



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Бондаренко, Расположение подгрупп, содержащих неразветвленный квадратичный тор, в полной линейной группе степени 2 над локальным числовым полем ($p \neq 2$), *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 1994, том 211, 67–79

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.172

21 марта 2025 г., 07:22:11



А. А. Бондаренко

**РАСПОЛОЖЕНИЕ ПОДГРУПП, СОДЕРЖАЩИХ
НЕРАЗВЕТВЛЕННЫЙ КВАДРАТИЧНЫЙ ТОР,
В ПОЛНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ГРУППЕ СТЕПЕНИ 2
НАД ЛОКАЛЬНЫМ ЧИСЛОВЫМ ПОЛЕМ ($p \neq 2$)**

Пусть k – локальное числовое поле, т.е. конечное расширение поля \mathbb{Q}_p p – адических чисел, $G = GL(2, k)$ – полная линейная группа степени 2 над k и $T = T(K/k)$ – нерасщепимый тор в G , являющийся образом мультипликативной группы K^* квадратичного расширения K/k при его регулярном вложении в полное кольцо матриц $M(2, k)$. Настоящая работа посвящена описанию решетки $\text{Lat}(T, G)$ промежуточных подгрупп H группы G , содержащих тор T , $T \leq H \leq G$ в случае, когда поле K неразветвлено над k и $p \neq 2$. В [8, 9, 5] аналогичная задача решена для случая нерасщепимого тора, соответствующего квадратичному полю, в группе $GL(2, \mathbb{Q})$.

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть G – группа, G_0 – ее некоторая подгруппа. Решетка

$$\text{Lat}(G_0, G) = \{H : G_0 \leq H \leq G\}$$

промежуточных подгрупп группы G допускает естественное расчленение, которое было предложено З. И. Боровичем (см., например, [5]). А именно: на $\text{Lat}(G_0, G)$ введем структуру графа, приняв в качестве его вершин все промежуточные подгруппы. Вершину H_1 соединяем направленным ребром с вершиной H_2 , если $H_1 \trianglelefteq H_2$. Полученный граф называется графом нормальности решетки $\text{Lat}(G_0, G)$, а его связные компоненты – ее гирляндами. Изучение решетки $\text{Lat}(G_0, G)$, таким образом, включает в себя описание множества всех гирлянд, а затем изучение каждой отдельно взятой гирлянды.

Напомним, что промежуточная подгруппа F , $G_0 \leq F \leq G$, называется полной промежуточной подгруппой (относительно G_0), если нормальное замыкание

$$G_0 = \langle f^{-1}G_0f : f \in F \rangle$$

подгруппы G_0 в F совпадает с $F : G_0^F = F$ (см. [3, 4, 6]). Подгруппа G называется полиномальной, если для любого элемента x группы G подгруппа $G_0^{(x)}$ является полной промежуточной подгруппой [3, 6]. Полиномальные подгруппы характеризуются следующим свойством: G_0 – полиномальная тогда и только тогда, когда решетка $\text{Lat}(G_0, G) = \{H : G_0 \leq H \leq G\}$ является объединением гирлянд вида $\text{Lat}(F, N_G(F))$, где F пробегает все полные промежуточные подгруппы (относительно G_0).

§ 2. Постановка задачи.

Пусть k – локальное числовое поле и K – его неразветвленное расширение степени n . В контексте общей постановки задачи (§3 [5]) З. И. Боровичем выдвинута гипотеза, согласно которой соответствующий указанному расширению нерасщепимый тор $T(K/k)$ является полиномальной подгруппой в группе $\text{GL}(n, k)$. Мы будем называть этот тор неразветвленным. В настоящей работе рассматривается случай тора $T(K/k)$ в $\text{GL}(2, k)$, соответствующего неразветвленному квадратичному расширению K локального числового поля k с полем вычетов нечетной характеристики p , и дается полное описание решетки $\text{Lat}(T, G)$, которое подтверждает гипотезу в рассматриваемой ситуации.

