М. Б. Звягина, О проективных и инъективных объектах категорий, двойственных $\mathfrak{AB}$,
Зап. научн. сем. ПОМИ, 2005, том 321, 168–182

Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 321, 2005 г.

М. Б. Звягина

О ПРОЕКТИВНЫХ И ИНЪЕКТИВНЫХ ОБЪЕКТАХ КАТЕГОРИЙ, ДВОЙСТВЕННЫХ $\mathfrak{AB}$

Введение

Категории, двойственные $\mathfrak{AB}$

Пусть $\mathfrak{AB} =_{\mathbb{Z}} \mathfrak{M}$ – категория абелевых групп; $\mathfrak{AB}^0$ – дуальная категория. Автору известны три конкретные категории, канонически изоморфные $\mathfrak{AB}^0$:

(1) категория $\mathrm{Comp}_{\mathbb{Z}}$ компактных абелевых групп (двойственность Понтрягина);

(2) категория ${}_{\mathbb{Z}}\mathcal{L}fCo$ непрерывных слева ковариантных функторов ${}_{\mathbb{Z}}\mathfrak{M} \to_{\mathbb{Z}} \mathfrak{M}$ (см. [1]);

(3) ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}/\mathbb{Z}$-Mult – категория ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}/\mathbb{Z}$-мультиструктур (см. [1]).

Определение категории ${}_{\mathbb{Z}}V$-Mult для произвольной абелевой группы V приведено в [1]; мы позволим себе здесь его повторить. Назовем абелеву группу Y ${}_{\mathbb{Z}}V$-*мультиструктурой*, если на группах вида Y^I заданы согласованные между собою структуры $\mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(V^I)$-модулей, т.е. всякому непустому множеству I поставлен в соответствие кольцевой гомоморфизм $\alpha(I) : \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(V^I) \to \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(Y^I)$, причем коммутативны всевозможные диаграммы

$$\begin{array}{ccc}
(\mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(V^I)^{(J)})^J & \longrightarrow & \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(V^{I\times J}) \\
{\scriptstyle (\alpha(I)^{(J)})^J}\Big\downarrow & & {\scriptstyle \alpha(I\times J)}\Big\downarrow \\
(\mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(Y^I)^{(J)})^J & \longrightarrow & \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(Y^{I\times J})
\end{array}$$

с естественными горизонтальными стрелками

$$\{\gamma_{k,j}\}_{k,j\in J} \to \Big(\{y_j\}_{j\in J} \to \big\{\sum_{k\in J} \gamma_{k,j}(y_k)\big\}_{j\in J}\Big),$$

$\gamma_{k,j} \in \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(V^I)$ и $y_j \in V^I$ для верхней строки, $\gamma_{k,j} \in \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(Y^I)$ и $y_j \in Y^I$ для нижней (здесь и везде в дальнейшем под Y^I мы

Работа выполнена при финансовой поддержке фонда РФФИ, грант 03-01-00633.

понимаем прямое произведение I экземпляров Y, а под $Y^{(I)}$ – прямую сумму).

Пусть Y_1 и Y_2 – ${}_{\mathbb{Z}}V$-мультиструктуры. Мы называем гомоморфизм абелевых групп $Y_1 \xrightarrow{\varphi} Y_2$ ${}_{\mathbb{Z}}V$-*мультиморфизмом*, если при непустом I $Y_1^I \xrightarrow{\varphi^I} Y_2^I$ есть гомоморфизм левых $\mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(V^I)$-модулей.

Именно эту категорию ${}_{\mathbb{Z}}V$-мультиструктур и ${}_{\mathbb{Z}}V$-мультиморфизмов мы обозначаем через ${}_{\mathbb{Z}}V$-Mult.

Опишем теперь функторы, осуществляющие двойственность ${}_{\mathbb{Z}}\mathfrak{M}$ категориям (1)–(3):

(1) классическая двойственность Понтрягина осуществляется взаимно обратными функторами

$$
{}_{\mathbb{Z}}\mathfrak{M} \rightleftarrows \mathrm{Comp}_{\mathbb{Z}},
$$

${}_{\mathbb{Z}}X \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X, \mathbb{R}/\mathbb{Z})$ и (компактная абелева группа Y) $\to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Comp}_{\mathbb{Z}}}(Y, \mathbb{R}/\mathbb{Z})$.

(2) Двойственность между ${}_{\mathbb{Z}}\mathcal{L}fCo$ и ${}_{\mathbb{Z}}\mathfrak{M}$ осуществляется парой функторов ${}_{\mathbb{Z}}\mathfrak{M} \rightleftarrows_{\mathbb{Z}} \mathcal{L}fCo$,

$$
{}_{\mathbb{Z}}X \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X, \,) \quad \text{и} \quad (F :_{\mathbb{Z}} \mathfrak{M} \to_{\mathbb{Z}} \mathfrak{M}) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Funct}}(F, \mathrm{Id})
$$

где $\mathrm{Id} :_{\mathbb{Z}} \mathfrak{M} \to_{\mathbb{Z}} \mathfrak{M}$ – тождественный функтор.

