В. Д. Конаков, В. И. Питербарг, Скорость сходимости распределений максимальных уклонений гауссовских процессов и эмпирических плотностей. I, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1982, том 27, выпуск 4, 707–724

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ
Том XXVII 1982 Выпуск 4

СКОРОСТЬ СХОДИМОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ МАКСИМАЛЬНЫХ УКЛОНЕНИЙ ГАУССОВСКИХ ПРОЦЕССОВ И ЭМПИРИЧЕСКИХ ПЛОТНОСТЕЙ. I

КОНАКОВ В. Д., ПИТЕРБАРГ В. И.

Введение

Рассматриваются две тесно связанные между собой задачи: оценка скорости сходимости распределений максимума модуля *гауссовского стационарного процесса* (г. с. п.) на большом интервале (задача (A)) и максимума модуля уклонения *эмпирической функции плотности* (э. ф. п.) Розенблатта—Парзена на отрезке (задача (B)). Бикелом (дискуссия в [1]), Ревесом [2] отмечалась актуальность задачи (B). Для случая, когда максимум уклонения многомерной э. ф. п. берется по сгущающейся решетке, асимптотические разложения и оценка скорости сходимости впервые получены в работе [3], где был применен метод пуассонизации числа наблюдений. Исследование максимума по отрезку вещественной прямой позволяет, в частности, строить асимптотические доверительные полосы для непрерывной плотности, а исследование скорости сходимости позволяет получить асимптотику ширины доверительной полосы. Для гауссовских процессов такая постановка важна, например, в задаче аппроксимации траекторий, изучения поведения времени пребывания за уровнем и т. д. Последние исследования больших уклонений гауссовских процессов [4], [5] в совокупности со схемой сведения задачи (B) к задаче (4), предложенной Бикелом и Розенблаттом в [6] и усовершенствованной авторами, позволяют решить эти задачи для достаточно широких классов г. с. п. и э. ф. п.

В § 1 задача (A) решается для одного класса недифференцируемых гауссовских процессов. В § 2 рассмотрен случай гауссовских процессов с дважды дифференцируемыми траекториями, получены асимптотическое разложение и оценка скорости сходимости.

Показано, что в последнем случае скорость сходимости логарифмического порядка неулучшаема. По-видимому, это верно и в более общих условиях. С другой стороны, если отойти от традиционной формулировки предельной теоремы для максимума, то используя вместо предельного закона $\exp(-2e^{-x})$ сопровождающий набор функций

$$\exp\left(-2e^{-x}\exp\left(-\frac{x^2}{2l_T^2+\lambda_2}\right)\right),$$

можно добиться степенной сходимости, что может иметь важное значение для построения доверительных полос. Эти же замечания справедливы и для задачи (B), которой будет посвящена вторая часть настоящей работы.

§ 1. Оценка скорости сходимости. Недифференцируемый случай

В этом параграфе дается оценка скорости сходимости к предельному распределению при $T\to\infty$ распределения случайной величины

$$\xi_T(X)=\xi_T=l_T\max_{[0,T]}|X(t)|-l_T^2, \tag{1.1}$$

где $l_T \to \infty$ при $T \to \infty$, $\{X(t), -\infty < t < \infty\}$ — *стационарный нормальный локально марковский* процесс (СНЛМ-процесс), т. е. $\mathbf{M}X(t) = 0$ и для ковариационной функции имеет место разложение

$$r(t) = 1 - \lambda |t| + o(|t|), \quad t \to 0, \ 0 < \lambda < \infty. \tag{1.2}$$

Предположим дополнительно, что

$$r(t) = O(t^{-\alpha}) \tag{1.3}$$

при $t \to \infty$ для некоторого $\alpha > 0$, либо

$$\int_0^\infty |r(t)| dt < \infty. \tag{1.4}$$

Результаты этого параграфа представляют дальнейшее развитие результатов, анонсированных в [4]. Сформулируем основной результат этого параграфа. Пусть ω_T — такая функция T, что

$$\omega_T > 0, \quad \lim_{T\to\infty} \omega_T = 0.$$

В плоскости (t, r) рассмотрим конус, являющийся пересечением всех замкнутых конусов с вершинами в точке $(0, 1)$, содержащих график $\{t, r(t)\}$ при $t \in [0, \omega_T]$, и с основаниями, лежащими на вертикали $t = \omega_T$. Пусть Θ_T — угол при вершине этого конуса. Из (1.2) следует, что $\Theta_T \to 0$ при $T \to \infty$. Выберем l_T в (1.1) корнем уравнения

$$T^{-1} = (2\pi)^{-1/2} l \exp(-l^2/2).$$

Нетрудно показать, что при $T \to \infty$

$$l_T = \sqrt{2 \ln T} + \frac{1}{2} \frac{\ln \ln T - \ln \pi}{\sqrt{2 \ln T}} + O\left(\frac{\ln \ln T}{\ln^{3/2} T}\right).$$

Теорема 1.1. *Пусть* $X(t)$ — *СНЛМ-процесс, для которого выполнено* (1.3) *или* (1.4).

Тогда найдется такая постоянная C, $0 < C < \infty$, *что*

$$|\mathbf{P}(\xi_T < x) - \exp(-2\lambda e^{-x})| \leqslant C\left(\Theta_T + \frac{\ln \ln T}{\omega_T \ln T}(1 + e^{-x})\right), \tag{1.5}$$

$$\sup_x |\mathbf{P}(\xi_T < x) - \exp(-2\lambda e^{-x})| \leqslant C\left(\Theta_T + \frac{(\ln \ln T)^2}{\omega_T \ln T}\right). \tag{1.6}$$

Замечание 1.1. Налагая на поведение $r(t)$ в окрестности нуля дополнительные условия, можно указывать оптимальные значения для ω_T (или Θ_T). Если, например,

$$|r(t) - 1 + \lambda t| \leqslant \mu t^{1+a} \quad (a > 0)$$

для достаточно малых $t > 0$, то правая часть (1.6) не превосходит

$$C \frac{(\ln \ln T)^{2a/(a+1)}}{(\ln T)^{a/(a+1)}}.$$

В частном случае $\mu = 0$ имеем $\Theta_T \equiv 0$, поэтому оценка имеет вид $C (\ln \ln T)^2 / \ln T$.

Для доказательства теоремы нам потребуется ряд лемм. Введем сначала необходимые обозначения. Рассмотрим последовательность взаимно независимых процессов $\{X_k(t), k = 0, 1, \ldots\}$, каждый из которых имеет то же распределение, что и $X(t)$. Пусть $\mathbf{P}^*_{\omega_T}(\cdot)$ — мера, соответствующая процессу

$$X_T^*(t)=X_{[t/\omega_T]}(t),$$

а $\mathbf{P}^{**}_{\omega_T,\lambda}(\cdot)$ — мера, соответствующая процессу

$$X_\lambda^{**}(t)=U_{[t/\omega_T]}(t),\quad \lambda>0,$$

где $\{U_k(t), k=0, 1, 2,\ldots\}$ — взаимно независимые гауссовские процессы, каждый из которых имеет ковариационную функцию $r(t)=(1-\lambda\mid t\mid)^+$; через x^+ обозначаем $\max(x, 0)$. Введем следующие множества:

$$I_{k,T}=\{(k-1+\varepsilon_T/2)\,\omega_T\leqslant t\leqslant(k-\varepsilon_T/2)\,\omega_T\},\qquad k=1,2,\ldots$$

$$I_T=\bigcup_{k=1}^{\infty} I_{k,T},\qquad I_T^c=[0,\infty)\setminus I_T,$$

где $\varepsilon_T>0$, $\lim\limits_{T\to\infty}\varepsilon_T=0$. Положим

$$Z(T)=\max_{0\leqslant t\leqslant T}\mid X(t)\mid\chi(\varepsilon_T,\omega_T,t),$$

$$Z_N(T)=\max_{1\leqslant k\leqslant N}\left|X\left(\frac{kT}{N}\right)\right|\chi\left(\varepsilon_T,\omega_T,\frac{kT}{N}\right),$$

где функция $\chi(\varepsilon_T,\omega_T,t)$ равна 1 при $t\in I_T$ и $-\infty$ при $t\in I_T^c$. Пусть, далее,

$$Y_1=\max_{t\in\Delta_1}X(t),\qquad Y_2=\max_{t\in\Delta_2}X(t),$$

где

$$\Delta_1=\left[\frac{\omega_T\varepsilon_T}{2},\,\omega_T\left(1-\frac{\varepsilon_T}{2}\right)\right],\qquad \Delta_2=\overline{[0,\omega_T]\setminus\Delta_1},$$

величины Y_3 и Y_4 отличаются от Y_1 и Y_2 заменой $X(t)$ на $\mid X(t)\mid$ соответственно.

Лемма 1.1. *Пусть* $X(t)$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$ — *СНЛМ-процесс с* $r(t)=(1-\mid t\mid)^+$.

