В. И. Степанов, Арифметика 2-го порядка и непротиворечивость теорий 1-го порядка, *УМН*, 1982, том 37, выпуск 4, 179–180

АРИФМЕТИКА 2-го ПОРЯДКА И НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТЬ ТЕОРИЙ 1-го ПОРЯДКА

В. И. Степанов

Известно, что предложение $\mathrm{con}_{\mathrm{PA}}$, выражающее непротиворечивость пеановской арифметики 1-го порядка PA, недоказуемо в PA, но доказуемо в арифметике 2-го порядка $\mathbf{A}_2$ [1], [2].

В настоящей работе показывается, что аналог 2-й теоремы Гёделя о неполноте имеет место для теорий, задаваемых множеством нелогических аксиом любого уровня арифметической иерархии Клини — Мостовского [2]. При этом предложения, выражающие непротиворечивость соответствующих теорий, доказуемы в $\mathbf{A}_2$.

Пусть L — язык арифметики 1-го порядка PA [2], [3]. Предполагается фиксированной гёделева нумерация языка L, и запись $\ulcorner\varphi\urcorner$ означает нумерал, соответствующий номеру формулы φ. Термы imp, Sub имеют обычный смысл: для любых формул φ, ψ и любого $n\in\omega$ в PA доказуемы формулы $\mathrm{imp}(\ulcorner\varphi\urcorner, \ulcorner\psi\urcorner) = \ulcorner\varphi\to\psi\urcorner$, $\mathrm{Sub}(\ulcorner\varphi(x)\urcorner, \overline{\overline{n}}) = \ulcorner\varphi(\overline{n})\urcorner$. Следуя [3], [4], вместо $\mathrm{Sub}(\ulcorner\varphi(x)\urcorner, x)$ пишем $\ulcorner\varphi(\dot{x})\urcorner$.

Для любого $n>0$ в качестве нелогических аксиом теории $T(n)$ возьмем множество Π_n^0-предложений языка L, истинных в стандартной интерпретации $\langle\omega, +, \cdot\rangle$, и аксиомы PA [3], [4]. Как известно [4], [1], имеется Π_n^0-формула $\mathrm{Tr}_n(x)$ такая, что для любой Π_n^0-формулы $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ выполняется условие

$$\mathrm{PA}\vdash\varphi(x_1, \ldots, x_k)\leftrightarrow\mathrm{Tr}_n(\ulcorner\varphi(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_k)\urcorner). \tag{1}$$

Предикат доказуемости для $T(n)$ задается следующим образом:

$$\mathrm{Prf}_{T(n)}(x, y)\rightleftharpoons\mathrm{Seg}(x)\ \&\ \forall u\leqslant\mathrm{lh}(x)\,(LAx_{PA}((x)_u)\vee$$
$$\vee Ax_{PA}((x)_u)\vee\mathrm{Tr}_n((x)_u)\vee\exists z, v<u\,((x)_z=$$
$$=\mathrm{imp}((x)_v, (x)_u)\vee(x)_u=\mathrm{Gen}((x)_z))\ \&\ \mathrm{Form}((x)_u)\ \&\ y=(x)_{\mathrm{lh}(x)},$$
$$\mathrm{Pr}_{T(n)}(y)\rightleftharpoons\exists x\,\mathrm{Pr}f_{T(n)}(x, y),\quad \mathrm{con}_{T(n)}\rightleftharpoons\neg\,\mathrm{Pr}_{T(n)}(\ulcorner\overline{0}=\overline{1}\urcorner),$$

где Seg, LAx_{PA}, Ax_{PA}, Form, imp, Gen, lh, $(x)_u$ — соответствующие примитивно-рекурсивные формулы и термы [3], [4].

Теорема 1. *Для любых формул* φ, ψ *справедливы соотношения*:

1) $$T(n)\vdash\varphi\Rightarrow T(n)\vdash\mathrm{Pr}_{T(n)}(\ulcorner\varphi\urcorner),$$
2) $$\mathrm{PA}\vdash\mathrm{Pr}_{T(n)}(\ulcorner\varphi\urcorner)\ \&\ \mathrm{Pr}_{T(n)}(\ulcorner\varphi\to\psi\urcorner)\to\mathrm{Pr}_{T(n)}(\ulcorner\psi\urcorner),$$
3) $$\mathrm{PA}\vdash\mathrm{Pr}_{T(n)}(\ulcorner\varphi\urcorner)\to\mathrm{Pr}_{T(n)}(\ulcorner\mathrm{Pr}_{T(n)}(\ulcorner\varphi\urcorner)\urcorner),$$
4) $$T(n)\nvdash\mathrm{con}_{T(n)}.$$

Доказательство. 1) Если $T\vdash\varphi$, то по определению $\mathrm{Pr}_{T(n)}(y)$ имеем $\langle\omega, +, \cdot\rangle\models\mathrm{Pr}_{T(n)}(\ulcorner\varphi\urcorner)$. Поскольку $\mathrm{Pr}_{T(n)}(\ulcorner\varphi\urcorner)$ эквивалентно в PA $\sum_{n+1}$-предложению, следовательно, $\mathrm{Pr}_{T(n)}(\ulcorner\varphi\urcorner)$ доказуемо в $T(n)$.

2) Следует из теоремы 4.6 работы [3].

3) Используя (1), для Π_n^0-формулы $\varphi(y)$ имеем

$$\mathrm{PA}\vdash\varphi(y)\to\mathrm{Pr}_{T(n)}(\ulcorner\varphi(\dot{y})\urcorner).$$

Отсюда

$$\mathrm{PA}\vdash\exists y\varphi(y)\to\mathrm{Pr}_{T(n)}(\ulcorner\exists y\varphi(y)\urcorner).$$

4) Доказывается аналогично классическому случаю, используя 1)—3).

В языке арифметики 2-го порядка $\mathbf{A}_2$ имеется формула $\mathrm{Tr}(x)$ (истинностная формула для PA) такая, что для любой формулы φ языка L имеем

$$\mathbf{A}_2\vdash\varphi(x_1, \ldots, x_k)\leftrightarrow\mathrm{Tr}(\ulcorner\varphi(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_k)\urcorner).$$

Учитывая, что в $\mathbf{A}_2$ доказуема формула

$$\mathrm{Tr}_n(x)\to\mathrm{Tr}(x),$$

аналогично [1] доказывается

Лемма.

$$A_2 \vdash \mathrm{Pr}_{T(n)}(x) \to \mathrm{Tr}(x).$$

Применяя лемму, получим

$$A_2 \vdash \neg\, \mathrm{Tr}(\ulcorner \bar{0} = \bar{1} \urcorner) \to \neg\, \mathrm{Pr}_{T(n)}(\ulcorner \bar{0} = \bar{1} \urcorner).$$

Следовательно, $A_2 \vdash \mathrm{con}_{T(n)}$.

Таким образом, справедлива

Теорема 2. *Для любого* $n > 0$

$$A_2 \vdash \mathrm{con}_{T(n)}.$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. Такеути. Теория доказательств.— М.: Мир, 1978.
[2] Дж. Шенфилд. Математическая логика.— М.: Наука, 1975.
[3] S. Feferman. Arithmetization of metamathematic in general setting.— Fund. Math., 1960, 49, p. 35—92.
[4] Handbook of Mathematical logic.— N.H.P.C., 1977.
[5] K. Gödel. Veber formal unentscheidbare Satze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I. Math. Phys., 1931, 38, p. 173—198.

Московский государственный университет

Поступило в Правление общества 16 апреля 1982 г.