(3) Двойственность между ${}_{\mathbb{Z}}\mathfrak{M}$ и ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}/\mathbb{Z}$-Mult осуществляется взаимно обратными функторами ${}_{\mathbb{Z}}X \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X, \mathbb{R}/\mathbb{Z})$ и (${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}/\mathbb{Z}$-мультиструктура Y)$\to \mathrm{Hom}_{{}_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}/\mathbb{Z}\text{-Mult}}(Y, \mathbb{R}/\mathbb{Z})$.

Поскольку структура проективных и инъективных абелевых групп и инъективные оболочки простейших абелевых групп нам известны, мы можем доказать соответствующие структурные теоремы и вычислить простейшие проективные накрытия в двойственных категориях (1)–(3).

§1. Структура инъективных объектов

Теорема 1. (1) (см. [2, с. 496]) *Компактная абелева группа* $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ *является инъективной кообразующей категории* $\mathrm{Comp}_{\mathbb{Z}}$. *Всякая инъективная компактная абелева группа является тороидной, т.е. изоморфна* $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^I$ *при некотором* I.

(2) *Тождественный функтор* $\mathrm{Id} :_{\mathbb{Z}} \mathfrak{M} \to_{\mathbb{Z}} \mathfrak{M}$ *есть инъективный кообразующий категории* $\mathcal{L}fCo$. *Всякий инъективный объект этой категории изоморфен* $\mathrm{Id}^I :_{\mathbb{Z}} \mathfrak{M} \to_{\mathbb{Z}} \mathfrak{M}$, $\mathrm{Id}^I(X) = X^I$.

(3) $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$-*мультиструктура* $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ *есть инъективная кообразующая категории* ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}/\mathbb{Z}$-Mult*; всякий инъективный объект этой категории изоморфен* $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^I$.

Доказательство. Достаточно заметить, что компактная абелева группа $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, функтор $\mathrm{Id} :_{\mathbb{Z}} \mathfrak{M} \to_{\mathbb{Z}} \mathfrak{M}$ и ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}/\mathbb{Z}$-мультиструктура $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ канонически двойственны дискретной абелевой группе $\mathbb{Z}$ – проективной образующей ${}_{\mathbb{Z}}\mathfrak{M}$, причем всякая проективная абелева группа свободна, т.е. изоморфна $\mathbb{Z}^{(I)}$.

§2. О некоторых проективных накрытиях

Теорема 2. *В категориях* $\mathrm{Comp}_{\mathbb{Z}}$, ${}_{\mathbb{Z}}\mathcal{L}fCo$ *и* ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}/\mathbb{Z}$-Mult *всякий объект обладает проективным накрытием, единственным с точностью до изоморфизма.*

Доказательство. В двойственной всем трем категориям ${}_{\mathbb{Z}}\mathfrak{M}$ всякий объект обладает, как известно, инъективной оболочкой, единственной с точностью до изоморфизма.

Замечание. Для вычисления проективного накрытия объекта Y любой из перечисленных категорий достаточно

(a) вычислить двойственную абелеву группу $X = Y^*$;

(b) найти инъективную оболочку $\mathrm{Inj}(X)$ абелевой группы X;

(c) вычислить двойственный объект $(\mathrm{Inj}(X))^*$ исходной категории – это и есть проективное накрытие $\mathrm{Pro}(Y)$ объекта Y.

Пример 1. Пусть $p \geqslant 2$ – простое, $n \geqslant 1$ – целое. Вычислим следующие проективные накрытия:

(1) компактной абелевой группы $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ в $\mathrm{Comp}_{\mathbb{Z}}$;

(2) функтора $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}, \ )$ в ${}_{\mathbb{Z}}\mathcal{L}fCo$;

(3) ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}/\mathbb{Z}$-мультиструктуры $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ в ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}/\mathbb{Z}$-Mult:

(a) двойственной всем трем перечисленным объектам дискретной абелевой группой является $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$;

(b) ${}_{\mathbb{Z}}\,\mathrm{Inj}(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/p^\infty\mathbb{Z}$;

(c) в $\mathrm{Comp}_{\mathbb{Z}}$ $\mathrm{Pro}(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p^\infty\mathbb{Z}, \mathbb{R}/\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_p$ (аддитивная группа кольца целых p-адических чисел с p-адической топологией);

в ${}_{\mathbb{Z}}\mathcal{L}fCo$ $\quad \mathrm{Pro}(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}, \ )) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p^\infty\mathbb{Z}, -)$,

в ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}/\mathbb{Z}$-Mult $\mathrm{Pro}(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p^\infty\mathbb{Z}, \mathbb{R}/\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_p$.