Тогда если

$$\lim_{T\to\infty}x_T=+\infty,\qquad \varliminf_{T\to\infty}x_T^2\omega_T(\ln x_T)^{-1}>8,$$

то при $T\to\infty$

$$\frac{\mathbf{P}(Y_1>x_T)}{x_T\varphi(x_T)\,\omega_T(1-\varepsilon_T)}=1+\frac{1+o(1)}{x_T^2\omega_T},\tag{1.7}$$

где $\varphi(x)$ — *плотность стандартного нормального распределения. Если к тому же*

$$\varliminf_{T\to\infty}x_T^2\omega_T\varepsilon_T(\ln x_T)^{-1}>16,$$

то при $T\to\infty$

$$\frac{\mathbf{P}(Y_2>x_T)}{x_T\varphi(x_T)\,\omega_T\varepsilon_T}=1+\frac{1+o(1)}{x_T^2\omega_T\varepsilon_T}.\tag{1.8}$$

Доказательство. В силу стационарности процесса $X(t)$

$$\mathbf{P}(Y_1>x_T)=\mathbf{P}(X(0)>x_T)+\int_0^{\omega_T(1-\varepsilon_T)}Q(x_T,t)\,dt,\tag{1.9}$$

где $Q(x, t)dt$ — вероятность события

$$\{X(0) < x \text{ и } X(t) \text{ впервые достигнет уровня } x \text{ в интервале } (t, t+dt)\}.$$

Известно [7, лемма 4.4], что

$$Q(x, t) = Q(x, v) = x\varphi(x)(v^{-1/2}\varphi(\sqrt{v}) + \Phi(\sqrt{v})),$$

где

$$v(x, t) = x^2t/(2-t), \quad \Phi(z) = (2\pi)^{-1/2}\int\limits_{-\infty}^{z}\exp(-s^2/2)\,ds.$$

По условию $\omega_T(1-\varepsilon_T) > 8\ln x_T/x_T^2$ при достаточно больших T. Представим интеграл в (1.9) в виде суммы двух интегралов I_1 и I_2, где

$$I_1 = \int\limits_0^{8\ln x_T/x_T^2} Q(x_T, t)\,dt, \quad I_2 = \int\limits_{8\ln x_T/x_T^2}^{\omega_T(1-\varepsilon_T)} Q(x_T, t)\,dt,$$

и оценим сначала I_2. Воспользуемся тем, что при $t \in [8\ln x_T/x_T^2, \omega_T(1-\varepsilon_T)]$ выполняются неравенства

$$v(x_T, t) > 4\ln x_T,$$

$$|1 - \Phi(\sqrt{v}) - v^{-1/2}\varphi(\sqrt{v})| \leqslant \frac{\varphi(2\sqrt{\ln x_T})}{(\ln x_T)^{3/2}},$$

что в силу условий леммы на x_T и ω_T влечет

$$I_2 = x_T\varphi(x_T)\,\omega_T(1-\varepsilon_T)\left(1 + O\left(\frac{1}{x_T^2(\ln x_T)^{3/2}}\right)\right) - 8x_T^{-1}\ln x_T\varphi(x_T), \quad T \to \infty. \tag{1.10}$$

Для оценки I_1 сделаем замену переменных $v = v(x_T, t)$; получим:

$$I_1 = x_T\varphi(x_T)(I_{11} + I_{12}), \tag{1.11}$$

где

$$I_{11} = 2x_T^2\int\limits_0^{v_T}\frac{v^{-1/2}\varphi(\sqrt{v})}{(x_T^2+v)^2}\,dv, \quad I_{12} = 2x_T^2\int\limits_0^{v_T}\frac{\Phi(\sqrt{v})\,dv}{(x_T^2+v)^2},$$

$$v_T = 8\ln x_T/(2 - 8x_T^{-2}\ln x_T).$$

При $T \to \infty$ равномерно по $v \in [0, v_T]$

$$\frac{2x_T^2}{(x_T^2+v)^2} = \frac{2}{x_T^2}\left(1 + O\left(\frac{\ln x_T}{x_T^2}\right)\right),$$

поэтому при $T \to \infty$

$$I_{11} = \frac{2}{x_T^2}\int\limits_0^{\infty} v^{-1/2}\varphi(\sqrt{v})\,dv\left(1 + O\left(\frac{\ln x_T}{x_T^2}\right)\right) = \frac{2}{x_T^2}\left(1 + O\left(\frac{\ln x_T}{x_T^2}\right)\right). \tag{1.12}$$

Интегрируя по частям, также имеем:

$$I_{12} = -\frac{1}{x_T^2}(1 + o(1)) + 8x_T^{-2}\ln x_T. \tag{1.13}$$

Соотношение (1.7) следует теперь из (1.9)—(1.13) и известной оценки для хвоста нормального распределения $\mathbf{P}(X(0) \geqslant x_T)$. Соотношение (1.8) доказывается аналогично, меняется лишь область интегрирования в (1.9). Лемма доказана.

Положим

$$M_T = [N(T)\omega_T(1-\varepsilon_T)/T], \quad A_T = \{j \mid j = 1, 2, \ldots, M_T\},$$

$$Y_{1,N(T)} = \max_{A_T} X\left(\frac{\omega_T\varepsilon_T}{2} + \frac{jT}{N(T)}\right), \quad Y_{3,N(T)} = \max_{A_T}\left|X\left(\frac{\omega_T\varepsilon_T}{2} + \frac{jT}{N(T)}\right)\right|. \tag{1.14}$$

Лемма 1.2. *Пусть* $X(t)$ $(-\infty < t < \infty)$ — *стационарный гауссовский сепарабельный процесс с ковариационной функцией* $r(t)$, *причем*

$$\overline{\lim_{t\to 0}}\, t^{-1}(1 - r(t)) < C < \infty.$$

Тогда для любого $p \geqslant 0$ *найдется такая постоянная* $B(p, a)$, *что для*

$$N(T) = [C(p+4)T^5 l_T^2 (1-a)^{-2}], \quad 2^{-1/2} < a < 1,$$

справедлива оценка

$$\mathbf{P}(Y_i - Y_{i,N(T)} > T^{-2}) \leqslant \frac{B(p,a)}{T^p}, \quad i = 1, \quad 3, \tag{1.15}$$

а для

$$\tilde{N}(T) = [C(2p+3)T l_T^{2p+4}(1-a)^{-2}]$$

— *оценка*

$$\mathbf{P}(Z(T) - Z_{\tilde{N}}(T) > l_T^{-(p+1)}) \leqslant B(p,a)T^{-(2p+2)}. \tag{1.16}$$

Неравенство (1.16) *остается в силе, если вместо* $\mathbf{P}(\cdot)$ *подставить* $P^*_{\omega_T}(\cdot)$.

Доказательство. Используя неравенство (4.4) из [7], получим:

$$\mathbf{P}(Y_i - Y_{i,N(T)} > T^{-2}) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2N(T)}{T}\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \Psi(T^{-2}(1-a)a^k/\sigma(T/2^{k+1}N(T))), \quad i = 1, 3, \tag{1.17}$$

где

$$\Psi(x) = (2\pi)^{-1/2}x^{-1}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), \quad \sigma^2(t) = 2(1 - r(t)).$$

Из свойств $r(t)$ и определения $N(T)$ следует, что при достаточно больших T

$$\sigma(T/2^{k+1}N(T)) \leqslant (1-a)2^{-k/2}T^{-2}l_T^{-1}(p+4)^{-1/2}. \tag{1.18}$$

Из (1.17), (1.18), определений l_T и $N(T)$ имеем:

$$\mathbf{P}(Y_i - Y_{i,N(T)} > T^{-2}) \leqslant \frac{2N(T)}{T}\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \Psi(2^{k/2}a^k l_T\sqrt{p+4}) \leqslant$$
$$\leqslant B_1(p,a)T^4 l_T \sum_{k=0}^{\infty} 2^k\left(\frac{\sqrt{2\pi}}{T l_T}\right)^{(p+4)(2a^2)^k}, \quad i = 1, 3. \tag{1.19}$$

Неравенства (1.15) теперь сразу следуют из (1.19) и того, что $a > 2^{-1/2}$. Доказательство неравенства (1.16) для меры $\mathbf{P}(\cdot)$ проводится совершенно аналогично. Справедливость (1.16) для меры $\mathbf{P}^*_{\omega_T}(\cdot)$ следует из того, что для этой меры имеет место неравенство

$$\mathbf{P}^*_{\omega_T}(Z(T) - Z_{\tilde{N}}(T) > l_T^{-(p+1)}) \leqslant 2\tilde{N}(T)\sum_{k=0}^{\infty} 2^k\Psi(l_T^{-(p+1)}(1-a)a^k/\sigma(T/2^{k+1}\tilde{N}(T))).$$

Лемма доказана.

Лемма 1.3. *Пусть* $X(t)$ $(-\infty < t < \infty)$ — *СНЛМ-процесс. Тогда при* $T \to \infty$ *равномерно по* $x \in [-{}^1/_4 l_T^2, +\infty)$

$$\mathbf{P}(\max_{I_{1,T}} X(t) > u_T, \min_{I_{1,T}} X(t) < -u_T) = O(T^{-2}), \tag{1.20}$$

где $u_T = l_T + x l_T^{-1}$.