Если \mathfrak{O} – кольцо целых элементов и \mathfrak{p} – простой идеал нормализованного нормирования ν поля k , то для группы единиц $U = \mathfrak{O}^*$ имеет место разложение

$$U = V \times U_1,$$

где $U_1 = 1 + \mathfrak{p}$ – группа главных единиц поля k , а V – циклическая группа корней из 1 степени $p^f - 1$ ($f = f(k/\mathbb{Q}_p)$ – абсолютная степень инерции). Пусть ω – образующая группы V . Тогда неразветвленное квадратичное расширение K поля k может быть записано в виде $k(\sqrt{\omega})$, а нерасщепимый тор $T = T(K/k)$ в базисе $1, \sqrt{\omega}$ представляется как множество матриц

$$T = T(\omega) = \left\{ \begin{pmatrix} x & y\omega \\ y & x \end{pmatrix} : x, y \in k, (x, y) \neq (0, 0) \right\}.$$

§ 3. Нижняя и верхняя гирлянды.

Среди гирлянд решетки

$$\text{Lat}(T, G) = \{H : T \leq H \leq G\}$$

могут быть выделены две особые: нижняя и верхняя. Нижней называется гирлянда Γ_* , содержащая тор $T : T \in \Gamma_*$, а верхней – гирлянда Γ^* , содержащая самую группу $G : G \in \Gamma^*$.

Приступая к их описанию, заметим, что из теоремы [1] вытекает

Теорема 1. *Нормализатор тора $T = T(\omega)$ в группе $G = GL(2, k)$ есть полупрямое произведение тора $T(\omega)$ с группой 2-го порядка, порожденной матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$:*

$$N_G(T) = T\lambda \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Поскольку $N_G(T)$ является самонормализуемой подгруппой в G , то справедливо

Следствие 1. *Нижняя гирлянда Γ_* решетки $\text{Lat}(T, G)$ состоит из 2 подгрупп: тора $T = (\omega)$ и его нормализатора $N_G(T)$, -*

$$\Gamma_* = \{T, N_G(T)\}.$$

Теорема 2. *Нормальное замыкание T^G тора $T = T(\omega)$ в группе $G = G(2, k)$ совпадает с полупрямым произведением групп $SL(2, k)$ на группу*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & NK^* \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} : \delta \in NK^* \right\}$$

где $NK^* = \{u^2 - \omega v^2 : u, v \in k, (u, v) \neq (0, 0)\}$ – группа норм квадратичного расширения $K = k(\sqrt{\omega})$, т.е.

$$T^G = SL(2, k)\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & NK^* \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Нам достаточно заметить, что подгруппа T^G , являясь нормальным делителем группы $GL(2, k)$, по теореме Жордана-Диксона содержит специальную линейную группу $SL(2, k)$ и что образ $\det(T^G)$ при гомоморфизме $\det : GL(2, k) \rightarrow k^*$ совпадает с группой норм NK^* .

Кроме того, так как $T^G = SL(2, k)\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & NK^* \end{pmatrix}$ – наименьшая промежуточная подгруппа, содержащая $SL(2, k)$, то T^G является полной промежуточной подгруппой. Поэтому имеет место

Следствие 2. Верхняя гирлянда Γ^* решетки $\text{Lat}(T(\omega), G)$ совпадает с интервалом $\text{Lat}(T^G, G)$, а именно:

$$\Gamma^* = \{T^G, G\}.$$

Детальное описание гирлянд Γ_* и Γ^* в общем случае приводится в [2]. Здесь же лишь отметим, что нижняя гирлянда Γ_* решетки $\text{Lat}(T(\omega), \text{GL}(2, k))$ состоит из всех промежуточных подгрупп, не содержащих нетривиальных трансвекций, а верхняя гирлянда Γ^* образована всеми промежуточными подгруппами, содержащими все элементарные трансвекции группы $\text{GL}(2, k)$.

§ 4. ПАРАМЕТРЫ ПРОМЕЖУТОЧНЫХ ПОДГРУПП.