Пример 2 (обобщение примера 1). Пусть $n \geqslant 2$ – целое. Вычислим следующие проективные накрытия:

(1) $\mathrm{Pro}_{\mathrm{Comp}_{\mathbb{Z}}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$;

(2) $\mathrm{Pro}_{\mathbb{Z}\mathcal{L}fCo}\ (\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\ ))$;

(3) $\mathrm{Pro}_{\mathbb{Z}\mathbb{R}/\mathbb{Z}\text{-Mult}}\ (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$:

(a) двойственная дискретная абелева группа равна $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$;

(b) $\mathrm{Inj}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \bigoplus\limits_{p|n} \mathbb{Z}/p^{\infty}\mathbb{Z}$;

(c) $\mathrm{Pro}_{\mathrm{Comp}_{\mathbb{Z}}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \prod\limits_{p|n} \mathbb{Z}_p$,

$$\mathrm{Pro}_{\mathbb{Z}\mathcal{L}fCo}(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\ )) = \prod_{p|n} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p^{\infty}\mathbb{Z},\ ),$$

$$\mathrm{Pro}_{\mathbb{Z}\mathbb{R}/\mathbb{Z}\text{-Mult}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \prod_{p|n} \mathbb{Z}_p.$$

Пример 3 (обобщение примера 2). Пусть X – конечная абелева группа. Вычислим

(1) $\mathrm{Pro}_{\mathrm{Comp}_{\mathbb{Z}}}(X)$;

(2) $\mathrm{Pro}_{\mathbb{Z}\mathcal{L}fCo}\ (\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X,\ ))$;

(3) $\mathrm{Pro}_{\mathbb{Z}\mathbb{R}/\mathbb{Z}\text{-Mult}}\ (X)$:

(a) двойственная дискретная абелева группа равна $X^* \backsimeq X = \bigoplus\limits_{p,n} (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^{k_{p,n}}$ причем почти все $k_{p,n}$ равны нулю (сумма конечная);

(b) $\mathrm{Inj}_{\mathbb{Z}}(X^*) = \bigoplus\limits_{p} (\mathbb{Z}/p^{\infty}\mathbb{Z})^{k_p}$, где $k_p = \sum\limits_{n} k_{p,n}$;

(c) $\mathrm{Pro}_{\mathrm{Comp}_{\mathbb{Z}}}(X) = \prod \mathbb{Z}_p^{k_p}$,

$$\mathrm{Pro}_{\mathbb{Z}\mathcal{L}fCo}(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X,\ )) = \prod_{p} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p^{\infty}\mathbb{Z},\ )^{k_p},$$

$$\mathrm{Pro}_{\mathbb{Z}\mathbb{R}/\mathbb{Z}\text{-Mult}}(X) = \prod \mathbb{Z}_p^{k_p}.$$

Пример 4. (1) Все компактные абелевы группы $\mathbb{Z}_p$ проективны, причем $\prod\limits_{p} \mathbb{Z}_p$ есть проективный образующий объект в $\mathrm{Comp}_{\mathbb{Z}}$;

(2) все функторы $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p^{\infty}\mathbb{Z},\ ) :_{\mathbb{Z}} \mathfrak{M} \to_{\mathbb{Z}} \mathfrak{M}$ суть проективные объекты ${}_{\mathbb{Z}}\mathcal{L}fCo$, причем $\prod\limits_{p} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p^{\infty}\mathbb{Z},\ )$ есть проективный образующий ${}_{\mathbb{Z}}\mathcal{L}fCo$;

(3) все ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}/\mathbb{Z}$-мультиструктуры $\mathbb{Z}_p$ проективны, причем $\prod\limits_p \mathbb{Z}_p$ есть проективный образующий объект ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}/\mathbb{Z}$-Mult (достаточно заметить, что все $\mathbb{Z}/p^\infty\mathbb{Z}$ суть инъективные абелевы группы, причем $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \simeq \bigoplus\limits_p \mathbb{Z}/p^\infty\mathbb{Z}$ – инъективная кообразующая абелева группа).

Пример 5. Вычислим следующие проективные накрытия:

(1) $\mathrm{Pro}_{\mathrm{Comp}_{\mathbb{Z}}}(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$;

(2) $\mathrm{Pro}_{{}_{\mathbb{Z}}\mathcal{L}fCo}(\mathrm{Id})$;

(3) $\mathrm{Pro}_{{}_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}/\mathbb{Z}\text{-Mult}}(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$:

(a) двойственная абелева группа есть $\mathbb{Z}$;

(b) $\mathrm{Inj}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}$;

(c) $\mathrm{Pro}_{\mathrm{Comp}_{\mathbb{Z}}}(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{R}/\mathbb{Z}) = \Sigma_0$,

$$\mathrm{Pro}_{{}_{\mathbb{Z}}\mathcal{L}fCo}({}_{\mathbb{Z}}\mathrm{Id}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q},\ ),$$

$$\mathrm{Pro}_{{}_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}/\mathbb{Z}\text{-Mult}}(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{R}/\mathbb{Z}) = \Sigma_0.$$

Остановимся теперь подробнее на изучении компактной абелевой группы (и ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}/\mathbb{Z}$-мультиструктуры) Σ_0.

Рассмотрим следующую индуктивную систему: $\frac{\mathbb{Z}}{n}$ – свободная абелева группа с образующим $\frac{1}{n}$ $(n \geqslant 1)$; $m \preceq n$, если $n \equiv 0 \pmod m$; $\frac{\mathbb{Z}}{m} \xrightarrow{\cdot\frac{n}{m}} \frac{\mathbb{Z}}{n}$ для $m \preceq n$. Очевидным образом $\varinjlim \frac{\mathbb{Z}}{n} = \mathbb{Q}$.

