А. В. Спиридонов, И. В. Тиме, Применение сглаживающих сплайнов для фильтрации сильно зашумленных сигналов, *Автомат. и телемех.*, 1998, выпуск 7, 75–82

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kibzun A. I., Kan Yu. S.* Stochastic programming problems with probability and quantile functions. Chichester: John Wiley & Sons, 1996.
2. *Кан Ю. С., Кибзун А. И.* Свойства выпуклости функций вероятности и квантили в задачах оптимизации // АиТ. 1996. № 3. С. 82–102.
3. *Markowitz H. M.* Portfolio Selection // J. of Finances. 1952. V. 7. No. 1. P. 77–91.
4. *Tobin D.* Liquidity preference as behaviour toward risk // Ref. of Econ. Studies. 1958. V. 25. No. 1. P. 65–86.
5. *Moeseke P. v.* Stochastic linear programming // Yale Economic Essays. 1965. V. 5. P. 197–253.
6. *Первозванский А. А., Первозванская Т. Н.* Финансовый рынок: Расчет и Риск. М.: Инфра-М, 1994.
7. *Бахшиян Б. Ц., Назиров Р. Р., Эльясберг П. Е.* Определение и коррекция движения. М.: Наука, 1980.
8. *Пшеничный Б. Н.* Метод линеаризации. М.: Наука, 1983.

Поступила в редакцию 28.03.97

УДК 519.714.3

© 1998 г. А. В. СПИРИДОНОВ,
И. В. ТИМЕ, канд. техн. наук
(Институт проблем управления РАН, Москва)

ПРИМЕНЕНИЕ СГЛАЖИВАЮЩИХ СПЛАЙНОВ ДЛЯ ФИЛЬТРАЦИИ СИЛЬНО ЗАШУМЛЕННЫХ СИГНАЛОВ

Приведены формулы для построения линейных фильтров на основе теории сплайн-аппроксимации, позволяющие оценивать не только сигнал, но и две его первые производные. Обсуждается применение указанных фильтров к задаче фильтрации аномальных помех.

В некоторых системах измерения и контроля, таких как тензометрия, локация, неразрушающий контроль и т.д., значительная часть сигналов, поступающих с измерительных приборов, содержат не только обычные шумы, присутствующие в каналах измерения, но и помехи типа "бликов", "сбоев" и т.п., т.е. относительно большие кратковременные выбросы. Физическая природа таких помех может быть самой различной, но наличие их приводит к тому, что обычные линейные фильтры, работающие на принципе разделения сигнала и помехи в частотной области, перестают работать, так как уровень шумов в полосе частот сигнала от таких помех недопустимо высок. Поэтому в таких системах применяют обычно те или иные нелинейные операции, позволяющие отбраковывать аномальные отсчеты. При этом выброшенные значения сигнала должны быть заменены какими-либо оценками. Чаще всего для этих целей используют различные алгоритмы экстраполяции и интерполяции. Ниже рассматривается возможность применения для фильтрации аномальных помех методов сплайн-аппроксимации [1] (в частности применение сглаживающего сплайна), что в отличие от других методов позволяет получить оценки не только самого сигнала, но и его первых двух производных. Пусть $\{x_n\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ значения подлежащего фильтрации сигнала $x(t)$ на сетке $t = 0, h, 2h, \ldots$. При каждом $n = 0, 1, \ldots$ аппроксимируем сигнал $x(t)$ на отрезке $[nh, (n+2\ell)h]$ (здесь ℓ – целое положительное число, задающее отрезок, на котором строится аппроксимирующий сплайн) функцией $Z_n(t)$ из класса $W_2^2[nh, (n+2\ell)h]$, состоящего из всех функций, имеющих на отрезке $[nh, (n+2\ell)h]$ абсолютно непрерывную производную и суммируемую с квадратом вторую производную так, чтобы на этом классе минимизировать функционал

$$Q(Z_n(t)) = \int\limits_{nh}^{(n+2\ell)h} \left(\ddot{Z}_n(t)\right)^2 dt + \frac{1}{\rho} \sum_{j=n}^{n+2\ell} \left(Z_n(jh) - x_j\right)^2,$$