Группа $G = \text{GL}(2, k)$ допускает факторизацию

$$G = T(\omega)G_\phi, \quad T(\omega) \cap G_\phi = \{e\}, \quad (1)$$

где

$$G_\phi = \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ k & k^* \end{array} \right) = \left\{ \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ \beta & \gamma \end{array} \right) : \beta \in k, \quad \gamma \in k^* \right\}.$$

В соответствии с этим для любых $t \in T = T(\omega)$ и $g \in G_\phi$ произведение gt имеет единственное представление в виде t_1g_1 , где $t_1 \in T, g_1 \in G_\phi$. Поскольку в качестве элемента t тора T мы можем, не ограничивая общности, брать матрицы вида $\begin{pmatrix} x & \omega \\ 1 & x \end{pmatrix}$, $x \in k$, то окончательно мы имеем правило перемещения в виде равенства

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & \omega \\ 1 & x \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta_1 & \gamma_1 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где, согласно вычислениям,

$$\beta_1 = \beta + \frac{x}{x^2 - \omega} \cdot \frac{\gamma^2 - 1 + \omega\beta^2}{\gamma} + \frac{2\omega}{x^2 - \omega} \beta, \quad (3)$$

$$\gamma_1 = \frac{(\omega\beta + \gamma x)^2 - \omega}{\gamma(x^2 - \omega)} = \gamma + \frac{\omega}{x^2 - \omega} \cdot \frac{\gamma^2 - 1 + \omega\beta^2}{\gamma} + \frac{2x\omega}{x^2 - \omega} \beta. \quad (4)$$

Для произвольной промежуточной подгруппы H в силу (1) также имеет место факторизация

$$H = T(\omega) \cdot H_\phi, \quad H_\phi = H \cap G_\phi,$$

поэтому, следуя [5], мы можем сопоставить ей ряд параметров. Прежде всего это ее модуль трансвекций

$$A = A(H) = \left\{ \alpha \in k : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \in H \right\},$$

и кольцо множителей

$$R = R(H) = \{\xi \in k : \xi A \subseteq A\},$$

а также мультипликативную группу

$$\Delta = \Delta(H) = \left\{ \delta \in k^* : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \in H \right\}.$$

Ясно, что $A \leq k^+$ и $\Delta \leq R^*$. Следующая теорема дает нам некоторую информацию о кольце множителей $R(H)$ промежуточной подгруппы $H, T(\omega) \leq H \leq G$.

Теорема. Пусть H - промежуточная подгруппа, $T \leq H \leq G$. Тогда при любом $x \in k$ ее кольцо множителей $R = R(H)$ содержит элементы $\frac{8\omega}{x^2-\omega}$ и $\frac{8x^2}{x^2-\omega}$.

Доказательство. Пусть $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \in H$. Аналогично [10], с.31,

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\beta & \gamma \end{pmatrix} \in H$. Согласно правилу перемещения (2) для любого $x \in k$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & \omega \\ 1 & x \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta_1 & \gamma_1 \end{pmatrix}, \quad t_1 \in T,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & \omega \\ 1 & x \end{pmatrix} = t_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{pmatrix}, \quad t_2 \in T,$$

где ввиду (3)

$$\beta_1 = \beta + \frac{x}{x^2-\omega} \cdot \frac{\gamma^2 - 1 + \omega\beta^2}{\gamma} + \frac{2\omega}{x^2-\omega}\beta,$$

$$\beta_2 = -\beta + \frac{x}{x^2-\omega} \cdot \frac{\gamma^2 - 1 + \omega\beta^2}{\gamma} - \frac{2\omega}{x^2-\omega}\beta.$$

Так как по аналогии с [10], с.31, $2\beta_1 \in A$ и $2\beta_2 \in A$, то $\frac{8\omega}{x^2-\omega}\beta = 2\beta_1 - 2\beta_2 - 4\beta \in A$. В частности, мы имеем включения $\frac{8\omega}{x^2-\omega} \in R$ и $\frac{8x^2}{x^2-\omega} = 8 + \frac{8\omega}{x^2-\omega} \in R$.

§ 5. Допустимые модули и подкольца.

В § 4 были даны определения модуля трансвекций $A(H)$ и кольца множителей $R(H)$ промежуточной подгруппы $H, T(\omega) \leq H \leq G$. Унитарное подкольцо R поля k и R - модуль A в поле k называются допустимыми [5], если они допускают реализацию в виде кольца множителей $R(H) = R$ и модуля трансвекций $A(H) = A$ для некоторой промежуточной подгруппы H , т.е. являются для нее кольцом множителей и модулем трансвекций соответственно.

