П. А. Колгушкин, Р. Р. Садыков, Классификация простых мультиростков кривых,
УМН, 2001, том 56, выпуск 6, 153–154

https://www.mathnet.ru/rm463

КЛАССИФИКАЦИЯ ПРОСТЫХ МУЛЬТИРОСТКОВ КРИВЫХ

П. А. Колгушкин, Р. Р. Садыков

Мультиросток кривой в $\mathbb{C}^n$ – это множество $F=(f_1,\dots,f_k)$ ростков аналитических отображений $f_i\colon(\mathbb{C},0)\to(\mathbb{C}^n,0)$, где $\operatorname{Im}f_i\cap\operatorname{Im}f_j=\{0\}$ для $i\neq j$ ($f_1,\dots,f_k$ называются компонентами мультиростка). Мультиросток является локальной параметризацией ростка приводимой кривой в нуле. Мультиросток называется простым, если у него имеется окрестность, пересекающая лишь конечное число орбит действия группы A право-левых координатных замен.

Мы классифицируем стабильно простые особенности мультиростков в конечномерных комплексных пространствах произвольной размерности относительно стабильной эквивалентности. Определения и мотивировку задачи см. в [1].

Обозначим через G_n мультиросток, состоящий из первых n координатных осей в $\mathbb{C}^N$, через $(t^m\times k)$ – неприводимую кривую вида $(t^m,\dots,t^m)$ (k мономов).

Теорема. *Каждый стабильно простой мультиросток стабильно эквивалентен одному и только одному мультиростку из следующего списка* (m, n, k *и* l – *натуральные числа*):

1. Пары кривых с неособой первой компонентой. Здесь первая компонента равна $(t,0)$. В списке мы указываем только вторую компоненту.

1.1. Мультиростки с обеими неособыми компонентами:

1. $(0,t)$; **2.** (t,t^k), $k>1$.

1.2. Мультиростки со второй компонентой кратности два:

1. (t^2,t^{2m+1}); **2.** $(t^2,t^{2m+1}+t^{2n})$, $m<n<2m$; **3.** (t^2,t^{2m+1},t^{2n}), $m<n\leqslant 2m$; **4.** $(t^2,t^{2m+1}+t^{2n},t^{2s})$, $m<n<s\leqslant 2m$; **5.** $(t^2,t^{2n}+t^{2m+1})$, $n\leqslant m$; **6.** (t^2,t^{2n},t^{2m+1}), $n\leqslant m$; **7.** $(t^2,t^{2n}+t^{2m+1},t^{2s+1})$, $n\leqslant m<s<m+n$; **8.** (t^{2r+1},t^2); **9.** $(0,t^2,t^{2r+1})$;

1.3. Мультиростки с 3-струей $((t,0),(0,t^3))$**:**

1. (t^{3m+1},t^3); **2.** (t^{3m+1},t^3,t^{3n+2}), $m\leqslant n\leqslant 2m$; **3.** $(t^{3m+1}+t^{3n+2},t^3)$, $m\leqslant n<2m$; **4.** $(t^{3m+1}+t^{3n+2},t^3,t^{3l+2})$, $m\leqslant n<l\leqslant 2m$; **5.** (t^{3m+2},t^3); **6.** (t^{3m+2},t^3,t^{3n+1}), $m<n\leqslant 2m+1$; **7.** $(t^{3m+2}+t^{3n+1},t^3)$, $m<n\leqslant 2m$; **8.** $(t^{3m+2}+t^{3n+1},t^3,t^{3l+2})$, $m<n<l\leqslant 2m+1$; **9.** $(0,t^3,t^{3m+1})$; **10.** (t^{3n+2},t^3,t^{3m+1}), $m\leqslant n<2m$; **11.** $(t^{3l+2},t^3,t^{3m+1}+t^{3n+2})$, $m\leqslant n\leqslant l<2m$, кроме $n=l=2m-1$; **12.** $(0,t^3,t^{3m+2})$; **13.** $(t^{3l+1},t^3,t^{3m+2}+t^{3n+1})$, $m<n\leqslant l\leqslant 2m$, кроме $n=l=2m$; **14.** (t^{3n+1},t^3,t^{3m+2}), $m<n\leqslant 2m$; **15.** $(0,t^3,t^{3m+1},t^{3n+2})$, $m\leqslant n<2m$; **16.** $(0,t^3,t^{3m+1}+t^{3n+2})$, $m\leqslant n<2m-1$; **17.** $(0,t^3,t^{3m+1}+t^{3n+2},t^{3l+2})$, $m\leqslant n<l<2m$; **18.** $(0,t^3,t^{3m+2},t^{3n+1})$, $m<n\leqslant 2m$; **19.** $(0,t^3,t^{3m+2}+t^{3n+1})$, $m<n<2m$; **20.** $(0,t^3,t^{3m+2}+t^{3n+1},t^{3l+1})$, $m<n<l\leqslant 2m$.