Дуальная система компактных абелевых групп выглядит следующим образом: $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})_{(n)} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$; отношение порядка на множестве натуральных чисел то же; $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})_{(n)} \xrightarrow{\cdot\frac{n}{m}} (\mathbb{R}/\mathbb{Z})_{(m)}$ для $m \preceq n$. Поэтому $\Sigma_0 = \varprojlim(\mathbb{R}/\mathbb{Z})_{(n)}$ (см. [3, с. 513]).

Мы будем называть объект Σ_0 *соленоидом Виеториса* (хотя сам Виеторис рассматривал более общие соленоиды).

§3. Структура проективных объектов

Поскольку известна структура инъективных (эквивалентно: делимых) абелевых групп, мы можем описать структуру проективных объектов в трех рассматриваемых категориях.

Теорема 3. (1) *Проективными объектами категорий* $\mathrm{Comp}_{\mathbb{Z}}$ *(соответственно* ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}/\mathbb{Z}$-Mult*) являются компактные абелевы группы (соответственно* ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}/\mathbb{Z}$*-мультиструктуры) вида* $Y \simeq \Sigma_0^{I_Y} \times \big(\prod\limits_p \mathbb{Z}_p^{I_{p,Y}}\big)$, *где* I_Y, $I_{p,Y}$ *– некоторые множества, мощности которых суть инварианты* Y*;*

(2) *Проективными объектами категории* ${}_{\mathbb{Z}}\mathcal{L}fCo$ *являются функторы вида*

$$\mathcal{F} \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \ )^{I_{\mathcal{F}}} \times \prod_p \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p^\infty\mathbb{Z}, \ )^{I_{\mathcal{F},p}},$$

где $I_{\mathcal{F}}$, $I_{\mathcal{F},p}$ *– множества, мощности которых суть инварианты функтора* $\mathcal{F}$.

Доказательство. В двойственной категории ${}_{\mathbb{Z}}\mathfrak{M}$ всякий инъективный объект раскладывается в прямую сумму $X \simeq \mathbb{Q}^{(I_X)} \oplus (\bigoplus\limits_p \mathbb{Z}/p^\infty\mathbb{Z})^{I_{p,X}}$, где I_X и $I_{p,X}$ – некоторые множества, мощности которых суть инварианты X. Поскольку $\Sigma_0 = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{R}/\mathbb{Z})$ и $\mathbb{Z}_p = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p^\infty\mathbb{Z}, \mathbb{R}/\mathbb{Z})$, этим теорема доказана.

§4. Тополого-алгебраические свойства проективных компактных абелевых групп

Теорема 4. (1) *Соленоид Виеториса* Σ_0 *является связной компактной абелевой группой без кручения размерности* 1. *Поэтому* Σ_0^I *– связный компакт размерности* I *для произвольного множества* I.

(2) *Все* $\mathbb{Z}_p$ *суть вполне несвязные компактные абелевы группы без кручения размерности ноль, поэтому* $\prod \mathbb{Z}_p^{I_p}$ *– также вполне несвязный компакт размерности ноль без кручения для произвольных множеств* I_p.

Доказательство. (1) Группа характеров Σ_0 есть $\mathbb{Q}$ – абелева группа без кручения, поэтому Σ_0 связна (см. [4], с. 266, теорема 46). Размерность Σ_0 равна рангу группы $\mathbb{Q}$, т.е. единице (см. там же, с. 267, теорема 47). В силу теоремы 24.23 из [3] компактная абелева группа не имеет кручения тогда и только тогда, когда ее группа характеров делима. Поскольку $\mathbb{Q}$ делима, Σ_0 – без кручения.

(2) Группа характеров $\mathbb{Z}_p$ есть периодическая дискретная абелева группа $\mathbb{Z}/p^\infty\mathbb{Z}$, поэтому все $\mathbb{Z}_p$ вполне несвязны (см., опять

же, теорему 46 из [4]), размерность $\mathbb{Z}_p$ равна рангу $\mathbb{Z}/p^\infty\mathbb{Z}$, следовательно, равна нулю. Все $\mathbb{Z}_p$ очевидным образом не имеют кручения (можно было бы сослаться и на делимость групп характеров).

Теорема 5. *Компактная абелева группа тогда и только тогда проективна, когда она не имеет кручения.*

Доказательство. Оба условия равносильны делимости, т.е. инъективности, группы характеров.

Теорема 6. *Всякая связная компактная абелева группа без кручения изоморфна Σ_0^I при некотором множестве I; всякая вполне несвязная компактная абелева группа без кручения изоморфна $\prod\limits_p \mathbb{Z}_p^{I_p}$ при некоторых I_p.*

Доказательство. Эти утверждения являются очевидными следствиями теорем 3(1), 5 и результатов Понтрягина.

§5. Связные оболочки и накрытия без кручения

Пусть Y – компактная абелева группа, Σ – связный компакт и $Y \to \Sigma$ – инъективный гомоморфизм. Мы назовем Σ *связной оболочкой* Y, если для любого вложения $Y \to \Sigma_1$ компактной группы Y в связный компакт Σ_1 диаграмма

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[d] & \\ 0 \arrow[r] & Y \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma \\ & \Sigma_1 & \end{tikzcd}$$

может быть достроена до коммутативной при помощи мономорфизма $\Sigma \to \Sigma_1$ (иными словами, Σ – минимальный связный компакт, содержащий Y).