Теорема 1. Пусть H — промежуточная подгруппа с модулем трансвекций $A(H) = A$ и кольцом множителей $R(H) = R$, отличным от k . Тогда $R = \mathfrak{D}$ и модуль A является его целым идеалом.

Доказательство. Пусть $\xi \in \mathfrak{D}$. Рассмотрим равенство

$$\frac{8\omega}{x^2 - \omega} = \frac{8\omega}{1 - \omega} + \pi\xi \quad (\nu(\pi) = 1).$$

Нетрудно заметить, что оно выполняется, если элемент

$$\gamma = 1 - \frac{(1 - \omega)^2 \pi \xi}{8\omega + (1 - \omega)\pi \xi}$$

является квадратом. Но это очевидно, ибо $\gamma \in U_1 = U_1^2$. Таким образом, в силу теоремы § 4, при любом $\xi \in \mathfrak{D}$ $\pi\xi \in R$, т.е. $\wp \subseteq R$. Последнее включение означает, что кольцо R является полным в топологии нормирования ν поля k , а потому содержит кольцо \mathbb{Z}_p целых p -адических чисел. Поэтому $8 \in \mathbb{Z}_p^* \subseteq R^*$ и ввиду теоремы § 4 кольцо R содержит элементы $\frac{\omega}{x^2 - \omega}$ и $\frac{x^2}{x^2 - \omega}$ при всех $x \in k$. В частности, при $x = 1$ получаем включение $\frac{1}{1 - \omega} \in R$. С другой стороны, $1 - \omega \in \mathfrak{D}^* = U$. Так что $\frac{1}{1 - \omega} \in R \cap U = R^*$, $\omega \in R$. Итак, кроме включения $\wp \subseteq R$ мы имеем включения $U_1 = 1 + \wp \subseteq R$ и $V = \langle \omega \rangle \subseteq R$, что в совокупности дает включение $\mathfrak{D} = \wp \cup U_1 \cup V \subseteq R$, а поэтому равенство $\mathfrak{D} = R$ (ибо $R \neq k$).

Пусть теперь $\alpha \in A$. Тогда $1 - \omega\alpha^2 \in R$, ибо

$$\begin{pmatrix} -\omega\alpha & \omega \\ 1 & -\omega\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega^{-1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha & 1 - \omega\alpha^2 \end{pmatrix}.$$

Если теперь мы предположим, что $\alpha \notin \mathfrak{D}$, т.е. $\nu(\alpha) = -l < 0$, то получим, что кольцо R содержит элемент с отрицательным значением нормирования: $\nu(1 - \omega\alpha^2) = -2l < 0$. Это значит, что $\nu(R) = -\infty$, иначе говоря, $R = k$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Из доказанной теоремы следует, что для любой промежуточной подгруппы H , $T(\omega) \leq H \leq G$. Ее кольцо множителей R есть либо k , либо \mathfrak{D} . В любом случае $2 \in R^*$ и по утверждению, аналогичному теореме 5 [10], с. 42, группа H имеет факторизацию вида

$$H = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & \Delta \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где A — некоторый целый идеал кольца R , $\Delta \leq R^*$.

Теорема 2. Для любого целого $i \geq 0$ множество

$$H = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \wp^i & U_i \end{pmatrix}, \quad (6)$$

является промежуточной подгруппой.

Доказательство. Пусть

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \wp^i & U_i \end{pmatrix}$$

и $x \in k$. Нам достаточно показать, что в равенстве

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & \omega \\ 1 & x \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta_1 & \gamma_1 \end{pmatrix}, \quad t_1 \in T(\omega),$$

$\beta_1 \in \wp^i$ и $\gamma_1 \in U_i$, где $U_i = 1 + \wp^i$ при $i \geq 1$ и $U_0 = U$, а элементы β_1 и γ_1 определяются из формул (3) и (4). Вычисление значений нормирования на элементах:

$$\frac{x}{x^2 - \omega}, \quad \frac{x^2}{x^2 - \omega}, \quad \frac{x\omega}{x^2 - \omega}, \quad \frac{\omega^2}{x^2 - \omega}, \quad \frac{\omega}{x^2 - \omega}$$