Доказательство. Имеем цепочку неравенств:

$$\mathbf{P}\left(\max_{A_T} X\left(\frac{\omega_T\varepsilon_T}{2} + \frac{jT}{N(T)}\right) > u_T, \min_{A_T} X\left(\frac{\omega_T\varepsilon_T}{2} + \frac{jT}{N(T)}\right) < -u_T\right) \leqslant$$

$$\leqslant 2\sum_{j=1}^{M_T}(M_T - j)\,\mathbf{P}\left(X(0) < -u_T, X\left(\frac{jT}{N(T)} > u_T\right)\right) \leqslant$$

$$\leqslant 2\sum_{j=1}^{M_T}(M_T - j)\,\mathbf{P}\left(X\left(\frac{jT}{N(T)}\right) - X(0) > 2u_T\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{M_T}(M_T - j)\,u_T^{-1}\exp\left(-\frac{u_T^2}{1 - r(jT/N(T))}\right) \leqslant M_T^2 u_T^{-1}\,(e^{-u_T^2/2})^{1/\lambda\omega_T}. \tag{1.21}$$

Мы воспользовались тем, что при достаточно больших T из (1.2) получается неравенство

$$1 - r\left(\frac{jT}{N(T)}\right) < 2\lambda\omega_T, \quad 1 \leqslant j \leqslant M_T.$$

Имеем, далее, очевидное тождество

$$\mathbf{P}(\max_{I_{1,T}} X(t) > u_T, \min_{I_{1,T}} X(t) < -u_T) - \mathbf{P}\left(\max_{A_T} X\left(\frac{\varepsilon_T\omega_T}{2} + \frac{jT}{N(T)}\right) > \right.$$

$$\left. > u_T, \min_{A_T} X\left(\frac{\varepsilon_T\omega_T}{2} + \frac{jT}{N(T)}\right) < -u_T\right) = 2\,[\mathbf{P}(Y_{1,N(T)} \leqslant u_T) - \mathbf{P}(Y_1 \leqslant u_T)] +$$

$$+ [\mathbf{P}(Y_3 \leqslant u_T) - \mathbf{P}(Y_{3,N(T)} \leqslant u_T)]. \tag{1.22}$$

В силу (1.15)

$$\mathbf{P}(Y_{i,N(T)} \leqslant y) \lesseqgtr \mathbf{P}(Y_i \leqslant y \pm T^{-2}) \pm \frac{B(p,a)}{T^p}, \quad i = 1, 3. \tag{1.23}$$

Из результатов работы [8] (теорема 2) следует, что плотности распределения случайных величин Y_i, $i = 1, 3$, существуют, ограничены и мажорируются на хвостах (равномерно по $I_{1,T}$) экспоненциально убывающий по y функцией. Поэтому (1.20) следует из (1.21) (1.22) и (1.23). Лемма доказана.

Непосредственно из лемм 1.1 и 1.3 получаем следующие оценки.

Лемма 1.4. *Пусть* $X(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ — *СНЛМ-процесс с* $r(t) = (1 - |t|)^+$.

Тогда если

$$\varliminf_{T\to\infty} u_T^2\omega_T(\ln u_T)^{-1} > 8 \quad \text{при} \quad x \in \left[-\frac{l_T^2}{4}, +\infty\right),$$

то

$$\frac{\mathbf{P}(Y_3 > u_T)}{2\omega_T(1 - \varepsilon_T)\,u_T\varphi(u_T)} = 1 + \frac{1 + o(1)}{u_T^2\omega_T}, \quad T \to \infty. \tag{1.24}$$

Если к тому же при $x \in [-l_T^2/4, +\infty)$

$$\varliminf_{T\to\infty} u_T^2\omega_T\varepsilon_T(\ln u_T)^{-1} > 16,$$

то

$$\frac{\mathbf{P}(Y_4 > u_T)}{2\omega_T\varepsilon_T u_T\varphi(u_T)} = 1 + \frac{1+o(1)}{u_T^2\omega_T\varepsilon_T}, \quad T\to\infty. \tag{1.25}$$

Величины $o(1)$ *в* (1.24) *и* (1.25) *оцениваются равномерно по* $x \in [-l_T^2/4, l_T^2/4]$.

Пусть $X(t)$ $(-\infty < t < \infty)$ — СНЛМ-процесс. Тогда из (1.2) при $|t-s| \leqslant \omega_T$

$$1 - \lambda_T^- |t-s| \leqslant r(|t-s|) \leqslant 1 - \lambda_T^+ |t-s|, \tag{1.26}$$

причем $\lambda_T^{\pm} \to \lambda$ при $T\to\infty$. Следующая лемма является аналогом теоремы сравнения Слепяна [9] для меры $\mathbf{P}_{\omega_T}^*(\cdot)$.

Лемма 1.5. *Пусть выполнены неравенства* (1.26) *и*

$$\varliminf_{T\to\infty} u_T^2\omega_T(\lambda_T^- \ln u_T)^{-1} > 8 \quad \text{при} \quad x \in \left[-\frac{l_T^2}{4}, +\infty\right).$$

Тогда существуют такие $C<\infty$ *и* $\delta>0$, *что при* $x\in[-l_T^2/4, l_T^2/4]$

$$\mathbf{P}_{\omega_T}^*(Z(T)<u_T) \gtrless \mathbf{P}_{\omega_T,\lambda_T^{\pm}}^{**}(Z(T)<u_T) \pm CT^{-\delta}. \tag{1.27}$$

Доказательство. Заметим прежде всего, что соотношения (1.24) и (1.25) леммы 1.4 очевидным образом изменяются для процесса $X(t)$ с $r(t) = (1-\lambda_T|t|)^+$, в чем можно убедиться с помощью замены времени $\tilde t = \lambda_T t$. Из определения l_T, $\mathbf{P}_{\omega_T}^*(\cdot)$, $P_{\omega_T,\lambda_T}^{**}(\cdot)$ и неравенства Ферника [10] следует, что

$$|\mathbf{P}_{\omega_T}^*(Z(T)<u_T) - (\mathbf{P}_{\omega_T}^*(Y_3<u_T))^{[T/\omega_T]}| \leqslant C_1T^{-\delta_1},$$
$$|\mathbf{P}_{\omega_T,\lambda_T^{\pm}}^{**}(Z(T)<u_T) - (\mathbf{P}_{\omega_T,\lambda_T^{\pm}}^{**}(Y_3<u_T))^{[T/\omega_T]}| \leqslant C_1T^{-\delta_1} \tag{1.28}$$

при некоторых $C_1<\infty$, $\delta_1>0$ равномерно по $x\in[-l_T^2/4, +\infty)$. Предположим, мы доказали, что

$$\mathbf{P}_{\omega_T}^*(Y_3 \leqslant u_T) \gtrless \mathbf{P}_{\omega_T,\lambda_T^{\pm}}^{**}(Y_3<u_T)\left(1\pm\frac{C_2}{T^2}\right) \tag{1.29}$$

при некотором C_2, $0<C_2<\infty$. Тогда, возведя неравенства (1.29) в степень $[T/\omega_T]$ и учитывая (1.28), получим (1.27). Из (1.26) и теоремы сравнения Слепяна имеем:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{\omega_T}^*(Y_3<u_T) &= 1 - 2\mathbf{P}_{\omega_T}^*(Y_1>u_T) + \\ &+ \mathbf{P}_{\omega_T}^*(\max_{I_{1,T}} X(t)>u_T, \min_{I_{1,T}} X(t)<-u_T) \leqslant 1 - 2\mathbf{P}_{\omega_T,\lambda_T^+}^{**}(Y_1>u_T) + \\ &+ \mathbf{P}_{\omega_T,\lambda_T^+}^{**}(\max_{I_{1,T}} X(t)>u_T, \min_{I_{1,T}} X(t)<-u_T) + \delta_T \leqslant \mathbf{P}_{\omega_T,\lambda_T^+}^{**}(Y_3<u_T)+\delta_T,\end{aligned} \tag{1.30}$$

где

$$\begin{aligned}\delta_T = \mathbf{P}_{\omega_T}^*(\max_{I_{1,T}} X(t)>u_T, \min_{I_{1,T}} X(t)<-u_T) - \\ - \mathbf{P}_{\omega_T,\lambda_T^+}^{**}(\max_{I_{1,T}} X(t)>u_T, \min_{I_{1,T}} X(t)<-u_T).\end{aligned}$$

Из леммы 1.3 и того, что $\lambda_T^+\to\lambda$ при $T\to\infty$, следует, что δ_T есть $O(T^{-2})$ при $T\to\infty$. Поэтому из (1.30) и замечания в начале доказательства леммы следует верхнее неравенство (1.29). Доказательство нижнего неравенства (1.29) аналогично. Лемма доказана.