Двойственно, пусть X – дискретная абелева группа, S – абелева группа без кручения, $S \to X$ – эпиморфизм. Будем называть S *накрытием без кручения* абелевой группы в X, если S есть минимальная абелева группа без кручения, проектирующаяся на

X, т.е. для всякого эпиморфизма $S_1 \to X$, где S_1 – без кручения, диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} & & 0 & & \\ & & \uparrow & & \\ S & \longrightarrow & X & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \\ & & S_1 & & \end{array}$$

может быть достроена до коммутативной при помощи эпиморфизма $S_1 \to S$.

Замечание 1. Введенное нами понятие накрытия без кручения (torsionless cover) не совпадает с ключевым для работ [6, 7] понятием плоского накрытия (torsion free covering, flat cover). Для нас понятие накрытия без кручения является вспомогательным, ибо содержательно нас интересуют связные оболочки компактных абелевых групп.

Замечание 2. Вопрос об единственности связной оболочки (и накрытия без кручения) в общем случае a priori остается открытым. Однако для проективных компактов (двойственно: инъективных дискретных абелевых групп) имеет место теорема единственности – см. ниже.

Лемма 1. *Связная оболочка проективного компакта изоморфна Σ_0^I при некотором I. Двойственно, накрытие без кручения инъективной дискретной абелевой группы изоморфно $\mathbb{Q}^{(I)}$ при некотором I.*

Доказательство. Мы докажем второе утверждение, первое является эквивалентным благодаря двойственности Понтрягина.

Пусть $S \to X$ – накрытие без кручения инъективной абелевой группы X. Очевидным образом инъективная оболочка $\mathrm{Inj}_{\mathbb{Z}}(S)$ изоморфна $\mathbb{Q}^{(J)}$ при некотором J. В силу инъективности ${}_{\mathbb{Z}}X$ диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & S & \longrightarrow & \mathbb{Q}^{(J)} \\ & & \downarrow & & \\ & & X & & \\ & & \downarrow & & \\ & & 0 & & \end{array}$$

может быть достроена до коммутативной при помощи морфизма $\mathbb{Q}^{(J)} \to X$, который обязан быть эпиморфизмом. Поскольку $S \to X$ – накрытие без кручения и $\mathbb{Q}^{(J)}$ не имеет кручения, диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathbb{Q}^{(J)} & & \\ & & \downarrow & & \\ S & \longrightarrow & X & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \\ & & 0 & & \end{array}$$

может быть достроена до коммутативной с помощью эпиморфизма $\mathbb{Q}^{(J)} \to S$, и поэтому S – делимая абелева группа (как образ делимой). Коль скоро S – без кручения и делима, $S \simeq \mathbb{Q}^{(I)}$ при некотором I, что и требовалось.

Лемма 2. *Если проективная компактная абелева группа имеет связную оболочку, то эта оболочка единственна с точностью до изоморфизма. Дуально, накрытие без кручения инъективной дискретной абелевой группы единственно с точностью до изоморфизма.*

Доказательство. Как и выше, мы предпочтем работать в категории ${}_{\mathbb{Z}}\mathfrak{M}$. Пусть $S_1 \to X$ и $S_2 \to X$ – накрытия без кручения инъективной абелевой группы X. Согласно лемме 1 $S_1 \simeq \mathbb{Q}^{(I)}$, $S_2 \simeq \mathbb{Q}^{(J)}$ при некоторых I, J. Поскольку имеют место эпиморфизмы $S_1 \rightleftarrows S_2$, т.е. $\mathbb{Q}^{(I)} \rightleftarrows \mathbb{Q}^{(J)}$, мы видим, что $\operatorname{card} I \geqslant \operatorname{card} J$, $\operatorname{card} J \geqslant \operatorname{card} I$, откуда $\operatorname{card} I = \operatorname{card} J$, $\mathbb{Q}^{(I)} \simeq \mathbb{Q}^{(J)}$, т.е. $S_1 \simeq S_2$, что и требовалось.

Замечание 1. В силу леммы 2 мы можем ввести корректное обозначение $\operatorname{Con}(Y)$ для связной оболочки проективного компакта Y

и, двойственно, $S(X)$ для накрытия без кручения инъективной абелевой группы X.

Замечание 2. Отнюдь не всякая проективная компактная абелева группа обладает связной оболочкой. Ниже будут приведены примеры и выявлены некоторые достаточные условия.

Пример 6 (тривиальный). Пусть Σ – связная компактная абелева группа, тогда тождественный морфизм $\Sigma \xrightarrow{\mathrm{id}} \Sigma$ дает единственную связную оболочку Σ. Двойственно, если S – абелева группа без кручения, то $S \xrightarrow{\mathrm{id}} S$ – единственное накрытие без кручения группы S.

Пример 7. Циклическая компактная абелева группа $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ не имеет связной оболочки. Двойственно, циклическая дискретная абелева группа $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ не имеет накрытия без кручения.