показывает, что при любом x все они принадлежат кольцу \mathfrak{D} . Поэтому $\beta_1 \in \wp^i$ и $\gamma_1 \gamma^{-1} - 1 \in \wp^i$, $\gamma_1 \in 1 + \wp^i$. Положим $y = \omega\beta + \gamma x$, тогда легко проверить, что

$$\gamma_1^{-1} = \frac{(y - \omega\beta)^2 - \omega\gamma^2}{\gamma(y^2 - \omega)} = \gamma^{-1} \left(1 - \frac{2y\omega}{y^2 - \omega} \beta + \frac{\omega}{y^2 - \omega} \frac{1 - \gamma^2 + \omega\beta^2}{1} \right).$$

Так что и γ_1^{-1} принадлежит $1 + \wp^i$, значит, $\gamma_1 \in U_i$. Таким образом, группа $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \wp^i & U_i \end{pmatrix}$ перестановочна с тором $T = T(\omega)$, и, следовательно, $T(\omega) \leq H \leq G$. Теорема доказана.

Следствие. \mathfrak{D} -модуль A является допустимым тогда и только тогда, когда A есть целый идеал в \mathfrak{D} , т.е. $A = \wp^i$, где $i \geq 0$.

Доказательство. Если a - допустимый \mathfrak{D} -модуль, то по теореме 1 A есть целый идеал кольца \mathfrak{D} . Обратно, если $A = \wp^i$ ($i \geq 0$), то он допустим по теореме 2.

Для допустимого модуля A положим

$$\text{Lat}(A) = \{H : T \leq H \leq G, \quad A(H) = A\}.$$

Тогда мы имеем разложение решетки $\text{Lat}(T(\omega), G)$ в дизъюнктивное объединение множеств $\text{Lat}(A)$ по всем допустимым модулям A .

$$\text{Lat}(T(\omega), G) = \cup^{\mathfrak{D}} \text{Lat}(A),$$

которое в силу следствия выше и замечания в конце §3 принимает вид:

$$\text{Lat}(T(\omega), G) = \text{Lat}(k) \cup \left(\bigcup_{i \geq 0} \text{Lat}(\wp^i) \right) \cup \text{Lat}(0), \quad (7)$$

где, очевидно, $\text{Lat}(k) = \Gamma^*$ и $\text{Lat}(0) = \Gamma_*$.

§ 6. Множество $\text{Lat}(\wp^i)$.

Пусть \wp^i — допустимый модуль, т.е. $i \geq 0$. Положим

$$F(\wp^i) = \left\langle T, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} : \alpha \in \wp^i \right\rangle.$$

Ясно, что $F(\wp^i)$ — наименьшая подгруппа с модулем трансвекций \wp^i , т.е. $F(\wp^i) = \inf \text{Lat}(\wp^i)$. Согласно правилу перемещения для любых $x \in k, \alpha \in \wp^i$ имеем

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & \omega \\ 1 & x \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta_1 & \gamma_1 \end{pmatrix}, \quad t_1 \in T, \quad (2')$$

где ввиду формулы (4)

$$\gamma_1 = \frac{(\omega\alpha + x)^2 - \omega}{x^2 - \omega} = \varphi(x, \alpha).$$

Обозначим подгруппу в U , порожденную всеми значениями $\varphi(x, \alpha)$, через $\Omega_0(\wp^i)$:

$$\Omega_0(\wp^i) = \langle \varphi(x, \alpha) : x \in k, \alpha \in \wp^i \rangle.$$

Пользуясь индукцией нетрудно показать, что $\Delta(F(\wp^i)) = \Omega_0(\wp^i)$, так что (см. (5))

$$F(\wp^i) = T \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \wp^i & \Omega_0(\wp^i) \end{pmatrix} \right).$$

Лемма 1. *Мультипликативная группа $\Omega_0(\wp^i)$ ($i \geq 0$) совпадает с группой*

$$\{u^2 - \omega v^2 \in U : u \equiv 1 \pmod{\wp^i}, \quad v \equiv 0 \pmod{\wp^i}\}.$$

Доказательство. Пусть $\alpha \in \wp^i, x \in k$. Как показывает вычисление,

$$\varphi(x, \alpha) = \left(1 + \frac{x}{x^2 - \omega} \omega \alpha \right) - \omega \left(\frac{\omega}{x^2 - \omega} \alpha \right)^2,$$

