

Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

A. I. Bobenko, Periodic finite-zone solutions of the
sine-Gordon equation,
Funktsional. Anal. i Prilozhen., 1984, Volume 18,
Issue 3, 73–74

<https://www.mathnet.ru/eng/faa1479>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that
you have read and agreed to these terms of use

<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.91

April 28, 2025, 03:04:18



УДК 517.43 + 519.46

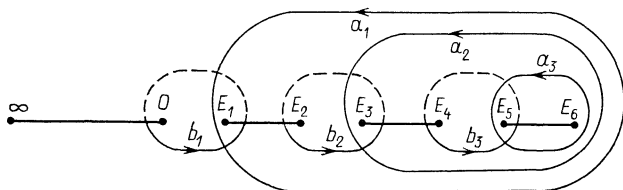
О ПЕРИОДИЧЕСКИХ КОНЕЧНОЗОННЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЯ SINE-GORDON

А. И. Б о б е н к о

В настоящее время в рамках теории конечнозонного интегрирования построены широкие классы решений нелинейных уравнений, интегрируемых методом обратной задачи. Однако вопрос о выделении физически интересных периодических решений в континуальных моделях (при $g > 1$) практически не изучен. Общие конечнозонные решения рода g уравнения Sine-Gordon (SG) $u_{tt} - u_{xx} = \sin u$ параметризуются $3g - 1$ независимыми параметрами [1, 2]; условие периодичности приводит дополнительно к $g - 1$ ограничению. В случае $g = 2$ четырехпараметрический класс периодических решений уравнения SG дает известный анзац Лэмба [3, 4, 8]. В настоящей работе, используя технику редукции тэта-функций Римана [5], строится шестипараметрическое семейство периодических решений при $g = 3$.

Рассмотрим гиперэллиптическую риманову поверхность $\Gamma_3 \omega^2 = z \prod_{i=1}^{2g} (z - E_i)$ ($g = 3$)

с указанным выбором базиса циклов (см. рисунок).



$\Omega_1(P)$, $\Omega_2(P)$, $P \in \Gamma$ — нормированные абелевы интегралы второго рода с особенностями в точках $z = 0$ и $z = \infty$:

$$\Omega_j(P) \rightarrow z^{1/2}/4 + \dots, \quad z \rightarrow \infty, \quad \Omega_j(P) \rightarrow (-1)^j z^{-1/2}/4 + \dots, \quad z \rightarrow 0, \quad j = 1, 2;$$

\mathbf{V} и \mathbf{W} — соответственно векторы их b -периодов. Пусть цикл C , обходящий разрез $[0, \infty]$ на Γ , равен $C = \sum_{i=1}^g m_i a_i$. Тогда

$$u(x, t) = \frac{2}{i} \ln \left\{ \frac{\Theta((\mathbf{V}x + \mathbf{W}t)/2\pi + \boldsymbol{\xi} + \mathbf{M})}{\Theta((\mathbf{V}x + \mathbf{W}t)/2\pi + \boldsymbol{\xi})} \right\}, \quad (1)$$

где $\mathbf{M} = 1/2 (m_1, \dots, m_g)$, $\Theta(z)$ — тэта-функция Римана, $\boldsymbol{\xi} \in C^g$.

Пусть кривая Γ_3 допускает автоморфизм $\lambda: (z, \omega) \rightarrow (z^{-1}, \omega)$, т. е. $E_{7-k} = E_k^{-1}$, $k = 1, \dots, 6$. Известен [6] следующий факт: если Γ рода $g = 2\hat{g} + n - 1$ обладает инволюцией λ с n парами неподвижных точек, то g -мерная тэта-функция Римана кривой Γ выражается через \hat{g} -мерную тэта-функцию Римана кривой Γ/λ и $(\hat{g} + n - 1)$ -мерную тэта-функцию Прима.

В нашем случае ($\Gamma = \Gamma_3$, $\hat{g} = 2$, $n = 0$) удобно применить технику работы [5], основанную на теореме Апшеля [7]. В каноническом базисе $H_1(\Gamma)$, указанном на рисунке, автоморфизм λ имеет следующее представление:

$$\mathbf{b} = \Lambda \lambda \mathbf{b}, \quad \mathbf{a} = (\Lambda^t)^{-1} \lambda \mathbf{a}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

(равенство в $H_1(\Gamma)$). Здесь $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ — циклы рис. 1, $\lambda \mathbf{b}$, $\lambda \mathbf{a}$ — циклы, получающиеся из них под действием инволюции λ . Удобнее действовать в другом каноническом базисе \mathbf{a}' , \mathbf{b}' : $\mathbf{b}' = \Phi \mathbf{b}$, $\mathbf{a}' = (\Phi^t)^{-1} \mathbf{a}$. Здесь $\mathbf{b}' = \Lambda' \lambda \mathbf{b}'$, $\mathbf{a}' = (\Lambda'^t)^{-1} \lambda \mathbf{a}'$, $\Lambda' = \Phi \Lambda \Phi^{-1}$;