где ρ – положительное число, называемое коэффициентом сглаживания. Данная задача минимизации всегда разрешима (см. [2]). Ее решение единственно и этим решением является кубический сплайн $Z_n(t)$ дефекта 1 с узлами на сетке nh, $(n+$ $+1)h, \ldots, (n+2\ell)h$, удовлетворяющий краевым условиям:

(1) $$\ddot{Z}_n(nh) = \ddot{Z}_n((n+2\ell)h) = 0$$

и условиям

(2) $$Z_n(jh) + \rho\lambda_j = x_j \quad (j = n, n+1, \ldots, n+2\ell),$$

где

(3) $$\lambda_j = \begin{cases} Z_n^{(3)}(nh+0) & (j = n), \\ -Z_n^{(3)}((n+2\ell)h-0) & (j = n+2\ell), \\ Z_n^{(3)}(jh+0) - Z_n^{(3)}(jh-0) & (j = n+1, \ldots, n+2\ell-1). \end{cases}$$

Такой сплайн называется сглаживающим. Сплайн-фильтр определяется как преобразование входной последовательности x_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ в выходную последовательность y_n $(n = \ell, \ell+1, \ell+2, \ldots)$ по правилу

(4) $$y_n = Z_{n-\ell}(nh) \quad (n = \ell, \ell+1, \ldots),$$

т.е. x_0 соответствует y_ℓ, x_1 соответствует $y_{\ell+1}$ и т.д. Таким образом, выходная последовательность y_i сдвинута по отношению к входной на ℓ тактов, или по времени – на величину $\tau = (2\ell+1)h$.

Условия (1)–(3) вместе с условиями непрерывности и гладкости кубического сплайна $Z_n(t)$ позволяют найти его коэффициенты. Значения сглаживающего сплайна в узлах сетки nh, $(n+1)h, \ldots, (n+2\ell)h$ доставляются формулой [2]:

(5) $$\left\| \begin{matrix} Z_n(nh) \\ Z_n((n+1)h) \\ \vdots \\ Z_n((n+2\ell)h) \end{matrix} \right\| = A \left\| \begin{matrix} x_n \\ x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+2\ell} \end{matrix} \right\|,$$

где матрица A с элементами a_{ij} $(i, j, \ldots, 2\ell)$ определяется соотношениями

(6) $$A = I - rB\left(C + rB^TB\right)^{-1}B^T,$$
$$r = 6\,\rho/h^3,$$

в которых через I обозначена единичная матрица, T – знак транспонирования, а B и C – следующие целочисленные трехдиагональные $(2\ell+1)\times(2\ell+1)$ матрицы

$$B = \left\| \begin{array}{ccccccccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdotsfor{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right\|,$$

$$C = \left\| \begin{array}{ccccccccccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdotsfor{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right\|.$$

Матрица C положительно определена как симметрическая, с диагональным преобладанием и положительными диагональными элементами. Поэтому положительно определена и матрица $C + rB^T B$ при любом $r > 0$ как сумма положительно определенной матрицы C и неотрицательно определенной матрицы $rB^T B$. Следовательно, матрица $C + rB^T B$ всегда имеет обратную, и выражение (6) корректно.

Как отмечалось выше, параметр ρ – коэффициент сглаживания – является настраиваемым параметром фильтра. Так как матрица A в (6) зависит от ρ, то приходится при каждом новом значении ρ вычислять заново обратную матрицу $C+rB^T B$. Если фильтр работает в адаптивном режиме, когда настраиваемые параметры меняются по некоторому алгоритму в процессе работы, то целесообразно иметь удобный алгоритм обращения матрицы $C + rB^T B$, используя тот факт, что эта матрица не произвольная, а симметрическая, пятидиагональная с положительными элементами. Опишем этот алгоритм. Пусть G – симметрическая пятидиагональная $(N+1)\times(N+1)$ – матрица с элементами $a_0, a_1, \dots, a_N$ на диагонали, элементами $b_0, b_1, \dots, b_N$ на первой поддиагонали и элементами $c_0, c_1, \dots, c_N$ на второй поддиагонали:

$$G = \left\| \begin{array}{ccccccccccc} a_0 & b_0 & c_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_0 & a_1 & b_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_0 & b_1 & a_2 & b_2 & c_2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & b_2 & a_3 & b_3 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdotsfor{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b_{N-4} & a_{N-3} & b_{N-3} & c_{N-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & c_{N-4} & b_{N-3} & a_{N-2} & b_{N-2} & c_{N-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c_{N-3} & b_{N-2} & a_{N-1} & b_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & c_{N-2} & b_{N-1} & a_N \end{array} \right\|.$$