так что $\varphi(x, \alpha)$ принадлежит указанному в формулировке множеству. Это доказывает включение в одну сторону. Если теперь $u^2 - \omega v^2 \in U$ с $u \equiv 1 \pmod{\wp^i}$ и $v \equiv 0 \pmod{\wp^i}$, то получаем

$$u^2 - \omega v^2 = u^2(1 - \omega(u^{-1}v)^2) = u^2\varphi(0, u^{-1}v),$$

где $u^{-1}v \in \wp^i$. Поэтому $\varphi(0, u^{-1}v) \in \Omega_0(\wp^i)$. Кроме того, $u^2 \in \Omega_0(\wp^i)$, так как для элемента u , который мы можем представить в виде $u = 1 + \omega\alpha$, $\alpha \in \wp^i$, справедливо тождество

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^2 \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \omega\alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega & \omega \\ 1 & \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u^{-1}(1-\omega)\alpha & 1 \end{pmatrix} \times \\ & \times \begin{pmatrix} -1 & \omega \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{u}{\omega(\omega-1)}. \end{aligned}$$

Таким образом, $u^2 - \omega v^2 \in \Omega_0(\wp^i)$ и, значит,

$$\Omega_0(\wp^i) = \{u^2 - \omega v^2 : u \equiv 1 \pmod{\wp^i}, v \equiv 0 \pmod{\wp^i}\}. \quad (8)$$

Теорема 1. Пусть $i \geq 0$. Тогда $\Delta(F(\wp^i)) = U_i$ и, следовательно,

$$F(\wp^i) = T(\omega) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \wp^i & U_i \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Поскольку согласно теореме 2 §5 $T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \wp^i & U_i \end{pmatrix}$ – промежуточная подгруппа, а модуль трансвекций ее, очевидно, равен \wp^i , то она содержит $F(\wp^i)$, и поэтому

$$U_i \geq \Delta(F(\wp^i)) = \Omega_0(\wp^i).$$

Обратно, ввиду формулы (8) для $i \geq 1$ имеем $U_i = U_i^2 \leq \Omega_0(\wp^i)$, так что $U_i = \Omega_0(\wp^i)$. Чтобы доказать равенство $\Omega_0(\mathfrak{D}) = U$, нам достаточно показать, что при некоторых целых элементах u и v $\omega = u^2 - \omega v^2$, т.е. $\omega \in \Omega_0(\mathfrak{D})$. В силу свойств квадратичного символа Гильберта $(\omega, \omega) = (-1, \omega)$. Если $-1 \in k^{*2}$, то $(-1, \omega) = 1$. Предположим, что $-1 \in k^*/k^{*2}$. Поскольку $-1 \in V$, то при некотором натуральном s $-1 = \omega^{2s+1}$, и тогда

$$(-1, \omega) = (-1, \omega)(-1, \omega^{2s}) = (-1, \omega^{2s+1}) = (-1, -1) = 1,$$

что следует из теоремы 7 на стр.66 [7]. Таким образом, всегда $(\omega, \omega) = 1$. Последнее означает, что при некоторых $u, v \in k$ $\omega =$

$u^2 - \omega v^2$. Выражая $\nu(u^2 - \omega v^2)$ через $\nu(u)$ и $\nu(v)$, легко получить, что $\nu(u) \geq 0$ и $\nu(v) \geq 0$, т.е. u и v — целы. Тем самым доказательство теоремы 1 завершено.

Введем в рассмотрение группы

$$\Omega^0(\wp^i) = \{\theta \in U : \theta^2 - 1 \in \wp^i\} \quad (i \geq 0).$$

Так как $U_i^2 = U_i$ при $i \geq 1$, то $U_i \leq \Omega^0(\wp^i)$. Равенство $U_0 = U = \Omega^0(\mathfrak{O})$ очевидно по определению.

Теорема 2. Пусть $i \geq 0$. Множество

$$N(\wp^i) = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \wp^i & \Omega^0(\wp^i) \end{pmatrix}$$

является наибольшей промежуточной подгруппой с модулем трансвекций \wp^i , т.е. $N(\wp^i) = \sup \text{Lat}(\wp^i)$.