1.4. Мультиростки с 3-струей $((t,0),(t^3,0))$**:**

1. (t^3,t^4); **2.** (t^3,t^4,t^5); **3.** (t^3,t^4,t^5,t^6); **4.** (t^3,t^4+t^6); **5.** (t^3,t^4+t^6,t^9); **6.** (t^3,t^4,t^6); **7.** (t^3,t^4,t^9); **8.** (t^3,t^5,t^6); **9.** (t^3,t^5,t^6+t^7); **10.** (t^3,t^5,t^6,t^7); **11.** (t^3,t^5+t^6,t^7); **12.** (t^3,t^5+t^6,t^7,t^9); **13.** (t^3,t^5+t^6,t^9); **14.** (t^3,t^5,t^7); **15.** (t^3,t^5,t^7,t^9); **16.** (t^3,t^5,t^9); **17.** (t^3,t^5+t^6,t^{12}) **18.** (t^3,t^5+t^6); **19.** (t^3,t^5); **20.** (t^3,t^5,t^{12}); **21.** (t^3,t^5+t^9); **22.** (t^3,t^5+t^9,t^{12}); **23.** (t^3,t^6,t^7,t^8).

1.5 Мультиростки с 4-струями $((t,0),(0,t^4))$ **и** $((t,0),(t^4,0))$**:**

1. (t^5,t^4,t^6,t^7); **2.** (t^6,t^4,t^5,t^7); **3.** $(0,t^4,t^5,t^7)$; **4.** $(0,t^4,t^5,t^6)$; **5.** $(0,t^4,t^5,t^6,t^7)$; **6.** (t^7,t^4,t^5,t^6); **7.** $(0,t^4,t^6,t^7,t^9)$; **8.** $(0,t^4,t^6,t^7)$; **9.** (t^9,t^4,t^6,t^7); **10.** (t^4,t^5,t^6,t^7); **11.** (t^4,t^5,t^6,t^7,t^8).

1.6. Мультиростки с 5-струей $((t,0),(0,t^5))$**:**

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 01-01-00739) и NWD-RFBR 047.008.005.

1. (t^9,t^5,t^6,t^7,t^8); **2.** $(0,t^5,t^6,t^7,t^8)$; **3.** $(0,t^5,t^6,t^7,t^8,t^9)$; **4.** (t^8,t^5,t^6,t^7,t^9); **5.** $(0,t^5,t^6,t^7,t^9)$.

2. Пары кривых с обеими особыми компонентами.

2.1. Бесконечные серии: Здесь первая компонента равна (t^2,t^{2m+1}). Мы указываем только вторую компоненту (здесь $m\leqslant n$).

1. (t^{2n+1},t^2); **2.** (t^{2n+1},t^2,t^{2n+3}); **3.** $(0,t^2,t^{2n+1})$; **4.** $(t^{2n+1},0,t^2)$; **5.** $(0,t^{2n+1},t^2)$; **6.** $(0,0,t^2,t^{2n+1})$.

2.2. Индивидуальные особенности: Здесь первая компонента равна (t^2,t^3).

1. $(t^2,0,t^3,t^4)$; **2.** $(t^2,0,t^3)$; **3.** $(0,0,t^3,t^4,t^5)$; **4.** $(0,t^5,t^3,t^4)$; **5.** $(t^5,0,t^3,t^4)$; **6.** $(0,0,t^3,t^4)$; **7.** $(0,t^4,t^3,t^5)$; **8.** $(t^4,0,t^3,t^5)$; **9.** $(0,0,t^3,t^5,t^7)$; **10.** $(0,t^7,t^3,t^5)$; **11.** $(t^7,0,t^3,t^5)$; **12.** $(0,0,t^3,t^5)$.

3. Мультиростки с неособыми компонентами:

1. G_n; **2.** $G_n,(t\times k,0,\dots,0)$, $1<k\leqslant n$; **3.** $G_n,(t,t^m\times k,0,\dots,0)$, $1\leqslant k<n$, $m>1$; **4.** $G_n,(t,0\times(n-1),t^m)$, $m>1$; **5.** $(t_1,0,0),(t_2,t_2^2,0),(t_3,0,t_3^2)$.

4. Мультиростки с одной особой компонентой.

4.1 Серии, содержащие произвольное число неособых компонент: Здесь неособая часть мультиростка равна G_n, $n\geqslant 2$. Мы указываем только особую компоненту.

1. $(0\times n,t^2,t^{2m+1})$; **2.** $(t^{2m+1}\times k,0\times(n-k),t^2)$, $1\leqslant k\leqslant n$; **3.** $(t^2\times k,0\times(n-k),t^3)$, $1<k\leqslant n$; **4.** $(t^2,0\times(n-1),t^3,t^4)$; **5.** $(t^2,t^4\times k,0\times(n-k-1),t^3)$, $0\leqslant k<n$; **6.** $(0\times n,t^3,t^4,t^5)$; **7.** $(t^5\times k,0\times(n-k),t^3,t^4)$, $0\leqslant k\leqslant n$; **8.** $(t^4\times k,0\times(n-k),t^3,t^5)$, $0\leqslant k\leqslant n$; **9.** $(0\times n,t^3,t^5,t^7)$; **10.** $(t^7\times k,0\times(n-k),t^3,t^5)$, $1\leqslant k\leqslant n$.