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Аналогично [5] получаем ограничение на матрицу периодов в базисе $a', b', B = \Lambda' B \Lambda'^t$, откуда

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \beta & \gamma & \delta \\ 0 & \delta & 2\delta \end{pmatrix}. \quad (2)$$

$\Omega_1(P) = -\Omega_1(\lambda P)$, $\Omega_2(P) = \Omega_2(\lambda P)$, так как у этих нормированных интегралов второго рода одинаковые особенности. Следовательно, совпадают и векторы их b -периодов

$$V = -\Lambda'V, \quad W = \Lambda'W, \quad V = (0, v, 2v), \quad W = (w_1, w_2, 0). \quad (3)$$

К тэта-функции Римана, определяемой B -матрицей (2), можно применить теорему Аппеля [5, 7]

$$\Theta(x|B) = \Theta \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{matrix} x_1 \\ 2x_2 - x_3 \end{matrix} \middle| A \right) \Theta[0|0](x_3|2\delta) + \\ + \Theta \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{matrix} x_1 \\ 2x_2 - x_3 \end{matrix} \middle| A \right) \Theta[1/2|0](x_3|2\delta), \quad (4)$$

где $\Theta[\alpha|\beta](x|B)$ — тэта-функция Римана с характеристиками α, β ; $x = (x_1, x_2, x_3)$;

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & 4\gamma - 2\delta \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Цикл C , обходящий разрез $[0, \infty]$, равен $C = a_2 = a'_1 + a'_2$, поэтому $M = 1/2(1, 1, 0)$. Подставляя (2) — (5) в формулу (1), получаем решение уравнения SG

$$u(x, t) = \frac{2}{i} \ln \left\{ \left(\Theta \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{matrix} z_1 + 1/2 \\ z_2 \end{matrix} \middle| A \right) \Theta[0|0](z_3|2\delta) - \right. \right. \\ \left. \left. - \Theta \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{matrix} z_1 + 1/2 \\ z_2 \end{matrix} \middle| A \right) \Theta[1/2|0](z_3|2\delta) \right) / \left(\Theta \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{matrix} z_1 \\ z_2 \end{matrix} \middle| A \right) \Theta[0|0](z_3|2\delta) + \right. \\ \left. \left. + \Theta \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{matrix} z_1 \\ z_2 \end{matrix} \middle| A \right) \Theta[1/2|0](z_3|2\delta) \right) \right\}, \quad (6)$$

где $z_1 = w_1 t / 2\pi + \zeta_1$, $z_2 = w_2 t / \pi + 2\zeta_2 - \zeta_1$, $z_3 = vx / \pi + \zeta_3$. В выражении (6) от x зависит только одномерная тэта-функция, следовательно, решение (6) — периодическое.

В описанной ситуации можно применить технику редукции абелевых интегралов к эллиптическим, предложенную в работе [9]. При этом, оказывается, что один абелев интеграл первого рода редуцируется до эллиптического, а два других — до интегралов кривой рода $g = 2$, константы v, δ — эллиптические, а $w_1, w_2, \alpha, \beta, \gamma$ выражаются в терминах кривой рода $g = 2$.

Пользуясь результатами работы [8], легко из (6) выделить вещественные периодические конечнозонные решения рода $g = 3$.

Автор благодарен В. Б. Матвееву и М. В. Бабичу за полезные обсуждения.

ЦИТИРУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Козел В. А., Котляров В. П. — ДАН УССР, 1976, сер. А, № 10, с. 878—881.
2. Matveev V. B. Preprint 373. Wrocław University, 1976.
3. Белокопос Е. Д., Энольский В. З. — ТМФ, 1982, т. 53, № 2, с. 271—282.
4. Forest G., McLaughlin D. W. — J. Math. Phys., 1982, в. 23, № 2, р. 1248—1277.
5. Бабич М. В., Бобенко А. И., Матвеев В. Б. — ДАН СССР, 1983, т. 272, № 1, с. 13—17.
6. Fay J. — Lect. Notes in Math., 1973, № 352.
7. Appel P. — Bull. Soc. Math. France, 1882, в. 10, р. 59—67.
8. Дубровин Б. А., Натанзон С. М. — Функт. анализ, 1982, т. 16, вып. 1, с. 27—43.
9. Белокопос Е. Д., Энольский В. З. — УМН, 1982, т. 37, вып. 4, с. 89.

Ленинградское отделение
математического института
им. В. А. Стеклова АН СССР

Поступило в редакцию
1 ноября 1983 г.