б) если $A \in \bar{R}^n_r(c)$ ($A \in Z^n_r(c)$) при некотором c, то $A \in \bar{R}^n_r(a_1)$ ($A \in \bar{Z}^n_r(a_1)$). Пусть $S(A)$ – сумма чисел из A. С.Л. Хакими [1] показал: если $A \in \bar{R}^n$ (или $A \in \bar{Z}^n$ и $S(A) = 2q$, $q \in Z$), то $A \in \bar{R}^n_r(c)$ ($A \in \bar{Z}^n_r(c)$) при некотором c тогда и только тогда, когда $2a_1 \leqslant S(A)$.

Для $A \in \bar{R}^n$, $c \geqslant 0$ и $k \in Z$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, построим две функции, значения которых определяют возможность реализуемости в мультиграф и взвешенный граф без петель и с петлями:

$$(1)\qquad \delta_k(A,c) = ck(k-1) - \sum_{\substack{i \leqslant k \\ a_i \leqslant ck-c}} (ck-c-a_i) - \sum_{\substack{i \geqslant k+1 \\ a_i \geqslant ck}} (a_i - ck) - \sum_{1 \leqslant i \leqslant k} a_i + \sum_{k+1 \leqslant i \leqslant n} a_i,$$

$$(2)\qquad \Delta_k(A,c) = ck^2 - \sum_{\substack{i \leqslant k \\ a_i \leqslant ck}} (ck-a_i) - \sum_{\substack{i \geqslant k+1 \\ a_i \geqslant ck}} (a_i - ck) - \sum_{1 \leqslant i \leqslant k} a_i + \sum_{k+1 \leqslant i \leqslant n} a_i.$$

Лемма 1). а) *Если* $A\in\bar R^n$, *то* $A\in\bar R^n_{r,L}(c)$ *или* $A\in\bar R^n_r(c)$ *тогда и только тогда, когда соответственно* $\Delta_k(A,c)\geqslant 0$ *и* $\delta_k(A,c)\geqslant 0$ *для всех* k, $1\leqslant k\leqslant n-1$.

б) *Если* $A\in\bar Z^n$, *то* $A\in\bar Z_{r,L}(c)$ *или* $A\in\bar Z^n_r(c)$ (*при* $S(A)=2q$, $q\in Z$) *тогда и только тогда, когда* $\Delta_k(A,c)\geqslant 0$ *и* $\delta_k(A,c)\geqslant 0$ *для всех* k, $1\leqslant k\leqslant n-1$.

Количество неравенств леммы 1 можно сократить [2].

Лемма 2. *Пусть* $X=\{x_1,\dots,x_n\}\in\bar R^n$ *и* $c>0$.

а) *Если* $x_1\leqslant cn$, *то системы неравенства* $\Delta_k(X,c)\geqslant 0$, $1\leqslant k\leqslant x_k/c$, *и* $\Delta_k(X,c)\geqslant 0$, $x_{k+1}/c\leqslant k\leqslant n-1$, *эквивалентны*.

б) *Если* $x_1\leqslant c(n-1)$, *то системы неравенств* $\delta_k(X,c)\geqslant 0$, $1\leqslant k\leqslant (x_k+c)/c$, *и* $\delta_k(X,c)\geqslant 0$, $x_{k+1}/c\leqslant k\leqslant n-1$, *эквивалентны*.

Теорема 1. *Для реализуемости в обобщенный граф в условиях леммы* 1 *при* $c>0$ *необходимо и достаточно: для функции* (2) *выполнение* $\Delta_k(A,c)\geqslant 0$ *при всех* k, $1\leqslant k\leqslant a_k/c$, *либо при всех* k, $a_{k+1}/c\leqslant k\leqslant n-1$, *и* $a_1\leqslant cn$; *для функции* (1) *выполнение* $\delta_k(A,c)\geqslant 0$ *при всех* k, $1\leqslant k\leqslant (a_k+c)/c$, *либо при всех* k; $a_{k+1}/c\leqslant k\leqslant n-1$, *и* $a_1\leqslant c(n-1)$.