4.2. Бесконечные серии, содержащие две неособые компоненты: Здесь неособая часть мультиростка равна G_2. Мы указываем только особую компоненту.

1. (t^2,t^2,t^{2m+1}), $m\geqslant 2$; **2.** $(t^2,t^2+t^{2m+1},t^{2m+3})$, $m\geqslant 1$; **3.** (t^2,t^2+t^{2m+1}), $m\geqslant 1$; **4.** $(t^2,0,t^{2m+1},t^{2n})$, $m<n\leqslant 2m$; **5.** $(t^2,t^{2n},t^{2m+1}+t^{2n})$, $m<n<2m$; **6.** (t^2,t^{2n},t^{2m+1}), $m<n\leqslant 2m$; **7.** $(t^2,0,t^{2m+1}+t^{2n},t^{2l})$, $m<n<l\leqslant 2m$; **8.** $(t^2,t^{2l},t^{2m+1}+t^{2n})$, $m<n<l\leqslant 2m$; **9.** $(t^2,0,t^{2m+1}+t^{2n})$, $m<n<2m$; **10.** $(t^2,0,t^{2m+1})$; **11.** (t^2,t^{2m+1},t^{2n}), $m<n\leqslant 2m+1$; **12.** $(t^2,t^{2m+1}+t^{2n},t^{2l})$, $n<l\leqslant 2m+1$; **13.** $(t^2,t^{2m+1}+t^{2n})$, $m<n\leqslant 2m$; **14.** (t^2,t^{2m+1}); **15.** $(t^2,0,t^{2m},t^{2n+1})$, $1<m\leqslant n$; **16.** (t^2,t^{2n+1},t^{2m}), $m\leqslant n$; **17.** $(t^2,0,t^{2m}+t^{2n+1},t^{2l+1})$, $m\leqslant n<l<m+n$; **18.** $(t^2,t^{2l+1},t^{2m}+t^{2n+1})$, $m\leqslant n\leqslant l<m+n$; **19.** $(t^2,0,t^{2m}+t^{2n+1})$, $1<m\leqslant n$; **20.** (t^2,t^{2m},t^{2n+1}), $1<m\leqslant n$; **21.** $(t^2,t^{2m}+t^{2n+1},t^{2l+1})$, $m\leqslant n<l\leqslant m+n$; **22.** $(t^2,t^{2m}+t^{2n+1})$, $1<m\leqslant n$.

4.3. Индивидуальные особенности: Здесь неособая часть мультиростка равна G_2.

1. (t^3,t^3,t^4,t^5); **2.** $(t^3,0,t^4,t^5,t^6)$; **3.** (t^3,t^6,t^4,t^5); **4.** $(t^3,0,t^4,t^5)$; **5.** $(0,0,t^4,t^5,t^6,t^7)$; **6.** (t^7,t^7,t^4,t^5,t^6); **7.** $(t^7,0,t^4,t^5,t^6)$; **8.** $(0,0,t^4,t^5,t^6)$; **9.** (t^6,t^6,t^4,t^5,t^7); **10.** $(t^6,0,t^4,t^5,t^7)$; **11.** $(0,0,t^4,t^5,t^7)$.

4.4. Серии с неособой частью $((t_1,0),(t_2,t_2^2))$:

1. $(0,0,t^2,t^{2m+1})$; **2.** $(0,t^{2m+1},t^2)$; **3.** $(t^{2m+1},0,t^2)$.

5. Мультиростки с двумя особыми и одной неособой компонентами. Первая и третья компоненты равны $(t,0,0,0)$ и $(0,0,t_2^2,t_2^3)$ соответственно. В следующем ниже списке $m\geqslant 1$.

1. $(0,t_1^2,0,0,t_1^{2m+1})$; **2.** $(t_1^{2m+1},t_1^2,0,t_1^{2m+1})$; **3.** $(0,t_1^2,0,t_1^{2m+1})$; **4.** $(t_1^{2m+1},t_1^2,t_1^{2m+1},0)$; **5.** $(0,t_1^2,t_1^{2m+1},0)$; **6.** $(t_1^{2m+1},t_1^2,0,0)$.

Доказательство, в основном, основано на методе полных трансверсалей, см. [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[**1**] В. И. Арнольд // Труды МИАН. 1999. Т. 226. С. 27–35. [**2**] J. W. Bruce, N. P. Kirk, A. A. du Plessis // Nonlinearity. 1997. V. 10. №1. P. 253–275.

Московский государственный
университет им. М.В. Ломоносова

Принято редколлегией
24.09.2001