Доказательство. Поскольку $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ связна и всякая ее собственная компактная подгруппа, как известно, есть конечная циклическая группа, единственным кандидатом на роль связной оболочки $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ является $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Но если бы вложение $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ было связной оболочкой, то двойственно, эпиморфизм $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ было бы накрытием без кручения, а тем самым и проективным накрытием. Поскольку известно, что абелева группа $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ не имеет проективного накрытия, утверждение примера доказано.

Лемма 3. $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}/p^\infty\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Q}_p$.

Доказательство. Имеем гомоморфизм $\mathbb{Q}_p \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, Z/p^\infty\mathbb{Z})$, $x \in \mathbb{Q}_p \to f_x$, $f_x(q) = qx \mod \mathbb{Z}_p$. Применяя точный функтор $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(, \mathbb{Z}/p^\infty\mathbb{Z})$ к точной последовательности $0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$, получим $0 \to \mathbb{Z}_p \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}/p^\infty\mathbb{Z}) \to Z/p^\infty\mathbb{Z} \to 0$, причем коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}_p & \longrightarrow & \mathbb{Q}_p & \longrightarrow & \mathbb{Z}/p^\infty\mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \\
 & & {\scriptstyle\mathrm{id}}\downarrow & & \downarrow & & {\scriptstyle\mathrm{id}}\downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}_p & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}/p^\infty\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \mathbb{Z}/p^\infty\mathbb{Z} & \longrightarrow & 0,
\end{array}$$

поэтому благодаря 5-лемме $\mathbb{Q}_p \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}/p^\infty\mathbb{Z})$-изоморфизм.

Обозначим через $\Sigma_0^{(p)}$ компактный $\mathbb{Z}_p$-модуль

$$\Sigma_0^{(p)} \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}_p, \mathbb{R}/\mathbb{Z}).$$

Это связный проективный объект в категории компактных $\mathbb{Z}_p$-модулей.

Докажем теперь содержательный результат о связных оболочках.

Теорема 7. *В категории компактных $\mathbb{Z}_p$-модулей вполне несвязный проективный объект $\mathbb{Z}_p \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p^\infty\mathbb{Z}, \mathbb{R}/\mathbb{Z})$ обладает связной оболочкой, изоморфной $\Sigma_0^{(p)}$. Двойственно, в категории дискретных $\mathbb{Z}_p$-модулей инъективный модуль $\mathbb{Z}/p^\infty\mathbb{Z}$ обладает накрытием без кручения, изоморфным $\mathbb{Q}_p$.*

Доказательство. Имеем точную последовательность $\mathbb{Z}_p$-модулей $0 \to \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p \to \mathbb{Z}/p^\infty\mathbb{Z} \to 0$. Переходя к двойственному объекту, получим точную последовательность компактных $\mathbb{Z}_p$-модулей $0 \to \mathbb{Z}_p \to \Sigma_0^{(p)} \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{R}/\mathbb{Z}) \to 0$. Покажем, что именно это вложение $\mathbb{Z}_p \to \Sigma_0^{(p)}$ является связной оболочкой компактного $\mathbb{Z}_p$-модуля $\mathbb{Z}_p$ в категории $\mathrm{Comp}_{\mathbb{Z}_p}$. Для этого докажем двойственное утверждение, а именно: канонический эпиморфизм $\mathbb{Q}_p \to \mathbb{Z}/p^\infty\mathbb{Z}$ является накрытием без кручения в категории $\mathbb{Z}_p$-модулей.

Действительно, пусть S – $\mathbb{Z}_p$-модуль без кручения, и $S \to \mathbb{Z}/p^\infty\mathbb{Z}$ – эпиморфизм. S может быть вложен в свою инъективную оболочку $\mathrm{Inj}_{\mathbb{Z}_p}(S) \simeq \mathbb{Q}_p^{(I)}$, и диаграмма

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & S \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Q}_p^{(I)} \\ & \mathbb{Z}/p^\infty\mathbb{Z} \arrow[d] & \\ & 0 & \end{tikzcd}$$

достраивается до коммутативной при помощи эпиморфизма $\mathbb{Q}_p^{(I)} \to \mathbb{Z}/p^\infty\mathbb{Z}$. Рассмотрим теперь диаграмму

$$\begin{tikzcd} & 0 & \\ \mathbb{Q}_p \arrow[r] & \mathbb{Z}/p^\infty\mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\ & \mathbb{Q}_p^{(I)} \arrow[u] & \end{tikzcd}$$

и покажем, что она может быть достроена до коммутативной при помощи эпиморфизма $\mathbb{Q}_p^{(I)} \to \mathbb{Q}_p$. По лемме 3

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathbb{Q}_p^{(I)}, \mathbb{Z}/p^\infty\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Q}_p^I \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(\mathbb{Q}_p^{(I)}, \mathbb{Q}_p),$$

так что эпиморфизм $\mathbb{Q}_p^{(I)} \to \mathbb{Z}/p^\infty\mathbb{Z}$ приходит из некоторого $\mathbb{Q}_p$-морфизма $\mathbb{Q}_p^{(I)} \to \mathbb{Q}_p$, ненулевого и потому эпиморфного.