Условия принадлежности множествам $\bar R^n_r(1)$ и $\bar Z^n_r(1)$ теоремы 1 получены в [3, 4]. Л. Эрдешем и Т. Галлаи (см. [5]) для $A\in\bar Z^n$ и $c=1$ построена функция, отличающаяся от $\delta_k(A,1)$, для которой справедлива леммы о принадлежности A к $\bar Z^n_r(1)$, но не выполняется лемма 2.

Определение 1. Весом набора чисел A из $\bar R^n$ или $\bar Z^n$ (если он существует) называется такое наименьшее значение c, при котором $A\in\bar R^n_{r,L}(c)$ ($\bar R^n_r(c)$, $\bar Z_{r,L}(c)$, $\bar Z^n_r(c)$): $c_L(A)=\min\{c\colon A\in\bar R^n_{r,L}(c)\}$, $c(A)=\min\{c\colon A\in\bar R^n_r(c)\}$, $c_{Z,L}(A)=\min\{c\colon A\in\bar Z^n_{r,L}(c)\}$, $c_Z(A)=\min\{c\colon A\in\bar Z^n_r(c)\}$.

Теорема 2. а) *Если* $A\in\bar R^n_{r,L}(c)$ (*или* $A\in\bar R^n_r(c)$) *и* $\Delta_m(A,c)=0$ ($\delta_m(A,c)=0$) *для некоторого* m, $1\leqslant m\leqslant n-1$, *то* $c=c_L(A)$ ($c=c(A)$).

б) *Если* $A\in\bar Z^n_{r,L}(c)$ (*или* $A\in\bar Z^n_r(c)$), *где* $c\geqslant 1$, *и* $\Delta_m(A,c-1)<0$ ($\delta_m(A,c-1)<0$) *для некоторого* m, $1\leqslant m\leqslant n-1$, *то* $c=c_{Z,L}(A)$ ($c=c_Z(A)$).

Определение 2. Функция $f(x,y)$, где $x,y\in N$, называется c-графом на N, если $0\leqslant f(x,y)=f(y,x)\leqslant c$ при любых x, $y\in N$.

Определение 3. Функция $F(x)$, определенная на интервале $N=(a;b)$, называется реализуемой в c-граф, если существует c-граф $f(x,y)$ на N такой, что для любого $x\in N$ справедливо $F(x)=\int_N f(x,y)\,dy$ – степень x; c-граф $f(x,y)$ – реализация $F(x)$.

Если $F(x)$ реализуема в c-граф, то $0\leqslant F(x)\leqslant c(b-a)$. Пусть $F(x)$ – монотонно невозрастающая, неотрицательная и ограниченная функция на интервале (следовательно, $F(x)$ интегрируема) $N=(a;b)$. Тогда $F(x)$ реализуема в c-граф $f(x,y)$, где

$$f(x,y)=F(x)\cdot F(y)/\int_N F(x)\,dx,\qquad c=F^2(a+0)/\int_N F(x)\,dx.$$

Без ограничения общности положим $N=(0;\alpha)$. Пусть $M_\alpha=\{F=F(x)\colon x\in N;\ F(x_1)\geqslant F(x_2),\ x_1<x_2\}$ и $M_\alpha(c)=\{F\in M_\alpha;\ c\geqslant 0;\ F$ – реализуема в c-граф$\}$. Для $F\in M_\alpha, c\geqslant 0$ и t, $0<t<\alpha$, разобьем $N=(0;\alpha)$ на подмножества:

$N_1(t)=\{x\colon x\leqslant t,\ F(x)\geqslant ct\}$,

$N_2(t)=\{x\colon x\leqslant t,\ F(x)<ct\}$,

$$N_3(t) = \{x\colon\ x > t,\ F(x) \geqslant ct\},$$
$$N_4(t) = \{x\colon\ x > t,\ F(x) < ct\}.$$

