E. N. Egorenkova, A number-theoretic formula for approximate integration, *Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh.*, 1993, Number 2, 55–58

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1993. № 2

УДК 511

Е. Н. Егоренкова

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕТИКО-ЧИСЛОВОЙ ФОРМУЛЕ ПРИБЛИЖЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

1. Введение. В статье строится пример сетки

$$M=\{(\xi_1(k),\ldots,\xi_s(k)):k=1,\ldots,N\},$$

для которой на классе функций $E_s^\alpha(C)$, $\alpha>1$ (т. е. функций $f(x_1,\ldots,x_s)$ с периодом единица по каждой переменной, коэффициенты Фурье которых удовлетворяют неравенству

$$|C(m_1,\ldots,m_s)|\leqslant C(\overline{m}_1\cdots\overline{m}_s)^{-\alpha};\ \overline{m}=\max\{|m|,\ 1\},$$

погрешность $R_N[f]$ квадратурной формулы приближенного интегрирования

$$\int_0^1\ldots\int_0^1 f(x_1,\ldots,x_s)\,dx_1\ldots dx_s=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}f(\xi_1(k),\ldots,\xi_s(k))-R_N[f] \qquad (1)$$

удовлетворяет соотношению

$$R_N[f]=O\left(N^{-\frac{\alpha}{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{s}}}\right).$$

Известны сетки, допускающие лучшую оценку погрешности $R_N[f]$. Например, параллелепипедальные сетки (см. [1, § 7]) обеспечивают погрешность порядка $O\left(\frac{\ln^\gamma N}{N^\alpha}\right)$, где γ — некоторая константа, зависящая от α и s. Однако предлагаемая в настоящей работе сетка обеспечивает порядок погрешности лучший, чем равномерная сетка (см. [1, теорема 3]), и в отличие от параллелепипедальных сеток, для которых требуется при каждом N определять оптимальные коэффициенты, построенная нами сетка указывается явным образом. К сожалению, возможность практического использования нашей сетки весьма ограничена, так как при увеличении размерности s количество точек в сетке растет слишком быстро.

Аналогичные идеи доказательств приведены в [1], а также в работе [2].

2. Описание сетки. Пусть $p_1,\ldots,p_s$ — натуральные числа, каждое из которых больше s, причем

$$(p_1\cdots p_s,\ s!)=1 \qquad (2)$$

и

$$p_\nu\asymp p_1^{\overline{\frac{s}{(s-\nu+1)\,(s-\nu+2)}}};\ \nu=2,\ldots,s. \qquad (3)$$

Предлагаемая сетка M состоит из точек

$$\left(\left\{\frac{k_1}{p_1}+\frac{k_2}{p_1p_2}+\ldots+\frac{k_s}{p_1\cdots p_s}\right\},\ \left\{\frac{k_1}{p_1}+\frac{2k_2}{p_1p_2}+\ldots+\frac{2^{s-1}k_s}{p_1\cdots p_s}\right\},\ldots\right.$$
$$\left.\ldots,\left\{\frac{k_1}{p_1}+\frac{sk_2}{p_1p_2}+\ldots+\frac{s^{s-1}k_s}{p_1\cdots p_s}\right\}\right), \qquad (4)$$

где

$$k_1=1,\ \ldots,\ p_1;$$

$$k_2=1,\ \ldots,\ p_1p_2;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$k_s=1,\ \ldots,\ p_1\cdots p_s.$$

Количество точек N в сетке M удовлетворяет соотношению

$$N=p_1^s p_2^{s-1}\cdots p_s \asymp p_1^{s\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{s}\right)}. \tag{5}$$

3. Оценка погрешности квадратурной формулы. Сформулируем основной результат.

Теорема. *Для функций* $f\in E_s^\alpha(C)$, $\alpha>1$, *погрешность* $R_N[f]$ *квадратурной формулы* (1), *соответствующей сетке* (4), *удовлетворяет соотношению*

$$R_N[f]=O\left(N^{-\frac{\alpha}{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{s}}}\right).$$

Доказательство. Согласно [1, лемма 11] погрешность допускает оценку

$$|R_N[f]|\leqslant\frac{C}{N}\sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{|S(m_1,\ \ldots,\ m_s)|}{(\overline{m}_1\cdots\overline{m}_s)^\alpha},$$

где $S(m_1,\ \ldots,\ m_s)$ — тригонометрическая сумма, соответствующая сетке (4). Понятно, что

$$S(m_1,\ \ldots,\ m_s)=$$

$$=\sum_{k_1=1}^{p_1}\ldots\sum_{k_s=1}^{p_1\cdots p_s} e^{2\pi i\left(\frac{m_1+\ldots+m_s}{p_1}k_1+\frac{m_1+\ldots+sm_s}{p_1p_2}k_2+\ldots+\frac{m_1+\ldots+s^{s-1}m_s}{p_1\cdots p_s}k_s\right)}=$$

$$=N\delta_{p_1}(m_1+\ldots+m_s)\,\delta_{p_1p_2}(m_1+\ldots+sm_s)\ldots\delta_{p_1\cdots p_s}(m_1+\ldots+s^{s-1}m_s),$$