Благодаря вложению $S \to \mathbb{Q}_p^{(I)}$ имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathbb{Q}_p & & \\ & \varphi\nearrow & \downarrow\pi & & \\ S & \longrightarrow & \mathbb{Z}/p^\infty\mathbb{Z} & \longrightarrow 0, & \end{array}$$

и остается проверить, что φ – эпиморфизм. Обозначим через $\mathrm{Im}(\varphi)$ образ морфизма φ. Поскольку $\varphi \neq 0$ и расширение $0 \to \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p$ существенно, $\mathbb{Z}_p \cap \mathrm{Im}(\varphi) \neq 0$; пусть $\mathbb{Z}_p \cap \mathrm{Im}(\varphi) = p^m\mathbb{Z}_p$, $m \geqslant 0$. Из эпиморфности $\pi\varphi$ следует существование такого $x \in \mathbb{Z}_p$, что $x + \frac{1}{p^m} \in \mathrm{Im}(\varphi)$, откуда $p^m x + 1 \in \mathrm{Im}(\varphi)$, $1 \in \mathrm{Im}(\varphi)$, и следовательно, $\mathbb{Z}_p \subset \mathrm{Im}(\varphi)$, $m = 0$. Далее, для всякого $n \geqslant 1$ найдется такое $x_n \in \mathbb{Z}_p$, что $x_n + \frac{1}{p^n} \in \mathrm{Im}(\varphi)$, откуда $\frac{1}{p^n} \in \mathrm{Im}(\varphi)$, так что $\frac{x}{p^n} \in \mathrm{Im}\,\varphi$ для всякого $x \in \mathbb{Z}_p$ и тем самым $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{Q}_p$, что и требовалось.

Напомним теперь понятие *p-адического соленоида* (см. [5, с. 286]). Пусть $p \geqslant 2$ – простое, обозначим через $\frac{\mathbb{Z}}{p^n}$ свободную абелеву группу с образующей $\frac{1}{p^n}$, и пусть $\frac{\mathbb{Z}}{p^n} \xrightarrow{\cdot p} \frac{\mathbb{Z}}{p^{n+1}}$ – индуктивная система вложений $\frac{1}{p^n} \to \frac{p}{p^{n+1}}$. Обозначим через $\frac{\mathbb{Z}}{p^\infty}$ индуктивный предел этой системы. Двойственная компактная абелева группа равна проективному пределу $\varprojlim(\mathbb{R}/\mathbb{Z})_{(n)}$, $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})_{(n+1)} \xrightarrow{\cdot p} (\mathbb{R}/\mathbb{Z})_{(n)}$. Эта группа называется *p-адическим соленоидом* и обозначается через Σ_p. Поскольку дискретная абелева группа $\frac{\mathbb{Z}}{p^\infty}$ не имеет кручения, компактная абелева группа Σ_p связна. Имеем эпиморфизм дискретных абелевых групп

$$\frac{\mathbb{Z}}{p^\infty} \to \mathbb{Z}/p^\infty\mathbb{Z}, \quad \frac{1}{p^n} \to 1 \mod \mathbb{Z}.$$

Двойственным является мономорфизм компактных абелевых групп $0 \to \mathbb{Z}_p \to \Sigma_p$.

Пример 8. При всяком простом $p \geqslant 2$ компактная абелева группа $\mathbb{Z}_p$ не имеет связной оболочки. Двойственно, дискретная абелева группа $\mathbb{Z}/p^\infty\mathbb{Z}$ не имеет накрытия без кручения.

Доказательство. Предположим, что существует связная оболочка $\mathrm{Con}(\mathbb{Z}_p)$ компакта $\mathbb{Z}_p$. В силу вложения $0 \to \mathbb{Z}_p \to \Sigma_p$ $\mathrm{Con}(\mathbb{Z}_p) \subset \Sigma_p$. Двойственно, если существует накрытие без кручения $S(\mathbb{Z}/p^\infty\mathbb{Z})$ дискретной абелевой группы $\mathbb{Z}/p^\infty\mathbb{Z}$, то имеется проекция

$$\frac{\mathbb{Z}}{p^\infty} \to S(\mathbb{Z}/p^\infty\mathbb{Z}) \to 0.$$

По лемме 1 $S(\mathbb{Z}/p^\infty\mathbb{Z}) \backsimeq \mathbb{Q}^{(I)}$ для некоторого I, так что $\frac{\mathbb{Z}}{p^\infty} \to \mathbb{Q}^{(I)} \to 0$ и тем более $\frac{\mathbb{Z}}{p^\infty} \to \mathbb{Q} \to 0$, и диаграмма

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & & \\
\frac{\mathbb{Z}}{p^\infty} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Q} \arrow[r] & 0 \\
\mathbb{Q} & &
\end{tikzcd}$$

может быть достроена до коммутативной

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & & \\
\frac{\mathbb{Z}}{p^\infty} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Q} \arrow[r] & 0 \\
\mathbb{Q} \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

с помощью эпиморфизма $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, который автоматически оказывается изоморфизмом. Отсюда имеем изоморфизм $\frac{\mathbb{Z}}{p^\infty} \xrightarrow{\backsimeq} \mathbb{Q}$, что противоречиво, т.к. абелева группа $\frac{\mathbb{Z}}{p^\infty}$ не является делимой. Полученное противоречие доказывает утверждение примера.