Положим

$$\gamma(t) = \begin{cases} \inf N_2(t), & F(t) < ct, \\ t, & F(t) \geqslant ct, \end{cases} \qquad \beta(t) = \begin{cases} \sup N_3(t), & F(t) \geqslant ct, \\ t, & F(t) < ct. \end{cases}$$

Неотрицательность следующей функции является критерием реализуемости F из M_α в c-граф:

$$(3) \qquad \Delta_t(F, c) = ct^2 - \int\limits_{\gamma(t)}^{t} (ct - F(x))\,dx - \int\limits_{t}^{\beta(t)} (F(x) - ct)\,dx -$$
$$- \int\limits_0^t F(x)\,dx + \int\limits_t^\alpha F(x)\,dx.$$

Лемма 3. *Если* $F \in M_\alpha$, *то* $F \in M_\alpha(c)$ *тогда и только тогда, когда* $\Delta_t(F, c) \geqslant 0$ *при любом* t, $0 < t < \alpha$.

Лемма 4 [2]. *Если* $F \in M_\alpha$ *и* $c > 0$, *то* $F(\alpha - 0) \geqslant 0$ *и* $\Delta_t(F, c) \geqslant 0$ *при всех* t, $0 < t < F(t)/c$, *тогда и только тогда, когда* $F(0 + 0) \leqslant c\alpha$ *и* $\Delta_t(F, c) \geqslant 0$ *при всех* t, $F(t)/c \leqslant t < \alpha$.

Теорема 3. *Пусть* $F \in M_\alpha$ *и* $c > 0$. *Для того чтобы* $F \in M_\alpha(c)$, *необходимо и достаточно, чтобы* $F(\alpha - 0) \geqslant 0$ *и* $\Delta_t(F, c) \geqslant 0$ *при всех* t, $0 < t \leqslant F(t)/c$, *либо* $F(0 + 0) \leqslant c\alpha$ *и* $\Delta_t(F, c) \geqslant 0$ *при всех* t, $F(t)/c \leqslant t < \alpha$.

Определение 4. Весом F из M_α, где $F(\alpha - 0) \geqslant 0$, называется $c(F) = \min\{c\colon F \in M_\alpha(c)\}$.

Теорема 4. *Если* $F \in M_\alpha(c(F))$, *то* $\Delta_s(F, c(F)) = 0$ *при некотором* s.

Функции (1) – (3) позволяет исследовать сами реализации.

Все n-вершинные обобщенные графы из $\Gamma[c]$ рассмотрим с фиксированными вершинами $U(n) = \{u_1, \ldots, u_n\}$, полагая, если $G = G(A)$ – реализация набора чисел $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, то $\deg_G u_i = \deg u_i = a_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Пусть c_{ij} – кратность или вес ребра (петли при $i = j$) с вершинами u_i, $u_j \in U(n)$ обобщенного графа $G \in \Gamma[c]$. Тогда обобщенный граф $\bar{G} \in \Gamma[c]$, у которого $\bar{c}_{ij} = c - c_{ij}$ – кратность или вес ребра (петли, если $G \in \Gamma_L(c) \cup \Gamma_{Z,L}(c)$ и $i = j$) с вершинами u_i, $u_j \in U(n)$, называется c-дополнением G. Для количеств и сумм весов ребер и петель обобщенного графа $G \in \Gamma[c]$ и подмножеств вершин $V_1, V_2 \subset U(n)$, $V_1 \cap V_2 \neq \phi$, обозначим

$$E_G(V_1) = \sum_{u_i, u_j \in V_1,\ i < j} c_{ij}, \qquad E(V_1, V_2) = \sum_{u_i \in V_1,\ u_j \in V_2} c_{ij},$$

$$L(V_1) = \sum_{u_i \in V_1} c_{ii}.$$

Пусть $A \in \bar{R}^n$, $G(A) \in \Gamma[c]$, $k \in Z$, $1 \leqslant k \leqslant n - 1$. Разобьем $U(n)$ на подмножества: если $A \in \bar{R}^n_r(c)$ и $G(A) \in \Gamma(c) \cup \Gamma_Z(c)$, то