Положим

$$c_{-1} = c_{-2} = v_{-1} = v_{-2} = u_{-1} = w_{-1} = c_{N-1} = c_N = b_N = 0$$

и определим рекуррентно:

$$
\begin{aligned}
&s_i = b_i - u_{i-1}c_{i-1},\\
&w_i = a_i - v_{i-1}c_{i-2} - u_{i-1}s_{i-1},\\
&u_i = s_i/w_i, \quad v_i = c_i/w_i \quad (i = 0, 1, \ldots, N).
\end{aligned}
$$

Далее, для каждого $j = 0, 1, \ldots, N$ положим

$$
Z_{-1,j} = Z_{-2,j} = y_{N+1,j} = y_{N+2,j} = 0
$$

и определим рекуррентно:

$$
\begin{aligned}
&Z_{ij} = \delta_{ij} - v_{i-2}Z_{i-2,j} - u_{i-1}Z_{i-1,j} \quad (i = 0, 1, \ldots, N),\\
&y_{ij} = Z_{ij}/w_i - u_i y_{i+1,j} - v_i y_{i+2,j} \quad (i = N,\ N-1, \ldots, 0)
\end{aligned}
$$

(здесь $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$, и $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$).

Числа $y_{ij}(i = 0, 1, \ldots, N)$ образуют j-й столбец искомой матрицы G^{-1}. Данный алгоритм обращения особенно удобен при больших N, так как позволяет вычислить обратную матрицу с большой точностью, даже если исходная матрица была плохо обусловлена.

Значения сигнала на выходе фильтра задаются формулой (4). Так как

$$
Z_n((n+\ell)h) = \sum_{j=0}^{2\ell} a_{\ell j} x_{n+j} \quad (n = 0, 1, \ldots),
$$

где $a_{\ell j}$ $(j = 0, 1, \ldots, 2\ell)$ ℓ -я строка матрицы A, то из (4) следует

$$
y_n = \sum_{j=0}^{2\ell} a_{\ell j} x_{n-\ell+j} \quad (n = \ell,\ \ell+1, \ldots). \tag{7}
$$

Поскольку $a_{\ell j}$ зависит только от ℓ, ρ и h и не зависит от n, то фильтр (7) может быть записан в обычной форме

$$
y_n = \sum_{j=0}^{2\ell} \alpha_j x_{n-\ell+j} \quad (n = \ell,\ \ell+1, \ldots), \tag{8}
$$

где обозначено:

$$
\alpha_j = a_{\ell j}.
$$

Условия (1)–(3) вместе с условиями непрерывности и гладкости кубического сплайна в узлах сетки позволяют найти не только коэффициенты сплайна, но и значения его двух первых производных. Эти величины принимаются за оценки соответствующих производных входного сигнала $\{x_n\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Выходные последовательности U_n и V_n $(n = \ell,\ \ell+1, \ldots)$, являющиеся оценками соответственно первой и второй производных, определяются аналогично (4) формулами

$$
\begin{aligned}
&U_n = \dot{Z}_{n-\ell}(nh) \quad (n = \ell,\ \ell+1, \ldots),\\
&V_n = \ddot{Z}_{n-\ell}(nh) \quad (n = \ell,\ \ell+1, \ldots),
\end{aligned}
$$

где $\dot{Z}$ и $\ddot{Z}$ – значения первой и второй производных сглаживающего сплайна. В узлах сетки эти величины выражаются через входной сигнал аналогично (5):

$$\left\| \begin{matrix} Z_n^{(k)}(nh) \\ Z_n^{(k)}((n+1)h) \\ \vdots \\ Z_n^{(k)}((n+2\ell)h) \end{matrix} \right\| = A_k \left\| \begin{matrix} x_n \\ x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+2\ell} \end{matrix} \right\| \qquad (k = 1, 2),$$

где матрицы A_k $(k = 1, 2)$ с элементами a_{ij}^k $(i, j = 0, 1, \ldots, 2\ell;\ k = 1, 2)$ определяются соотношениями:

$$A_2 = \frac{6}{h^2}\left(C + \frac{6\rho}{h^3}B^T B\right)^{-1} B^T,$$

$$A_1 = \frac{1}{h}DA - \frac{h}{6}EA_2,$$

в которых через D и E обозначаются следующие целочисленные $(2\ell+1) \times (2\ell+1)$ матрицы

$$D = \left\| \begin{matrix} -1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & -1 & -1 \end{matrix} \right\|,$$

$$E = \left\| \begin{matrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & -1 & 2 \end{matrix} \right\|,$$

а матрица A определена формулой (6).