где $\delta_q(a)=\begin{cases}0, & q\nmid a;\\ 1, & q\mid a.\end{cases}$

Отсюда

$$|R_N[f]|\leqslant C\rho=$$

$$=C\sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{\delta_{p_1}(m_1+\ldots+m_s)\cdots\delta_{p_1\cdots p_s}(m_1+\ldots+s^{s-1}m_s)}{(\overline{m}_1\cdots\overline{m}_s)^\alpha}. \tag{6}$$

(Последнее равенство в формуле (6) определяет величину ρ.) Разобьем сумму, стоящую в правой части (6), на слагаемые:

$$\rho=\rho_1+\ldots+\rho_s. \tag{7}$$

Здесь ρ_ν — сумма, состоящая из слагаемых, в которых ровно ν индексов из $m_1, \ldots, m_s$ отличны от нуля. Пусть $m_{j_1}\ldots m_{j_\nu}\neq 0$, где $1\leqslant\nu\leqslant s$ и $j_1, \ldots, j_\nu$ — некоторый набор различных натуральных чисел из промежутка от 1 до s. Рассмотрим сумму

$$\sigma_{j_1,\ldots,j_\nu}=$$

$$=\sum_{|m_{j_1}|,\ldots,|m_{j_\nu}|\geqslant 1}\frac{\delta_{p_1}(m_{j_1}+\ldots+m_{j_\nu})\ldots\delta_{p_1\ldots p_s}(j_1^{s-1}m_{j_1}+\ldots+j_\nu^{s-1}m_{j_\nu})}{|m_{j_1}\ldots m_{j_\nu}|^{\alpha}},$$

для которой выполняется оценка

$$\sigma_{j_1,\ldots,j_\nu}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{|m_{j_1}|,\ldots,|m_{j_\nu}|\geqslant 1}\frac{\delta_{p_1\ldots p_{s-\nu+1}}(j_1^{s-\nu}m_{j_1}+\ldots+j_\nu^{s-\nu}m_{j_\nu})\ldots\delta_{p_1\ldots p_s}(j_1^{s-1}m_{j_1}+\ldots+j_\nu^{s-1}m_{j_\nu})}{|m_{j_1}\ldots m_{j_\nu}|^{\alpha}}.$$

В последней сумме отличны от нуля только те слагаемые, для которых индексы $m_{j_1},\ldots,m_{j_\nu}$ удовлетворяют системе сравнений

$$j_1^{s-\nu}m_{j_1}+\ldots+j_\nu^{s-\nu}m_{j_\nu}\equiv 0 \pmod{p_1\cdots p_{s-\nu+1}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$j_1^{s-1}m_{j_1}+\ldots+j_\nu^{s-1}m_{j_\nu}\equiv 0 \pmod{p_1\cdots p_s}.$$

Следовательно, для этих $m_{j_1},\ldots,m_{j_\nu}$

$$\left.\begin{array}{l} j_1^{s-\nu}m_{j_1}+\ldots+j_\nu^{s-\nu}m_{j_\nu}\equiv 0\\ j_1^{s-1}m_{j_1}+\ldots+j_\nu^{s-1}m_{j_\nu}\equiv 0\end{array}\right\}\pmod{p_1\cdots p_{s-\nu+1}}. \qquad (8)$$

Определитель Δ данной однородной линейной системы сравнений лишь немногим отличается от определителя Вандермонда ν-го порядка и удовлетворяет с учетом (2) соотношению

$$\Delta=j_1^{s-\nu}\cdots j_\nu^{s-\nu}\prod_{1\leqslant a<b\leqslant\nu}(j_b-j_a)\not\equiv 0 \pmod{p_1\cdots p_{s-\nu+1}}.$$

Это означает, что в кольце классов вычетов по модулю $p_1\cdots p_{s-\nu+1}$ система (8) имеет единственное решение

$$m_{j_1}\equiv\ldots\equiv m_{j_\nu}\equiv 0 \pmod{p_1\ldots p_{s-\nu+1}}.$$

Учитывая соображения делимости, перепишем оценку $\sigma_{j_1,\ldots,j_\nu}$ следующим образом:

$$\sigma_{j_1,\ldots,j_\nu}\leqslant\frac{1}{(p_1\ldots p_{s-\nu+1})^{\nu\alpha}}\sum_{|m'_{j_1}|,\ldots,|m'_{j_\nu}|\geqslant 1}\frac{1}{|m'_{j_1}\cdots m'_{j_\nu}|^{\alpha}}.$$

Теперь, используя (3), получаем $\sigma_{j_1,\ldots,j_\nu}=O(p_1^{-s\alpha})$ и, следовательно,

$$\rho_\nu=\sum_{1\leqslant j_1<\ldots<j_\nu\leqslant s}\sigma_{j_1,\ldots,j_\nu}=O(p_1^{-s\alpha}). \qquad (9)$$

Подставляя (9) в (7), с учетом (5) имеем

$$R_N[f]=O\left(N^{-\frac{\alpha}{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{s}}}\right).$$

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. М., 1963.
2. Коробов Н. М. О теоретико-числовых методах приближенного интегрирования// //Историко-математические исследования. Вып. 35. М., 1993 (в печати).

Поступила в редакцию
16.06.92