Лемма 1.6. *Пусть выполнены* (1.2) *и* (1.3) *или* (1.4), $\tilde{N}$ (T) *выбрано, как в лемме* 1.2 *с* $p=2$ *и*

$$\overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{38\ln\ln T}{\lambda\varepsilon_T\omega_T\ln T}=q<1. \tag{1.31}$$

Тогда для любых q_1, $q_1\in(q,1)$ *существует такая величина* $C(\lambda)$, *что*

$$\sup_{x\in[-\ln l_T^2,\,+\infty)}|\mathbf{P}(Z_{\tilde{N}}(T)<u_T)-\mathbf{P}^*_{\omega_T}(Z_{\tilde{N}}(T)<u_T)|\leqslant$$
$$\leqslant C(\lambda)\exp(-\lambda(1-q_1)\varepsilon_T\omega_T\ln T/4). \tag{1.32}$$

Доказательство. Из теоремы 2.1 следует оценка, аналогичная неравенству Бермана (см. лемму 2.1 в [7]):

$$|\mathbf{P}(Z_{\tilde{N}}(T)<u_T)-\mathbf{P}^*_{\omega_T}(Z_{\tilde{N}}(T)<u_T)|\leqslant$$
$$\leqslant 4\sum_{j=1}^{\tilde{N}(T)-1}\frac{|r_T(jT/\tilde{N})|}{\sqrt{1-r_T^2(jT/\tilde{N})}}(\tilde{N}-j)\exp\left(-\frac{u_T^2}{1+|r_T(jT/\tilde{N})|}\right), \tag{1.33}$$

где $r_T(t)=r(t)\chi([\varepsilon_T\omega_T,+\infty))$ ($\chi(A)$ — индикатор множества A). В силу (1.2) для любого $\delta>0$ и достаточно больших T

$$r_T(t)\leqslant 1-(\lambda-\delta)\varepsilon_T\omega_T,\quad 0<t<\infty. \tag{1.34}$$

Разобьем сумму в правой части (1.33) на две — Σ_1 и Σ_2: от $j=1$ до $j=[T^{\gamma_T-1}\tilde{N}(T)]$ и от $j=[T^{\gamma_T-1}\tilde{N}(T)]+1$ до $\tilde{N}(T)-1$. Здесь

$$\gamma_T=\frac{(\lambda-\delta)\varepsilon_T\omega_T}{4-2(\lambda-\delta)\varepsilon_T\omega_T}.$$

При $x\in[-\ln l_T^2,+\infty)$

$$\exp\left(-\frac{2x+x^2/2l_T^2}{1+|r_T(jT/\tilde{N})|}\right)\leqslant l_T^4.$$

Пользуясь (1.31), (1.34), определениями l_T и $\tilde{N}(T)$, получим:

$$\Sigma_1\leqslant C_1(\lambda)\exp(-(\lambda-\delta)\varepsilon_T\omega_T(1-q)\ln T/4). \tag{1.35}$$

В силу (1.31) $T^{\gamma_T}\to\infty$ при $T\to\infty$, поэтому при оценивании Σ_2 можно воспользоваться соотношениями (1.3) и (1.4). При выполнении соотношения (1.3) имеем:

$$\Sigma_2\leqslant C\tilde{N}\sum_{j=[T^{\gamma_T-1}\tilde{N}]}^{\tilde{N}(T)}(jT/\tilde{N})^{-\alpha}l_T^4\exp\left(-\frac{l_T^2}{1+C(jT/\tilde{N})^{-\alpha}}\right)\leqslant C_1T^{-\alpha_1} \tag{1.36}$$

для $\alpha_1\in(0,\alpha)$ и соответственно выбранных C и C_1.

В случае выполнения соотношения (1.4), из которого следует, что $\lim\limits_{t\to\infty}r(t)=0$, переходя от суммы к интегралу, имеем:

$$\Sigma_2\leqslant C\tilde{N}l_T^4\sum_{j=[T^{\gamma_T-1}\tilde{N}]}^{\tilde{N}}|r(jT/\tilde{N})|\exp\left(-\frac{l_T^2}{1+|r(jT/\tilde{N})|}\right)\leqslant C_1T^{-\alpha_2} \tag{1.37}$$

для произвольного $\alpha_2\in(0,1)$ и соответственно выбранных C и C_1. Утверждение леммы следует теперь из (1.35)—(1.37).

Лемма 1.7. *Если* $\lambda_T \to \lambda, 0 < \lambda < \infty$ *и* $l_T^2\omega_T \to \infty$ *при* $T \to \infty$, *то при достаточно больших* T

$$\sup_{|x|<a_T} |\mathbf{P}^{**}_{\omega_T, \lambda_T}(Z(T) < u_T) - \exp(-2\lambda_T(1-\varepsilon_T)e^{-x})| \leqslant K l_T^{-2}\omega_T^{-1}, \qquad (1.38)$$

где $K = 9\lambda \max\limits_x (\exp(-2\lambda e^{-x})e^{-x})$, $a_T = o(l_T)$, $T \to \infty$.

Доказательство. По теореме 9 из гл. 5 [11]

$$\left|\mathbf{P}^{**}_{\omega_T, \lambda_T}(Z(T) < u_T) - \exp\left(-\left[\frac{T}{\omega_T}\right]\mathbf{P}(Y_з > u_T) - \mathbf{P}(\widetilde{Y}_з > u_T)\right)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left[\frac{T}{\omega_T}\right]\mathbf{P}^2(Y_з > u_T) + \mathbf{P}^2(\widetilde{Y}_з > u_T), \qquad (1.39)$$

где $\widetilde{Y}_з = \max\limits_{[0,\mathcal{T}]} |X(t)|$, $\mathcal{T} = T - ([T/\omega_T] + \varepsilon_T/2)\omega_T$. При $\mathcal{T} \leqslant 0$ положим $\widetilde{Y}_з = -\infty$.

По лемме 1.4 при $T \to \infty$

$$\frac{T}{\omega_T}\mathbf{P}(Y_з > u_T) = 2\lambda_T(1-\varepsilon_T)e^{-x}\left(1 + \frac{x}{l_T^2}\right)e^{-x^2/2l_T^2}\left(1 + \frac{1+o(1)}{u_T^2\omega_T}\right). \qquad (1.40)$$

Подставляя (1.40) в (1.39), воспользовавшись неравенством $\mathbf{P}(\widetilde{Y}_з > u_T) \leqslant \leqslant \mathbf{P}(Y_з > u_T)$ и произведя элементарные вычисления, получим утверждение леммы.

Доказательство теоремы 1.1. Используя (1.26), (1.8) и лемму Слепяна [9], получим для достаточно больших T неравенство

$$\mathbf{P}(\max_{t\in[0,\varepsilon_T\omega_T]} X(t) > u_T) \leqslant 2\lambda u_T\varphi(u_T)\omega_T\varepsilon_T,$$

из которого, учитывая определение l_T, получим: при $x \in [-l_T^2/4, +\infty)$

$$|\mathbf{P}(\max_{[0,T]}|X(t)| < u_T) - \mathbf{P}(Z(T) < u_T)| \leqslant 2\mathbf{P}(\max_{[0,T]\cap I^c} X(t) > u_T) \leqslant$$
$$\leqslant 4\lambda\varepsilon_T(1 + xl_T^{-2})e^{-x}\exp(-x^2/2l_T^2). \qquad (1.41)$$

Заметим, что в работе [7] оценка аналогичной разности в более простой ситуации (ε_T и ω_T — константы) проведена неверно. В цепочке неравенств на с. 212, 12-я строка сверху, второе неравенство, вообще говоря, не имеет места для отрицательных корреляций. Из формулы (1.16), примененной при $p = 2$, следует, что для любого x

$$\mathbf{P}(Z(T) < u_T) \lesseqgtr \mathbf{P}(Z_{\widetilde{N}}(T) < u_T \pm l_T^{-3}) \pm C_1T^{-6}, \qquad (1.42)$$

а из леммы 1.6 —

$$\sup_{x\in[-\ln l_T^2 + l_T^{-2}, +\infty)} |\mathbf{P}(Z_{\widetilde{N}}(T) < u_T \pm l_T^{-3}) - \mathbf{P}^*_{\omega_T}(Z_{\widetilde{N}}(T) < u_T \pm l_T^{-3})| \leqslant$$
$$\leqslant C_2\exp\left(-\frac{\lambda(1-q_1)\varepsilon_T\omega_T\ln T}{4}\right), \quad q_1 > q. \qquad (1.43)$$

Из формулы (1.16), примененной к мере $\mathbf{P}^*_{\omega_T}(\cdot)$ при $p = 2$, следует:

$$\mathbf{P}^*_{\omega_T}(Z(T) < u_T - 2l_T^{-3}) - C_3T^{-6} \leqslant \mathbf{P}^*_{\omega_T}(Z_{\widetilde{N}}(T) < u_T \pm l_T^{-3}) \leqslant$$
$$\leqslant \mathbf{P}^*_{\omega_T}(Z(T) < u_T + 2l_T^{-3}) + C_3T^{-6}. \qquad (1.44)$$

По лемме 1.5 при $x \in [-l_T^2/4 + 2l_T^{-2}, l_T^2/4]$

$$\mathbf{P}^{**}_{\omega_T, \lambda_T^-}(Z(T) < u_T - 2l_T^{-3}) - C_4 T^{-\delta} \leqslant \mathbf{P}^*_{\omega_T}(Z(T) < u_T \pm 2l_T^{-3}) \leqslant$$
$$\leqslant \mathbf{P}^{**}_{\omega_T, \lambda_T^+}(Z(T) < u_T + 2l_T^{-3}) + C_4 T^{-\delta}. \tag{1.45}$$