Пусть $\mathcal{P}$ – произвольное подмножество множества простых чисел, $N_{\mathcal{P}}$ – подмножество натуральных чисел, состоящее из чисел, имеющих в своем примарном разложении только степени $p \in \mathcal{P}$.

Введем на $N_{\mathcal{P}}$ отношение порядка: $m \preceq n$, если $n \equiv 0 \pmod m$ и рассмотрим индуктивную систему $\left\{\frac{\mathbb{Z}}{n}\right\}_{n\in N_{\mathcal{P}}}$, $\frac{\mathbb{Z}}{m} \xrightarrow{\cdot\frac{n}{m}} \frac{\mathbb{Z}}{n}$ при $m \preceq n$. Индуктивный предел этой последовательности обозначим через $\frac{\mathbb{Z}}{\mathcal{P}^\infty}$; двойственную компактную группу $\varprojlim_{n\in N_{\mathcal{P}}} (\mathbb{R}/\mathbb{Z})_{(n)}$, $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})_{(n)} \xrightarrow{\cdot\frac{n}{m}} (\mathbb{R}/\mathbb{Z})_{(m)}$ при $m \preceq n$ назовем $\mathcal{P}$-адическим соленоидом и обозначим через $\Sigma_{\mathcal{P}}$. Поскольку абелева группа $\frac{\mathbb{Z}}{\mathcal{P}^\infty}$ не имеет кручения, компактная абелева группа $\Sigma_{\mathcal{P}}$ связна.

Пример 9 (обобщение примера 8)**.** Пусть $\mathcal{P}$ – непустое собственное подмножество множества простых чисел, тогда компактная абелева группа $\prod_{p\in\mathcal{P}} \mathbb{Z}_p$ не имеет связной оболочки и, двойственно, дискретная абелева группа $\bigoplus_{p\in\mathcal{P}} \mathbb{Z}/p^\infty\mathbb{Z}$ не имеет накрытия без кручения.

Доказательство. Предположим противное, и пусть $\mathbb{Q}^{(I)} \to \bigoplus_{p\in\mathcal{P}} \mathbb{Z}/p^\infty\mathbb{Z} \to 0$ – накрытие без кручения. В силу эпиморфизма $\frac{\mathbb{Z}}{\mathcal{P}^\infty} \to \bigoplus_{p\in\mathcal{P}} (\mathbb{Z}/p^\infty\mathbb{Z})$, $\frac{1}{n} \to \frac{1}{n} \mod \mathbb{Z}$ абелева группа $\frac{\mathbb{Z}}{\mathcal{P}^\infty}$ должна эпиморфно отображаться на $\mathbb{Q}^{(I)}$, а тем более на $\mathbb{Q}$. Диаграмма

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & & \\
\frac{\mathbb{Z}}{\mathcal{P}^\infty} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Q} \arrow[r] & 0 \\
\mathbb{Q} & &
\end{tikzcd}$$

достраивается до коммутативной

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & & \\
\frac{\mathbb{Z}}{\mathcal{P}^\infty} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Q} \arrow[r] & 0 \\
\mathbb{Q} \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

с помощью эпиморфизма $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, который автоматически оказывается изоморфизмом. Отсюда имеем изоморфизм $\frac{\mathbb{Z}}{\mathcal{P}^\infty} \xrightarrow{\simeq} \mathbb{Q}$, что противоречиво, т.к. $\mathcal{P}$ – собственное подмножество множества простых чисел, и $\frac{\mathbb{Z}}{\mathcal{P}^\infty}$ не является делимой абелевой группой. Полученное противоречие доказывает утверждение примера.

Автор благодарен А. М. Вершику, А. Ф. Иванову и В. М. Цветкову за содержательные беседы.

Литература

1. М. Б. Звягина, *Непрерывные функторы и двойственность.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **281** (2001), с. 186–209.
2. А. Картан, С. Эйленберг, *Гомологическая алгебра.* ИЛ, М. (1960).
3. Э. Хьюитт, К. Росс, *Абстрактный гармонический анализ*, т. 1. Наука, М. (1975).
4. Л. С. Понтрягин, *Непрерывные группы.* Наука, М. (1973).
5. Н. Стинрод, С. Эйленберг, *Основания алгебраической топологии.* Ф.-М.Л., М. (1958).
6. E. Enochs, *Torsion free covering modules.* — Proc. AMS **14** (1963), 884–889.
7. L. Bican, R. El Bashir, E. Enochs, *All modules have flat covers.* — Bull. Lond. M. Soc. **33**, pt 4, No. 163 (2001), 385–390.

Zwiagina M. B. On projective and injective objects of the categories dual to $\mathfrak{AB}$

The categories are considered dual to the category of abelian groups (including the category of compact abelian groups). In those categories the structure theorems on injective and projective objects are proved; some projective covers are calculated. In the category of compact abelian groups the notion of connective hull is introduced; some results on connective hulls are received; the examples are given.

С.-Петербургский
государственный университет
телекоммуникаций

Поступило 20 декабря 2004 г.