$$U_1^k = \{u_i\colon\ i \leqslant k,\ a_i > ck - c\}, \qquad U_2^k = \{u_i\colon\ i \leqslant k,\ a_i \leqslant ck - c\},$$
$$U_3^k = \{u_i\colon\ i > k,\ a_i \geqslant ck\}, \qquad U_4^k = \{u_i\colon\ i > k,\ a_i < ck\},$$

если $A \in \bar{R}^n_{r,L}(c)$ и $G(A) \in \Gamma_L(c) \cup \Gamma_{Z,L}(c)$, то

$$U_1^k = \{u_i\colon\ i \leqslant k,\ a_i > ck\}, \qquad U_2^k = \{u_i\colon\ i \leqslant k \text{ и } a_i \leqslant ck\},$$

U_3^k, U_4^k описаны выше.

Если $f = f(x, y)$ – c-граф на N, то c-граф $\bar{f} = \bar{f}(x, y)$, у которого $\bar{f}(x, y) = c - f(x, y)$ при всех $x, y \in N$ называется c-дополнением f. Для c-графа f и интервалов $T_1, T_2 \subset N$, $T_1 \cap T_2 = \phi$ обозначим

$$E_f(T_1) = \iint_{x, y \in T_1, x \leqslant y} f(x, y)\, dx\, dy, \qquad E_f(T_1, T_2) = \iint_{x \in T_1, y \in T_2} f(x, y)\, dx\, dy,$$

являющиеся аналогами сумм весов ребер (если интегралы существуют).

Функции (1) – (3) определяют количества или суммы весов ребер и петель для обобщенных графов из $\Gamma[c]$, c-графов и их c-дополнений на описанных выше подмножествах из $U(n)$ и N.

Теорема 5. а) *Пусть* $A \in \bar{R}^n_{r, L}(c)$ *и* $G = G(A) \in \Gamma_L(c) \cup \Gamma_{Z, L}(c)$. *Тогда*

$$2E_{\bar{G}}(U_1^k) + L_{\bar{G}}(U_1^k) + E_{\bar{G}}(U_1^k, U_2^k) + E_{\bar{G}}(U_1^k, U_3^k) + E_G(U_2^k, U_4^k) + E_G(U_3^k, U_4^k) + L_G(U_4^k) + 2E_G(U_4^k) = \Delta_k(A, c), \quad 1 \leqslant k \leqslant n - 1. \tag{4}$$

б) *Пусть* $A \in \bar{R}^n_r(c)$ *и* $G = G(A) \in \Gamma(c) \cup \Gamma_Z(c)$. *Тогда*

$$2E_{\bar{G}}(U_1^k) + E_{\bar{G}}(U_1^k, U_2^k) + E_{\bar{G}}(U_1^k, U_3^k) + E_G(U_2^k, U_4^k) + E_G(U_3^k, U_4^k) + 2E_G(U_4^k) = \delta_k(A, c), \quad 1 \leqslant k \leqslant n - 1. \tag{5}$$

в) *Если c-граф $f(x, y)$ – произвольная реализация $F \in M_\alpha(c)$, то*

$$2E_{\bar{f}}(N_1(t)) + E_{\bar{f}}(N_1(t), N_2(t)) + E_{\bar{f}}(N_1(t), N_3(t)) + E_f(N_2(t), N_4(t)) + E_f(N_3(t), N_4(t)) + 2E_f(N_4(t)) = \Delta_t(F, c), \quad 0 < t < \alpha. \tag{6}$$