Наконец, по лемме 1.7 при $x \in [-a_T + 2l_T^{-2}, a_T - 2l_T^{-2}]$

$$|\mathbf{P}^{**}_{\omega_T, \lambda_T^\mp}(Z(T) < u_T \mp 2l_T^{-3}) - \exp(-2\lambda_T^\mp (1 - \varepsilon_T) e^{-(x \mp 2l_T^{-2})})| \leqslant C_5 l_T^{-2} \omega_T^{-1}, \tag{1.46}$$

где, в свою очередь

$$|\exp(-2\lambda_T^\mp (1 - \varepsilon_T) e^{-(x \mp 2l_T^{-2})}) - \exp(-2\lambda e^{-x})| \leqslant C_6(\Theta_T + \varepsilon_T + l_T^{-2}). \tag{1.47}$$

Собирая оценки (1.41)—(1.47), получим: при $x \in [-\ln l_T^2 + l_T^{-2}, a_T - 2l_T^{-2}]$

$$|\mathbf{P}(\xi_T < x) - \exp(-2\lambda e^{-x})| \leqslant$$
$$\leqslant C\left(\Theta_T + \varepsilon_T(1 + e^{-x}) + \exp\left(-\frac{\lambda(1 - q_1)\varepsilon_T\omega_T \ln T}{4}\right)\right). \tag{1.48}$$

Пусть $x \in [-\ln(\lambda^{-1}\ln \varepsilon_T^{-1}), {}^1/_4\lambda(1-q_1)\varepsilon_T\omega_T \ln T]$. В силу условий на ε_T и ω_T этот сегмент содержится в сегменте $[-\ln l_T^2 + l_T^{-2}, a_T - 2l_T^{-2}]$, поэтому внутри него имеет место оценка (1.48). На концах этого сегмента

$$\exp(-2\lambda \exp(\ln(\lambda^{-1}\ln \varepsilon_T^{-1}))) = \varepsilon_T^2,$$
$$1 - \exp\left(-2\lambda \exp\left(-\frac{\lambda}{4}(1 - q_1)\varepsilon_T\omega_T \ln T\right)\right) \leqslant$$
$$\leqslant C \exp\left(-\frac{\lambda}{4}(1 - q_1)\varepsilon_T\omega_T \ln T\right). \tag{1.49}$$

При выборе $\varepsilon_T = 42\lambda^{-1} \ln\ln T/(\omega_T \ln T)$ третье слагаемое в правой части неравенства (1.48) есть $o(\varepsilon_T)$, $T \to \infty$, что влечет (1.5). Из (1.5) и (1.49) получим (1.6).

§ 2. Оценка скорости сходимости и асимптотическое разложение. Гладкий случай

Предположим теперь, что

$$r(t) = 1 - \frac{1}{2}\lambda_2 t^2 + \frac{1}{4!}\lambda_4 t^4 + o(t^4), \quad t \to 0. \tag{2.1}$$

Кроме того, будем считать, что

$$\int_0^\infty |r(t)|\, dt < \infty. \tag{2.2}$$

Пусть сначала $\lambda_2 = 1$. К общему случаю перейдем затем с помощью замены времени. В этом параграфе $l_T = \sqrt{2\ln(T/(2\pi))}$. С помощью дальнейшего развития методов, предложенных в [5], мы найдем асимптотическое разложение при $T \to \infty$ по степеням l_T вероятности $\mathbf{P}(\xi_T \leqslant x)$ (см. (1.1)).

Теорема 2.1. *Пусть* $\{X_\nu(i), i = 1, \ldots, n\}$ $(\nu = 0, 1)$ — *пара гауссовских независимых векторов с нулевыми средними, единичными дисперсиями и ковариациями* $r_\nu(i, j)$, *причем* $|r_\nu(i, j)| < 1$, $i \neq j$, $\nu = 0, 1$

Тогда для любого $u > 0$

$$\mathbf{P}(\max_i |X_1(i)| < u) - \mathbf{P}(\max_i |X_0(i)| < u) =$$

$$= \int_0^1 dh \Big(\sum_{i<j} (r_1(i,j) - r_0(i,j)) \sum_{\nu,\mu=0}^{1} (-1)^{\nu+\mu} \varphi_{X_h(i),\, X_h(j)} ((-1)^\nu u, (-1)^\mu u) \times$$

$$\times \mathbf{P}(\max_k |X_h(k)| \leqslant u \mid X_h(i) = (-1)^\nu u,\ X_h(j) = (-1)^\mu u) \Big), \qquad (2.3)$$

где φ — *совместная двумерная плотность вектора* $\{X_h(i),\ X_h(j)\}$,

$$X_h(k) = \sqrt{h}\ X_1(k) + \sqrt{1-h} X_0(k).$$

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 1 в [13].

Определение. Процесс $V(t)$ называется *косинус-процессом*, если $V(t) = X\cos t + Y \sin t$, где X и Y — гауссовские независимые стандартные величины.

Теорема 2.2. *Пусть* $X_\nu(t)$ $(\nu = 0, 1,\ t \in [0, T],\ T > 0)$ — *пара гауссовских независимых стационарных процессов с нулевыми средними, единичными дисперсиями и ковариациями* $r_\nu(t)$, *удовлетворяющими соотношению* (2.1) *с* $\lambda_{2,\nu} = 1$, $\nu = 0, 1$. *Если*

1) *для любых* t_1, t_2, $t_1 \neq t_2$, *распределения шестимерных векторов*

$$\{X_\nu(t_1), X_\nu(t_2), X'_\nu(t_1), X'_\nu(t_2), X''_\nu(t_1), X''_\nu(t_2)\}, \quad \nu = 0, 1,$$

имеют плотность, 2) *хотя бы для одного* $\nu = 0, 1$

$$\mathbf{M}\,(X'''_\nu(t))^2 = \lambda_{6,\nu} < \infty,$$

то для любого u

$$\mathbf{P}(\max_{[0,T]} |X_1(t)| \leqslant u) - \mathbf{P}(\max_{[0,T]} |X_0(t)| \leqslant u) =$$

$$= \int_0^1 dh \Big(\sum_{\nu,\mu=0}^{1} (-1)^{\nu+\mu} \int_0^T dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 (r_1(t_1 - t_2) -$$

$$- r_0(t_1 - t_2))\, \varphi_{X_h(t_i),\, X'_h(t_i),\, i=1,2} ((-1)^\nu u, (-1)^\mu u, 0, 0) \times$$

$$\times \int\limits_{(-1)^\nu y_1 \leqslant 0} \int\limits_{(-1)^\mu y_2 \leqslant 0} dy_1\, dy_2 |y_1 y_2|\, \varphi_{X''_h(t_i),\, i=1,2} (y_1, y_2 \mid (-1)^\nu u, (-1)^\mu u, 0, 0) \times$$

$$\times \mathbf{P}(\max_{[0,T]} |X_h(s)| \leqslant u \mid (-1)^\nu u, (-1)^\mu u, 0, 0, y_1, y_2) +$$

$$+ \sum_{\tau=0,1} \int_0^T dt (r_1(\tau - t) - r_0(\tau - t))\, \varphi_{X_h(\tau),\, X_h(t),\, X'_h(t)} ((-1)^\nu u, (-1)^\mu u, 0) \times$$

$$\times \int\limits_{(-1)^\mu y \leqslant 0} dy\, |y|\, \varphi_{X''_h(t)} (y \mid (-1)^\nu u, (-1)^\mu u, 0)\, \mathbf{P}(\max_{[0,T]} |X_h(s)| \leqslant$$

$$\leqslant u \mid (-1)^\nu u, (-1)^\mu u, 0, y) + (r_1(0, T) - r_0(0, T)) \times$$

$$\times \varphi_{X_h(0),\, X_h(T)} ((-1)^\nu u, (-1)^\mu u)\, \mathbf{P}(\max_{[0,T]} |X_h(s)| \leqslant u \mid (-1)^\nu u, (-1)^\mu u) \Big), \quad (2.4)$$

где условные плотности и вероятности берутся при равенстве указанным в условии числам значений процесса

$$X_h(t) = \sqrt{h} X_1(t) + \sqrt{1-h} X_0(t)$$

и его производных, записанных индексами во всех предыдущих плотностях того же слагаемого. Индексы вида $f(t_i)$, $g(t_i), \ldots$, $i = 1, 2$, *следует читать как* $f(t_1)$, $f(t_2)$, $g(t_1)$, $g(t_2), \ldots$

Утверждение теоремы справедливо также, если выполнено условие 1 для одного из процессов, а второй является косинус-процессом и $T < \pi$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.2 из [14] с использованием вместо теоремы 1.1 [14] теоремы 2.1 настоящей работы.

Тождество (2.4) дает возможность сравнить распределения максимумов модулей процесса $X(t)$ и какого-нибудь эталонного процесса $Y(t)$, для которого это распределение легко исследуется. Нам понадобятся два эталонных процесса: косинус-процесс $V(t)$ и процесс, который мы сейчас опишем.