Доказательство. Как мы знаем, для любой $H \in \text{Lat}(\wp^i)$ $A(H) = \wp^i$. Поэтому при любом $\delta \in \Delta(H)$ в равенстве

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & \omega \\ 1 & x \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta_1 & \gamma_1 \end{pmatrix}, \quad t_1 \in T,$$

элемент $\beta_1 = \frac{x}{x^2 - \omega} \cdot \frac{\delta^2 - 1}{\delta}$ принадлежит \wp^i при всех $x \in k$. В частности, при $x = 1 \cdot \frac{1}{1 - \omega} \cdot \frac{\delta^2 - 1}{\delta} \in \wp^i$, $\delta^2 - 1 \in \wp^i$, т.е. $\delta \in \Omega^0(\wp^i)$. Так что $H \subseteq N(\wp^i)$.

Докажем теперь, что $N(\wp^i)$ — группа. Пусть тогда при любом $x \in k$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & \omega \\ 1 & x \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & \omega \\ 1 & x \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & 1 \end{pmatrix} t_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta_1 & \gamma_1 \end{pmatrix} = t_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta_1 & \gamma_1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где в силу (2') $\beta_2 \in \wp^i$ и $\gamma_2 = \varphi(x_1, \beta) \in \Omega_0(\wp^i) \leq \Omega^0(\wp^i)$, а элементы β_1 и γ_1 задаются формулами

$$\beta_1 = \frac{x}{x^2 - \omega} \cdot \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma}, \quad \gamma_1 = \gamma \left(1 + \frac{\omega}{x^2 - \omega} \cdot \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2} \right).$$

Поскольку $\gamma \in \Omega^0(\wp^i)$, то $\gamma^2 - 1 \in \wp^i$ и $\beta_1 \in \wp^i$. Точно так же $\gamma_1 \gamma^{-1} - 1 \in \wp^i$, т.е. $\gamma_1 \in U_i \leq \Omega^0(\wp^i)$. Теорема доказана.

Заметим, что при $i \geq 1$ мультипликативная группа $\Omega^0(\wp^i)$ состоит из всех тех единиц θ , квадраты θ^2 которых содержатся в U_i , т.е. $\theta = \pm(1 + \pi^i \xi)$, $\xi \in \mathfrak{O}$. Тем самым мы имеем равенство

$$\Omega^0(\wp^i) = \langle -1 \rangle \times U_i.$$

Учитывая очевидное равенство

$$\Omega^0(\mathfrak{D}) = U,$$

мы получаем полное описание множества $\text{Lat}(\wp^i)$, $i \geq 0$.

Теорема 3. *Имеют место равенства*

$$\text{Lat}(\mathfrak{D}) = \left\{ T \cdot \text{GL}(2, \mathfrak{D}) = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathfrak{D} & U \end{pmatrix} \right\}$$

и

$$\text{Lat}(\wp^i) = \left\{ T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \wp^i & U_i \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \wp^i & \langle -1 \rangle \times U_i \end{pmatrix} \right\}, \quad i \geq 1.$$

§ 7. ГИРЛЯНДЫ РЕШЕТКИ $\text{Lat}(T(\omega), \text{GL}(2, k))$.

Пусть H_1 и H_2 — две промежуточные подгруппы с модулем трансвекций $A(H_1) = A_1$ и $A(H_2) = A_2$ и кольцами множителей $R(H_1) = R_1$ и $R(H_2) = R_2$. Предположим, что $H_1 \leq H_2$ (в частности, H_1 и H_2 принадлежат одной гирлянде Γ). Будем считать, что $\Gamma \neq \Gamma_*$ и $\Gamma \neq \Gamma^*$, т.е. кольца R_1 и R_2 отличны от k , и, следовательно, $R_1 = R_2 = \mathfrak{D}$ (теорема 1 § 5). Группы H_1 и H_2 имеют факторизации

$$H_1 = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A_1 & \Delta_1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad H_2 = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A_2 & \Delta_2 \end{pmatrix}$$

соответственно (см.(5)), и потому $A_1 \leq A_2$.