Уравнения (4) – (6) называются характеристическими. Заметим, что при конкретных значениях k и t характеристические уравнения (4) – (6) ((5) при $c = 1$ приведено в [3, 6, 7]) имеют более простой вид, так как одно из множеств U_2^k и U_3^k или из $N_2(t)$ и $N_3(t)$ является пустым. По количествам или суммам весов ребер и петель (4) – (6) позволяют исследовать любые обобщенные графы из $\Gamma[c]$ и любые c-графы – реализации монотонно не возрастающих функций. Для множеств U_i^k и $N_i(t)$, $1 \leqslant i \leqslant 4$, суммы левых частей (4) – (6) являются инвариантами "однотипных" реализаций фиксированного набора чисел из $\bar{R}^n$ и реализацией фиксированной функции из M_α. Поэтому характеристические уравнения позволяют определять общие свойства всех реализаций с заданным набором степеней вершин или заданной монотонно не возрастающей функции.

В заключение отметим три направления в дальнейших исследованиях реализуемости из возможных.

Два набора чисел $A \in \bar{Z}^n$ и $B \in \bar{Z}^m$ называются реализуемыми в двудольный граф, если существует граф $G(A, B)$ с вершинами $U(n) \cup V(m)$ такой, что каждое ребро $G(A, B)$ инцидентно вершинам из разных множеств $U(n)$, $V(m)$ и $\deg u_i = a_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $\deg v_i = b_i$, $1 \leqslant i \leqslant m$. Можно обобщить следующую теорему для $\Gamma[c]$ и c-графов.

Теорема 6. *A из $\bar{Z}^n$ и B из $\bar{Z}^m$ реализуемы в двудольный граф тогда и только тогда, когда $S(A) = S(B)$ и для всех $k \in Z$, $1 \leqslant k \leqslant n$,*

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant m} b_i - \sum_{b_i \geqslant k} (b_i - k) - \sum_{1 \leqslant i \leqslant k} a_i \geqslant 0.$$

Наборы чисел из $\bar{R}^n$ и функции из M_α, для которых правые части (4) – (6) при всех k или t равны нулю, называются экстремальными. Экстремальные наборы чисел и функции заслуживают особого внимания. Следующее утверждение является характеристическим для экстремальных наборов из $\bar{Z}_r^n(1)$ [4, 6, 8]: если $A \in \bar{Z}_r^n(1)$, то A экстремален тогда и только тогда, когда A реализуем в единственный граф без петель $G(A)$ с точностью до изоморфизма и каждое отображение вершин $G(A)$ на себя, сохраняющее степени вершин, является автоморфизмом $G(A)$.

Если $F(x)$ – непрерывная строго убывающая функция из M_α, $F(\alpha - 0) \geqslant 0$, то (см. (3)) $F(\gamma(t))/c = t$ при $N_2(t) \neq \phi$ и $F(\beta(t))/c = t$ при $N_3(t) \neq \phi$. Следовательно, пары функций $F(x)/c$, $\gamma(t)$, где $F(t) < ct$, и $F(x)/c, \beta(t)$, где $F(t) \geqslant ct$, являются взаимно обратными. Поэтому при исследованиях таких функций удобно применение аппарата дифференциального исчисления.

Московский авиационный
технологический институт
им. К.Э. Циолковского

Поступило
18 III 1992

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хакими С.Л.* О реализуемости множества целых чисел степенями вершин графа. Киберн. сб. Нов. сер. М.: Мир, 1966, вып. 2. 222 с. 2. *Миронов А.А.* – Тр. МИИТА, 1979, вып. 640, с. 115–120. 3. *Миронов А.А.* – Там же, 1976, вып. 510, с. 66–77. 4. *Миронов А.А.* – УМН, 1977, т. 32, № 6, с. 231–232. 5. *Харари Ф.* Теория графов. М.: ИЛ, 1973. 312 с. 6. *Миронов А.А.* – Тр. Горьк. гос. ун-та, 1981, вып. 1, с. 76–97. 7. *Миронов А.А.* – Изв. АН СССР. ТК, 1990, № 4, с. 180–188. 8. *Миронов А.А., Цурков В.И.* – Там же, 1991, № 3, с. 148–155.