Аналогично (8) выходные последовательности для оценок производных можно записать в привычном виде

$$U_n = \sum_{j=0}^{2\ell} \beta_j x_{n-\ell+j},$$

$$V_n = \sum_{j=0}^{2\ell} \gamma_j x_{n-\ell+j} \qquad (n = \ell,\ \ell+1, \ldots),$$

где коэффициенты β_j и γ_j являются ℓ-ми столбцами матриц A_1 и A_2.

$$\beta_j = a_{\ell j}^1, \qquad \gamma_j = a_{\ell j}^2 \qquad (j = 0, 1, \ldots, 2\ell).$$

В отличие от обычных линейных фильтров, где разделение сигнала и помехи производится на основе различия их в частотной области, сплайн-фильтрация позволяет учесть такие свойства как гладкость полезного сигнала. Поэтому их использование наиболее эффективно при обработке сильно зашумленных сигналов, при наличии больших выбросов, так называемых аномальных помех, особенно в сочетании с нелинейными алгоритмами.

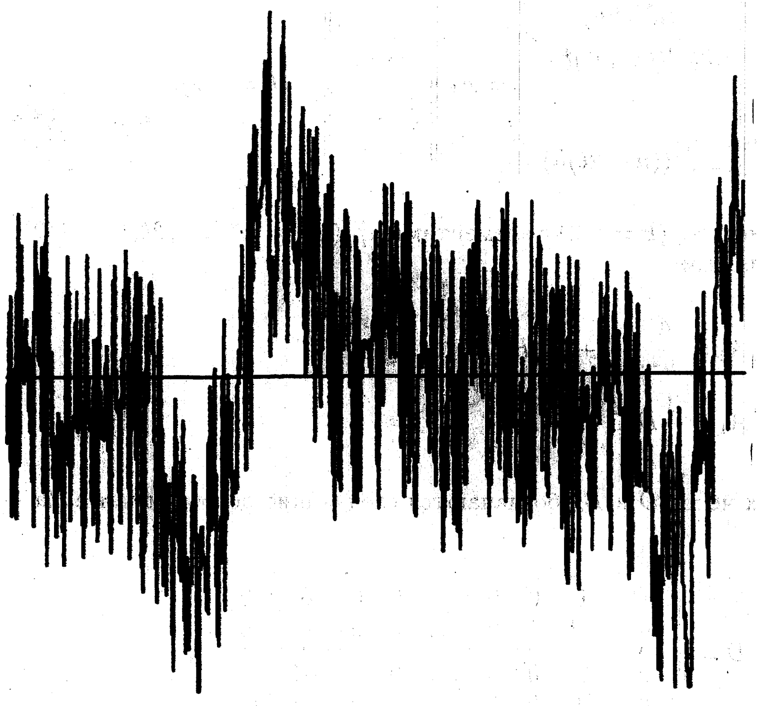

Рис. 1

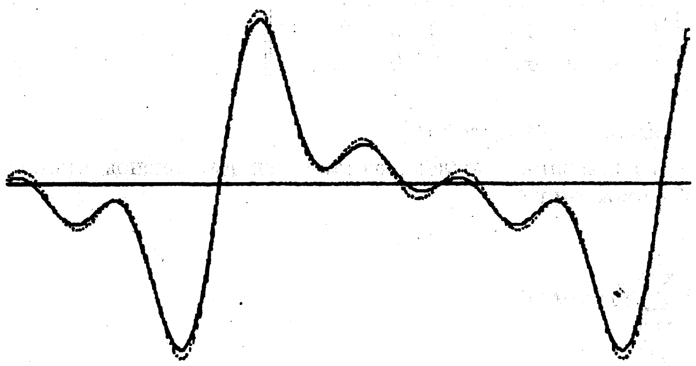

Рис. 2

На рис. 1–4 приведены результаты моделирования, показывающие эффективность применения сплайн-фильтра. В качестве полезного сигнала $S(t)$ была взята сумма четырех синусоид с амплитудами, выбранными "случайным" образом

$$S(t) = 0{,}9487\sin t + 0{,}8321\sin 2t + 0{,}7071\sin 3t + 0{,}6\sin 4t$$
$$(t > 0).$$