Пусть $k(x)$ — такая бесконечно дифференцируемая финитная функция, $\operatorname{supp} k = [-t_0, t_0]$, что

$$\int k(x)^2 dx = \int k'(x)^2 dx = 1.$$

Положим

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} k(t-s)\, dW(s), \tag{2.5}$$

$W(s)$ — двусторонний винеровский процесс;
тогда $\mathbf{M}Y(t)^2 = \mathbf{M}Y'(t)^2$, $\lambda_6 = \mathbf{M}Y'''(t)^2 < \infty$. Кроме того, ковариационная функция $r_Y(t)$ процесса Y обращается в нуль вне интервала $(-2t_0, 2t_0)$, что, в частности, влечет невырожденность всех конечномерных распределений процесса $Y(t)$. Введем обозначения

$$R_h(t) = r_h(t) - r_h'(t)^2/(1 + r_h''(t)),$$

$$Q_h(t) = r_h(t) + r_h'(t)^2/(1 - r_h''(t)),$$

$$d^2(t) = 1 - r_h(t)^2 - r_h'(t)^2, \quad R_h^1(t) = (1 - r_h(t))^2/d(t)^2,$$

$$Q_h^1(t) = (1 + r_h(t))^2/d(t)^2,$$

где

$$r_h(t) = hr_1(t) + (1-h)r_0(t).$$

Лемма 2.1. *Для* $\nu = 0, 1$

$$\varphi_{X_h(t_i),\, i=1,2}((-1)^\nu u, (-1)^{\nu+1} u \mid X_h'(t_i) = 0, i = 1, 2) =$$

$$= \frac{\exp(-u^2/(1 - Q_h(t_1 - t_2)))}{2\pi((1 + R_h(t_1 - t_2))(1 - Q_h(t_1 - t_2)))^{1/2}},$$

$$\varphi_{X_h(0),\, X_h(t),\, X_h'(t)}((-1)^\nu u, (-1)^{\nu+1} u, 0) =$$

$$= (2\pi)^{-3/2} d(t)^{-1} \exp(-{}^1/{}_2 u^2 (1 + Q_h^1(t))),$$

$$\varphi_{X_h(t_i),\, i=1,2}((-1)^\nu u, (-1)^\nu u \mid X_h'(t_i) = 0, i = 1, 2) =$$

$$= \frac{\exp(-u^2/(1 + R_h(t_1 - t_2)))}{2\pi((1 + R_h(t_1 - t_2))(1 - Q_h(t_1 - t_2)))^{1/2}},$$

$$\varphi_{X_h(0),\, X_h(t),\, X_h'(t)}((-1)^\nu u, (-1)^\nu u, 0) =$$

$$= (2\pi)^{-3/2} d(t)^{-1} \exp(-{}^1/{}_2 u^2 (1 + R_h^1(t))).$$

При этом в условиях теоремы 2.2 (*считаем для определенности, что* $\lambda_{6.0} < \infty$):

1) $\rho(T) = \max\{\max\limits_{0 \le h \le 1} |r_h(T)|, \max\limits_{\substack{0 \le t \le T \\ 0 \le h \le 1}} (-Q_h(t)), \max\limits_{t,h} R_h(t), \max\limits_{t,h}(1 - R_h^1(t))/(1 + R_h^1(t)), \max\limits_{t,h}(1 - Q_h^1(t))/(1 + Q_h^1(t))\} < 1$;

2) $\lim\limits_{t \to 0} t^{-4} d(t)^2 = (\lambda_{4,h} - 1)/4$;

$$3)\ \lim_{t\to 0} t^{-6}(1-Q_h(t))(1-r_h''(t)) \geqslant \frac{1-h}{3!\,4!}(\lambda_{6.0}-\lambda_{4.0}^2+h(\lambda_{4.1}-\lambda_{4.0})^2);$$

$$4)\ \lim_{t\to 0} t^{-2}(1+R_h(t))(1+r_h''(t))=\lambda_{4.h}-1,$$

где $\lambda_{4.h}=h\lambda_{4.1}+(1-h)\lambda_{4.0}$.

Доказательство. Утверждения 1, 2, 4 доказываются простыми вычислениями, утверждение 3 доказано в [14, лемма 2.4]. Вывод приведенных в утверждении леммы выражений для условных плотностей прост, его мы опускаем.

Лемма 2.2. *Справедливы неравенства*

$$I_i=\int\limits_{y_1\leqslant 0}\ \int\limits_{(-1)^i y_2\leqslant 0} |y_1y_2|\,\varphi(y_1,y_2\,|\,u,(-1)^i u,0,0)\,dy_1\,dy_2 \leqslant$$
$$\leqslant (u\,|m_{1.i}(t)|+\sigma_1(t))^2,\quad i=1,2;$$

$$J_i=\int\limits_{-\infty}^{0}|y|\,\varphi(y\,|\,u,(-1)^i u,0)\,dy\leqslant u\,|m_{2.i}(t)|+\sigma_2(t),\quad i=1,2,$$

где

$$m_{1.i}(t)=\mathbf{M}(X_h''(t)\,|\,X_h(0)=1,\ X_h(t)=(-1)^i,\ X_h'(0)=X_h'(t)=0),$$
$$m_{2.i}(t)=\mathbf{M}(X_h''(0)\,|\,X_h(0)=1,\ X_h(t)=(-1)^i,\ X_h'(0)=0),$$

σ_k^2 *— соответствующие условные дисперсии, причем существуют такие константы* $M_{k,i}$, *что*

$$\sigma_k^2\leqslant\sigma^2=\max\{\lambda_{4.0},\lambda_{4.1}\},\quad k=1,2,$$
$$|m_{1.2}(t)|\leqslant M_{1.2},\quad |m_{1.1}(t)|\leqslant M_{1.1}t^{-6},$$
$$|m_{2.2}(t)|\leqslant M_{2.2},\quad |m_{2.1}(t)|\leqslant M_{2.1}t^{-4}.$$

Доказательство этих соотношений непосредственно следует из известных представлений для условных математических ожиданий и дисперсий, поэтому здесь мы его опускаем. Заметим, что грубость оценок для $m_{1.1}$ и $m_{2.1}$ — кажущаяся. Например, вторая производная $X''(0)$ при условии $X(t)=-X(0)=1$, $X'(0)=0$ при $t\to 0$ может становиться большой.

Замечание 2.1. Из леммы 2.2 и соотношений

$$|1-Q_h(t)|\leqslant 2t^2 \text{ и } Q_h^1(t)\geqslant t^{-4}(\lambda_{4.h}-1)^{-1}$$

для малых t (см. лемму 2.1, п. 2) следует непрерывность по t, t_1 и t_2 подынтегральных выражений в правой части (2.4).

Теорема 2.3. *Пусть* $X_1(t)$ *и* $X_0(t)$ *— пара гауссовских независимых процессов с нулевыми средними, удовлетворяющих условиям теоремы* 2.2.

Тогда существует такая константа $C=C(T)$, *что для всех* T, *удовлетворяющих условиям теоремы 2.2, и* $u>1$

$$|\mathbf{P}(\max_{[0,T]}|X_1(t)|<u)-P(\max_{[0,T]}|X_0(t)|<u)|\leqslant$$
$$\leqslant C(T)Tu^2\exp(-u^2/(1+\rho(T))),\tag{2.6}$$

число $\rho(T)<1$ *определено в лемме* 2.1.

Следствие 2.1. *Пусть* $X(t)$ $(t\in[0,\infty))$ *— гауссовский стационарный процесс с нулевым средним, ковариационная функция которого удовлетворяет условиям* (2.1) *и* (2.2) *с* $\lambda_2=1$, *и* $Y(t)$ *— процесс, определенный равенством* (2.5).

Тогда для всех $T > 12$ *и* $x > (1 - l_T) l_T$

$$|\mathbf{P}(\xi_T(X) < x) - \mathbf{P}(\xi_T(Y) < x)| \leqslant$$
$$\leqslant (2\pi)^{2/(1+\rho)} C T^{-(1-\rho)/(1+\rho)} \exp\left(-\frac{2x}{1+\rho}\right)(2 \ln T + (x+1)^2),$$

где

$$C = C(X, Y) = \lim_{T\to\infty} C(T), \quad \rho = \rho(X, Y) = \lim_{T\to\infty} \rho(T) < 1.$$

Следствие 2.2. *Пусть* $X(t)$ $(t \in [0, \infty))$ — *гауссовский стационарный процесс с нулевым средним, невырожденными шестимерными плотностями, указанными в теореме* 2.2, *и ковариационной функцией, удовлетворяющей условию* (2.1) *с* $\lambda_2 = 1$.

Тогда для любого T *найдутся такие константы* $C_1 = C_1(T)$ *и* $\rho_1 < 1$ (ρ_1 *не зависит от* T, *если* $\sup_{t>\tau} |r(t)| < 1$ для некоторого $\tau > 0$), *что для любого* $u > 1$

$$\mathbf{P}(\max_{[0,T]} |X(t)| < u) = \frac{T}{\pi} \exp(-{}^1/_2 u^2) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_u^\infty \exp(-x^2/2)\, dx + O_T(u),$$

где $|O_T(u)| < C_1 u^2 \exp(-u^2/(1+\rho_1))$.