Теорема. *Если H_1 и H_2 — промежуточные подгруппы с $A(H_1) = A_1$ и $A(H_2) = A_2$, причем $H_1 \leq H_2$, то $A_1 = A_2$.*

Доказательство. Нам достаточно рассмотреть случай, когда гирлянда Γ , содержащая H_1 и H_2 , отлична от Γ_* и Γ^* . Пусть

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \in H_2$. Тогда для любой матрицы $t \in T$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}^{-1} \in H_1.$$

Учитывая это, мы имеем

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\beta & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\beta & \gamma \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} t t^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\beta & \gamma \end{pmatrix}^{-1} = \\ &= t_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\beta & \gamma \end{pmatrix} t^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\beta & \gamma \end{pmatrix}^{-1} \in H_1, \end{aligned}$$

где

$$t = \begin{pmatrix} x & \omega \\ 1 & x \end{pmatrix}, \quad x = \frac{1 - \gamma^2 - \omega\beta^2}{2\gamma\beta}.$$

Таким образом, $2\beta \in A_1$, т.е. $2A_2 \leq A_1 \leq A_2$. Но поскольку $2 \in \mathcal{D}^*$, то $A_1 = A_2$.

Из теоремы 1 следует, что если $H_1 \leq H_2$, то $A(H_1) = A(H_2) = \wp^i$ при некотором $i \geq 0$, т.е. H_1 и H_2 принадлежат $\text{Lat}(\wp^i)$. Так что очевидно

Следствие 1. *Гирляндами решетки $\text{Lat}(T(\omega), G)$ являются множества $\text{Lat}(0)$, $\text{Lat}(k)$ и $\text{Lat}(\wp^i)$ по всем $i \geq 0$, — и только они.*

Из вышеперечисленных гирлянд лишь одна $\text{Lat}(\mathcal{D})$ — состоит из единственной подгруппы $T \cdot \text{GL}(2, \mathcal{D})$, которая одновременно полна и самонормализуема. Остальные состоят из двух подгрупп: полной и самонормализуемой. Поэтому в силу сказанного в конце § 1 имеет место

Следствие 2. *Неразветвленный тор $T(\omega)$ является полинормальной подгруппой группы $\text{GL}(2, k)$.*

В заключение автор выражает благодарность З. И. Боровичу за постановку задачи и внимание к работе и В. А. Койбаеву за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Х. Аль Хамад, А. А. Бондаренко, З. И. Борович, *Нормализатор группы "диагональных" автоморфизмов в алгебрах над коммутативным кольцом*. — Зап. научн. семин. ЛОМИ 191 (1991), 5–8.
2. А. Х. Аль Хамад, *Гирлянды в линейных группах, связанные с кольцами нормирования*. Канд. дисс., СПб., 1992. с.159.
3. М. С. Ба, З. И. Борович, *О расположении промежуточных подгрупп*. — Кольца и линейные группы. Сб. науч. трудов., Краснодар (1988), 14–41.
4. З. И. Борович, *О расположении подгрупп*. — Зап. науч. семин. ЛОМИ 94 (1979), 5–12.
5. З. И. Борович, В. А. Койбаев, Чан Нгок Хой, *Решетки подгрупп в $\text{GL}(2, \mathcal{Q})$, содержащих нерасщепимый тор*. — Зап. науч. семин. ЛОМИ 191 (1991), 24–43.
6. З. И. Борович, О. Н. Мацедонская, *О решетке подгрупп*. — Зап. науч. семин. ЛОМИ 103 (1980), 13–19.
7. З. И. Борович, И. Р. Шафаревич, *Теория чисел*. М., 1985, с. 503.
8. В. А. Койбаев, *О подгруппах группы $\text{GL}(2, \mathcal{Q})$, содержащих нерасщепимый максимальный тор*. Международная конференция по алгебре. Тезисы докл. по теории групп. Новосибирск 1989, 61.
9. В. А. Койбаев, *Подгруппы группы $\text{GL}(2, \mathcal{Q})$, содержащие нерасщепимый максимальный тор*. — Док. АН СССР 312 №1 (1990), 36–38.

10. Чан Нгок Хой, *Расположение подгрупп в $GL(2, Q)$, содержащих нерасщепимый тор*. Канд. дисс. Л., 1990, 182 с.
11. Н. Hasse, *Number theory*. Berlin: Akademic-Verlag, 1979.

С.-Петербургский государственный
университет

Поступило 18 июня 1993 г.