Отсчёты наблюдаемого сигнала в моменты времени $t = nh$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ содержат две аддитивные помехи:

$$x_n = S_n + g_n + I_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

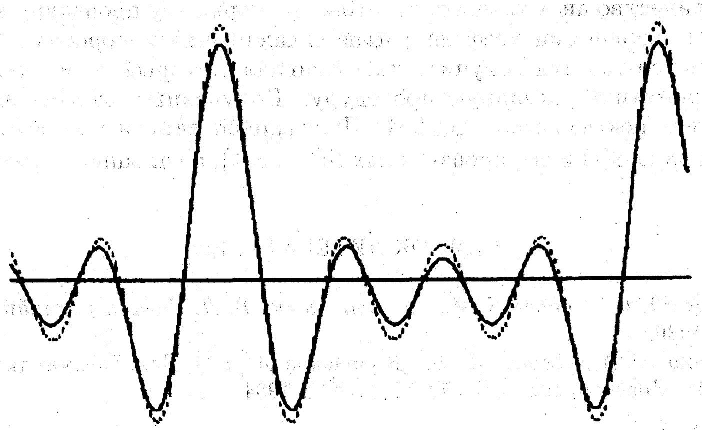

Рис. 3

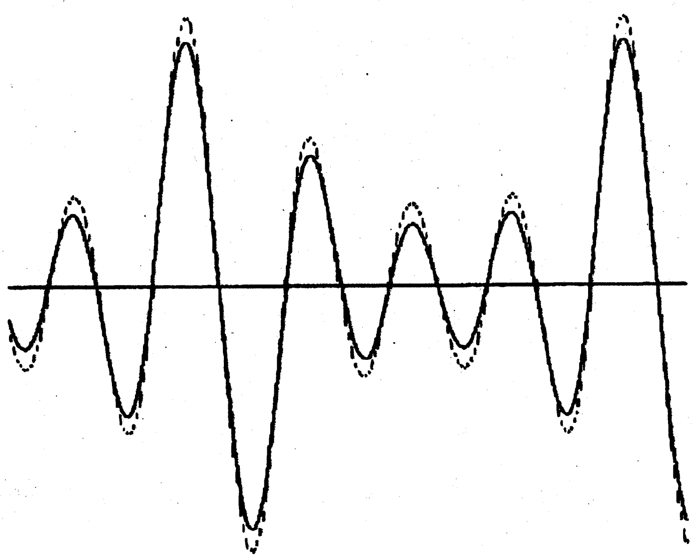

Рис. 4

где g_n – последовательность независимых гауссовских случайных величин с нулевым средним и единичной дисперсией, а I_n – импульсная помеха, появляющаяся с вероятностью 0,6. Значение помехи I_n, если она присутствует, является случайной величиной с равномерным распределением на отрезке $[-5, 5]$. График сигнала $x(t)$ представлен на рис. 1. Фильтрация таких сильно зашумленных сигналов производится в несколько этапов. На первом этапе путем применения сплайн-фильтра получаются некоторые достаточно грубые оценки сигнала. Те отсчеты, где разность между сигналом и оценкой превышает некоторый порог, считаются аномальными, выбраковываются и заменяются оценками. Полученная таким образом последовательность снова обрабатывается сплайн-фильтром, что позволяет откинуть еще некоторое количество аномальных отсчетов. Повторяя эту процедуру несколько раз с различными значениями коэффициентов сглаживания и порогов отсечения аномальных отсчетов удается получить такой сигнал, который не меняется, если еще раз к нему применить указанную процедуру. Полученные оценки сигнала и двух его производных показаны на рис. 2–4. Пунктирной линией изображены значения истинного сигнала $S(t)$ и его производных $\dot{S}(t)$ и $\ddot{S}(t)$, а сплошной – результат фильтрации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л.* Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980.
2. *Василенко В. А., Зюзин М. В., Ковальков А. В.* Сплайн-функции и цифровые фильтры. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1984.

Поступила в редакцию 20.08.97