Доказательство теоремы 2.3. Применим теорему 2.2. В силу лемм 2.1 и 2.2 имеем: для $u > 0$, $\rho_T = \rho(T)$,

$$|\mathbf{P}(\max_{[0,T]} |X_1(t)| < u) - \mathbf{P}(\max_{[0,T]} |X_0(t)| < u)| \leqslant$$
$$\leqslant T \exp\left(-\frac{u^2}{1+\rho_T}\right) u^2 \Big[\pi^{-1} \int_0^1 dh \Big(\int_0^T dt\, |r_1(t) - r_0(t)|\, ((\sigma u^{-1} + M_{1.1})^2 +$$
$$+ (\sigma u^{-1} + M_{1.2} t^{-6})^2 \exp(-u^2((1 - Q_h(t))^{-1} -$$
$$-(1+\rho_T)^{-1}))((1 - Q_h(t))(1 + R_h(t))(1 - r_h''(t)^2))^{-1/2}/(2\pi) +$$
$$+ (\sigma u^{-1} + M_{2.1} + (\sigma u^{-1} + M_{2.2} t^{-4}) \exp\Big(-\frac{1}{2} u^2 (Q_h^1(t) -$$
$$-(1-\rho_T)(1+\rho_T)^{-1})\Big)\Big)\left(T\sqrt{2\pi}\, u d(t)\right)^{-1} + 2 \exp(-u^2((1 + |r_h(T)|)^{-1} -$$
$$-(1+\rho_T)^{-1}))\, u^{-2} T^{-1} (1 - r_h(T)^2)^{-1/2}\Big]. \qquad (2.7)$$

Поскольку по определению $\rho(T)$ показатели экспонент неположительны, выражение в квадратных скобках в (2.7) убывает по u. Обозначим его при $u = 1$ через $C(T)$.

Теорема доказана.

Доказательство следствия 2.1. Из условия (2.2) и свойств процесса $Y(t)$ следует применимость к X и Y теорем 2.2 и 2.3 для любого T. Из (2.2) следует также, что существует конечный предел $C(T) \uparrow C$, $T \uparrow \infty$, зависящий от моментов процессов X и Y. Соотношение $\rho < 1$ следует из того, что

$$\lim_{t\to\infty} R_h(t) = \lim_{t\to\infty} Q_h(t) = 0, \quad \lim_{t\to\infty} R_h^1(t) = \lim_{t\to\infty} Q_h^1(t) = 1.$$

Подстановкой $u = u_T = l_T + x/l_T$ в правую часть неравенства (2.6) получаем утверждение следствия.

Доказательство следствия 2.2. Пусть сначала $T < \pi$. Применим теорему 2.3, положив $X_1(t) = X(t)$, $X_0(t) = V(t)$, $V(t)$ —

косинус-процесс. Из симметрии гауссовских распределений имеем:

$$\mathbf{P}\,(\max_{[0,T]} |V(t)| > u) = 2\mathbf{P}\,(\max_{[0,T]} V(t) > u) - \\ - \mathbf{P}\,(\max_{[0,T]} V(t) > u,\ \max_{[0,T]} (-V(t)) > u).$$

Уменьшаемое равно $T\pi^{-1}e^{-u^2/2} + \sqrt{2/\pi}\int\limits_u^\infty e^{-x^2/2}\,dx$. Для вычитаемого имеем, положив $\varphi = \operatorname{arctg}(X/Y)$:

$$\mathbf{P}\left(\max_{[0,T]} \sqrt{X^2+Y^2}\cos(t+\varphi) > u,\ \min_{[0,T]} \sqrt{X^2+Y^2}\cos(t+\varphi) < -u\right) \leqslant \\ \leqslant \mathbf{P}\left(\max_{0\leqslant t,\, s\leqslant T} 2\sqrt{X^2+Y^2}\sin\left(\frac{t+s}{2}+\varphi\right)\sin\frac{t-s}{2} > 2u\right) \leqslant \\ \leqslant \mathbf{P}\left(\sqrt{X^2+Y^2} > u/\sin(T/2)\right) = \exp\left(-\frac{u^2}{2\sin^2(T/2)}\right) \leqslant \exp\left(-u^2/(1+\rho_T)\right).$$

Полагая $C' = 1 + C(T)$, получаем утверждение следствия для $T < \pi$. Далее, для произвольного T выберем целое n так, чтобы $r = T/n < \pi/2$. Тогда

$$\mathbf{P}\,(\max_{[0,\tau]} |X(t)| > u,\ \max_{[\tau,2\tau]} |X(t)| > u) = 2\mathbf{P}\,(\max_{[0,\tau]} |X(t)| > u) - \\ - \mathbf{P}\,(\max_{[0,2\tau]} |X(t)| > u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_u^\infty e^{-x^2/2}\,dx - O_{2\tau}(u) + 2O_\tau(u). \tag{2.8}$$

Введем обозначения

$$I_k = [k\tau, (k+1)\tau],\ k = 0, 1, \ldots, n-1,$$
$$p_{k,l,\ldots} = \mathbf{P}\,(\max_{I_k} |X(t)| > u,\ \max_{I_l} |X(t)| > u, \ldots).$$

Имеем:

$$\sum_k p_k - \sum_{k>l} p_{k,l} \leqslant \mathbf{P}\,(\max_{[0,T]} |X(t)| > u) \leqslant \sum_k p_k - \sum_{k>l} p_{k,l} + \sum_{k>l>m} p_{k,l,m}. \tag{2.9}$$

Если $k - l > 1$, то оценим $p_{k,l}$ следующим образом:

$$p_{k,l} \leqslant \sum_{\nu,\,\mu=0}^{1} \mathbf{P}\,(\max_{I_k} (-1)^\nu X(t) > u,\ \max_{I_l} (-1)^\mu X(t) > u) \leqslant \\ \leqslant Au^2\exp\left(-u^2/(1+\tilde\rho((k-l-1)\tau)\right), \tag{2.10}$$

где A — константа, не зависящая от u и

$$\tilde\rho(t) = \max_{t+2\tau\geqslant s\geqslant t} |r(s)|.$$

Для доказательства последнего неравенства воспользуемся соотношением

$$\mathbf{P}\,(\max_{I_k} (-1)^\nu X(t) > u,\ \max_{I_l} (-1)^\mu X(t) > u) \leqslant \mathbf{P}\,(\max_{I_k\times I_l} \zeta(t,s) > 2u),$$

где $\zeta(t,s) = (-1)^\nu X(t) + (-1)^\mu X(s)$. Максимум дисперсии поля $\zeta(t,s)$ не превосходит $b = 2(1 + \tilde\rho((k-l-1)\tau)$. Легко построить однородное гауссовское поле с нулевым средним и дисперсией b, корреляционная функция которого дважды дифференцируема и минорирует корреляцию поля $\zeta(t,s)$. Теорема о сравнении Слепяна [9] и неравенство Ферника [10] дают оценку (2.10).

Далее, из стационарности процесса $X(t)$ следует:

$$\sum_{k>l} p_{k,l} = \sum p_{k,k-1} + \sum_{k>l+1} p_{k,l} = (n-1)\,p_{1,0} + O_2(\tau),$$

где в силу (2.8) и (2.10)

$$|O_2'(\tau)| \leqslant 4(A + C(T))nu^2 \exp(-u^2/(1+\tilde{\rho}(\tau))).$$

Кроме того,

$$\sum_{k>l>m} p_{k,l,m} < n \sum_{k>l+1} p_{k,l}. \tag{2.11}$$

Воспользовавшись в неравенствах (2.9) выражениями (2.8), (2.10) и (2.11), получаем утверждение следствия с

$$C_1 = C_1(T) = 4(A + C(\tau))(n^2 + n), \quad \rho_1 = \max\{\rho(\tau),\ \rho(2\tau),\ \tilde{\rho}(\tau)\}.$$

Теорема 2.4. *Пусть $X(t)$ — гауссовский сепарабельный стационарный процесс с нулевым средним и ковариационной функцией, удовлетворяющей условиям* (2.1) *и* (2.2)

Тогда 1) *справедливо равенство*

$$\mathbf{P}(\xi_T(X) < x) = \exp\left(-2e^{-x}\exp\left(-\frac{x^2}{4\ln(\sqrt{\lambda_2}\,T/2\pi)}\right)\right) + L(T, x) =$$

$$= \exp(-2e^{-x}) + \exp(-2e^{-x})\sum_{j=1}^{\infty}(l_T^2 + \ln\lambda_2)^{-j}\sum_{l=1}^{j}\frac{(-1)^l Q_j^{(l-1)}(x)\,(2e^{-x})^l}{l!} + L(T, x), \tag{2.12}$$

где $Q_j^{(0)}(x) = \dfrac{(-1)^j x^{2j}}{j!\,2^j}$, $j = 1, 2, \ldots,$ *а* $Q_j^{(m-1)}(x)$, $m > 1$, *определяются соотношениями:*

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{Q_k^{(0)}(x)}{(l_T^2 + \ln\lambda_2)^k}\right)^m = \sum_{j=m}^{\infty}\frac{Q_j^{(m-1)}(x)}{(l_T^2 + \ln\lambda_2)^j}.$$

При $x > l_T(1 - l_T)$, $T > 12\sqrt{\lambda_2}$

$$|L(T, x)| < K\left(\sqrt{\lambda_2}\,T\right)^{-(1-\rho_2)/(1+\rho_2)}e^{-2x}(\ln(\lambda_2 T) + (x+1)^2), \quad \rho_2 = \max(\rho, \rho_1) < 1,$$

$$K = (2\pi)^{2/(1+\rho)}C + \frac{2\pi}{t_0}\left(C_2 + \frac{2t_0}{\pi}\right)^2 + \frac{2t_0}{\pi} + 2C_2,$$

$$C_2 = 2C_3 + \left(C_3 + \frac{4t_0}{\pi}\right)^2, \quad C_3 = \max_{0\leqslant t\leqslant t_0} C_1(t) < \infty,$$

константы

$$\rho = \rho(X, Y),\ C = C(X, Y),\ \rho_1 = \rho_1(Y),\ C_1 = C_1'(Y)$$

определены в теореме 2.3 *и следствиях* 2.1 *и* 2.2, $(-2t_0, 2t_0) = \operatorname{supp} r_Y(t)$;

2) *для всех* x *и* $T > 12/\sqrt{\lambda_2}$

$$\frac{0{,}139}{2\ln(T/(2\pi)) + \ln\lambda_2} - 4K\left(T\sqrt{\lambda_2}\right)^{-(1-\rho_2)/(1+\rho_2)}(\ln T)^4 \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{-\infty<x<+\infty}|\mathbf{P}(\xi_T(X) < x) - \exp(-2e^{-x})| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1{,}01}{2\ln(T/(2\pi)) + \ln\lambda_2} + 4K\left(T\sqrt{\lambda_2}\right)^{-(1-\rho_2)/1+\rho_2}(\ln T)^4. \tag{2.13}$$

Доказательство. Положим $\tau = 2t_0$ и предположим сначала, что $\lambda_2 = 1$. Примем обозначения

$$A_k = \left(\max_{[k\tau,\,(k+1)\tau]}|Y(t)| < u_T\right), \quad N = \left[\frac{T}{\tau}\right], \quad u_T = l_T + x l_T^{-1},$$

(процесс $Y(t)$ определен равенством (2.5)). Имеем:

$$\mathbf{P}(\xi_T(Y) < x) = \mathbf{P}(A_0) \prod_{k=1}^{N-1} \mathbf{P}(A_k \mid A_{k-1})\, \mathbf{P}(A_{N-1} \mid \max_{[N\tau,\, T]} |Y(t)| < u_T). \quad (2.14)$$

В силу следствия 2.2

$$\mathbf{P}(A_k \mid A_{k-1}) = \frac{1 - 2\tau\pi^{-1} \exp(-u_T^2/2) + \sqrt{2/\pi} \int_{u_T}^{\infty} \exp(-x^2/2)\, dx + O_{2\tau}(u_T)}{1 - \tau\pi^{-1} \exp(-u_T^2/2) + \sqrt{2/\pi} \int_{u_T}^{\infty} \exp(-x^2/2)\, dx + O_{\tau}(u_T)} =$$
$$= 1 - \tau\pi^{-1} \exp(-u_T^2/2) + O^1(u_T),$$

где

$$O^1(u_T) \leqslant O_\tau(u_T) + O_{2\tau}(u_T) + (2\tau\pi^{-1} \exp(-u_T^2/2) +$$
$$+ O_{2\tau}(u_T))(\tau\pi^{-1} \exp(-u_T^2/2) + O_\tau(u_T)) \leqslant$$
$$\leqslant C_2 \exp(-u_T^2/(1+\rho_1)), \qquad C_2 = 2C_3 + (C_3 + 2\tau\pi^{-1})^2.$$

Далее,

$$\prod_{k=1}^{N-1} \mathbf{P}(A_k \mid A_{k-1}) = \exp((N-1) \ln (1 - \tau\pi^{-1} \exp(-u_T^2/2) +$$
$$+ O^1(u_T))) = \exp(T\tau^{-1}(\tau\pi^{-1} \exp(-u_T^2/2)))\, e^{\delta(T)},$$

где

$$|\delta(T)| \leqslant \tau\pi^{-1} \exp(-u_T^2/2) + (N-1)(O^1(u_T) + 2(\tau\pi^{-1} \exp(-u_T^2/2) +$$
$$+ O^1(u_T))^2) \leqslant 2\pi\tau^{-1}(C_2 + 2(C_2 + \tau\pi^{-1})^2 + \tau\pi^{-1}) \exp(-u_T^2((1+\rho_1)^{-1} - 1/2)) u_T^2.$$

Два остальных сомножителя в правой части (2.7) вносят вклад лишь в коэффициент оценки остаточного члена, он увеличивается не более чем на $2(C_3 + 1)$.

Разложим теперь в ряд по l_T функцию

$$\exp(-T\pi^{-1} \exp(-u_T^2/2)) = \exp(-2e^{-x} \exp(-x^2/(2l_T^2))).$$

Пусть $-2e^{-x} \exp(-x^2/(2l_T^2)) = \Delta_T$. Разлагая по степеням l_T последовательно $\Delta_T, \frac{1}{2}\Delta_T^2, \frac{1}{3!}\Delta_T^3, \ldots$, суммируя и приводя затем подобные члены, получаем сумму двойной экспоненты $\exp(-2e^{-x})$ и ряда в правой части (2.12) с $\lambda_2 = 1$. Внутренний ряд в (2.12) сходится абсолютно и равномерно по x на любом отрезке $[-A, A]$, и следовательно, представляет собой непрерывную функцию. Переход к произвольному λ_2 сводится к замене времени $t \to \sqrt{\lambda_2} t$; в данном случае T меняется на $\sqrt{\lambda_2} T$.

Доказательство второго утверждения теоремы основано на элементарном оценивании снизу и сверху максимума функции

$$B(x) = \exp(\Delta_T) - \exp(-2e^{-x}) = \exp(-2e^{-x})(\exp(2e^{-x} + \Delta_T) - 1).$$

Утверждение теоремы следует теперь из следствия 2.1.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Stone C. J.* Consistent nonparametric regression.— Ann. Statist., 1977, v. 5, № 4 p. 595—645.
2. *Révész P.* Testing of density functions.— Periodica Math. Hungarica, 1971, v. 1, № 1, p. 35—44.

3. *Конаков В. Д.* Полные асимптотические разложения для максимального уклонения эмпирической функции плотности.— Теория вероятн. и ее примен., 1978, т. XXIII, в. 3, с. 495—509.
4. *Конаков В. Д.* Оценка скорости сходимости распределения максимума для одного класса гауссовских процессов.— Теория вероятн. и ее примен., 1979, т. XXIV, в. 1, с. 226—228.
5. *Питербарг В. И.* Асимптотические разложения вероятностей больших выбросов гауссовских процессов.— Докл. АН СССР, 1978, т. 242, № 6, с. 1248—1251.
6. *Bickel P., Rosenblatt M.* On some global measures of deviations of density functions estimates.— Ann. Statist., 1973, v. 1, № 6, p. 1071—1095.
7. *Pickands J.*, III. Maxima of stationary Gaussian processes.— Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb., 1967, B. 7, H. 3, S. 190—223.
8. *Цирельсон Б. С.* Плотность распределения максимума гауссовского процесса.— Теория вероятн. и ее примен., 1975, т. XX, в. 4, с. 865—873.
9. *Slepian D.* First passage time for a particular Gaussian stationary process.— Ann. Math. Statist., 1961, v. 32, № 2, p. 610—612.
10. *Fernique X.* Continuité des processus gaussiens.— C. R. Acad. Sci. Paris, 1964, v. 258A, p. 6058—6060.
11. *Боровков А. А.* Теория вероятностей. М.: Наука, 1976, 352 с.
12. *Крамер Г., Лидбеттер М.* Стационарные случайные процессы. М.: Мир, 1969, 398 с.
13. *Питербарг В. И.* Перемешивание квантованных гауссовских процессов.— В сб.: Исследования по случайным полям. М.: МГУ, 1974, с. 59—78.
14. *Питербарг В. И.* Сравнение функций распределения максимумов гауссовских процессов.— Теория вероятн. и ее примен., 1981, т. XXVI, в. 4, с. 702—719.

Поступила в редакцию
10.XI.1978

RATE OF CONVERGENCE OF MAXIMAL DEVIATION DISTRIBUTIONS FOR GAUSSIAN PROCESSES AND EMPIRICAL DENSITY FUNCTIONS. I

KONAKOV V. D., PITERBARG V. I. (*MOSCOW*)

(*Summary*)

The asymptotic expansions and rate of convergence of maximal deviation distributions for two wide classes of Gaussian stationary processes and Parzen—Rosenblatt empirical densities are obtained.