

которого он еще не выбирал, и подсмотреть у него цифры кода на любых N позициях (у разных клиентов он может выбирать разные позиции). Остап хочет узнать код миллионера Корейко. При каком наименьшем N он гарантированно сможет это сделать?

Г. Жуков

7 (8). В равностороннем треугольнике ABC провели высоту AN . В треугольнике ABN отметили точку пересечения биссектрис I . В каждом из треугольников ABI , BCI и CAI отметили по точке пересечения биссектрис – L , K и J соответственно. Найдите величину угла KJL .

К. Голубев

10–11 классы

1 (4). См. задачу 3 сложного варианта для 8–9 классов.

2 (5). См. задачу M22716 «Задачника «Кванта».

3 (6). Докажите, что для любого натурального n существуют такие целые числа a_1, a_2, \dots, a_n , что при всех целых x число

$$\left(\dots \left((x^2 + a_1)^2 + a_2 \right)^2 + \dots + a_{n-1} \right)^2 + a_n$$

делится на $2n - 1$.

А. Бердников

4 (6). Внутри каждой грани единичного куба выбрали по точке. Затем каждые две выбранные точки, лежащие на соседних гранях, соединили отрезком. Докажите, что сумма длин этих отрезков не меньше чем $6\sqrt{2}$.

В. Произолов

5 (8). Дан треугольник ABC и прямая l , касающаяся вписанной в него окружности. Обозначим через l_a, l_b, l_c прямые, симметричные l относительно биссектрис внешних углов треугольника. Докажите, что треугольник, образованный этими прямыми, равен треугольнику ABC .

А. Заславский

6. а) (3) См. задачу M2274а «Задачника «Кванта».

б) (6) См. задачу M2274б «Задачника «Кванта».

7. У Кости была кучка из 100 камешков. Каждым ходом он делил какую-то из кучек на две меньшие, пока у него не оказалось 100 кучек по одному камешку. Докажите, что

а) (6) в какой-то момент в каких-то 30 кучках было в сумме ровно 60 камешков;

б) (3) в какой-то момент в каких-то 20 кучках было в сумме ровно 60 камешков;

в) (3) Костя мог действовать так, чтобы ни в какой момент не нашлось 19 кучек, в которых в сумме ровно 60 камешков.

К. Кноп

УСТНЫЙ ТУР ДЛЯ 11 КЛАССА

1. См. задачу M2269а «Задачника «Кванта».

2. В цилиндрический колодец падает пучок параллельных лучей, причем ни одна точка дна не освещена. Докажите, что граница освещенной и неосвещенной областей колодца лежит в одной плоскости.

А. Бердников

3. В стране Флатландии двое близоруких полицейских ловят преступника. Все люди являются кругами диаметра 1 м на плоскости. Максимальная скорость полицейского равна 1 м/с, а преступник умеет двигаться со сколь угодно большой скоростью. Полицейский не видит преступника, пока не коснется его, а как только касается – сразу ловит. Преступник все видит. Дело происходит в круге диаметра D м, за который никто не может выйти. При каком наибольшем D полицейские могут действовать так, чтобы гарантированно поймать преступника?

В. Мокин

4. См. задачу M2273 «Задачника «Кванта».

5. Вписанная окружность касается сторон BC , CA , AB треугольника ABC в точках A_1 , B_1 , C_1 . Внеписанная окружность касается стороны BC и продолжений сторон CA , AB в точках A_2 , B_2 , C_2 . Через середины отрезков A_1B_1 , A_2B_2 провели прямую l_1 , а через середины отрезков A_1C_1 , A_2C_2 провели прямую l_2 . Докажите, что l_1 и l_2 пересекаются на высоте AN треугольника ABC .

А. Полянский

6. Даны квадратные трехчлены $f(x)$, $h(x)$ с единичными старшими коэффициентами и некоторый многочлен $g(x)$ ненулевой степени. Известно, что $f(g(h(x))) = h(g(f(x)))$ для всех x . Докажите, что если графики $f(x)$ и $h(x)$ имеют общую точку, то они совпадают.

Г. Жуков

*Публикацию подготовили
С. Дориченко, Л. Медников, А. Шаповалов*

LXXV Московская математическая олимпиада

6 класс

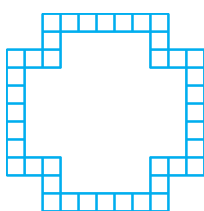


Рис. 1

1. Разрежьте рамку (рис. 1) на 16 равных частей.

А. Шаповалов

2, 3, 4. См. задачи 1, 3, 2 «Кванта» для младших школьников в «Кванте» №1.

5. Замените в равенстве ПИРОГ = КУСОК + КУСОК + КУСОК + ... + КУСОК одинаковые буквы одинако-

выми цифрами, а разные – разными так, чтобы равенство было верным, а количество «кусков пирога» было наибольшим из возможных.

И. Раскина

6. Известно, что Шакал всегда лжет, Лев говорит правду, Попугай просто повторяет последний услышанный ответ (а если его спросить первым, ответит как попало), а Жираф дает честный ответ, но на предыдущий заданный ему вопрос (а на первый вопрос отвечает как попало). Мудрый Ежик в тумане наткнулся на Шакала, Льва, Попугая и Жирафа и

решил выяснить, в каком порядке они стоят. Спросив всех по очереди «Ты Шакал?», он понял только лишь, где Жираф. Спросив всех в том же порядке: «Ты Жираф?», он смог еще понять, где Шакал, но полной ясности так и не наступило. И лишь после того как на вопрос «Ты Попугай?» первый ответил «Да», Ежу, наконец, стало ясно, в каком порядке стояли животные. Так в каком же?

А.Хачатурян

7 класс

1. Квадрат 3×3 заполнен цифрами так, как показано на рисунке 2 слева. Разрешается ходить по клеткам этого квадрата, переходя из клетки в соседнюю (по стороне), но ни

1	8	4
6	3	9
5	7	2

1	8	4
6	3	9
5	7	2

Рис. 2

рисуйте другой путь так, чтобы получилось число побольше (чем больше, тем лучше).

И.Яценко

2, 3. См. задачи 4, 2 «Кванта» для младших школьников» в «Кванте» №1.

4. На каждом из двух рукавов реки за километр до их слияния стоит по пристани, а еще одна пристань стоит в двух километрах после слияния (рис. 3). Лодка добралась от одной из пристаней до другой (неизвестно, какой) за 30 минут, от другой до третьей – за 18 минут. За сколько минут она может добраться от третьей пристани до первой? (Скорость течения реки постоянна и одинакова во всех ее частях. Собственная скорость лодки также постоянна.)

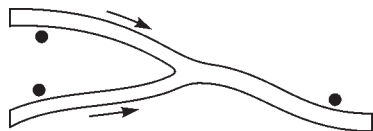


Рис. 3

В.Гуровиц

5. Вася написал верное утверждение: «В этой фразе $1/3$ всех цифр – цифры 3, а $1/2$ всех цифр – цифры 1».

А Коля написал фразу:

«В этой фразе $1/\dots$ всех цифр – цифры *, доли цифр * и * одинаковы и равны $1/\dots$, а доля всех остальных цифр составляет $1/\dots$ ».

Вставьте вместо звездочек три разные цифры, а вместо многоточий – три разных числа так, чтобы получилось верное утверждение.

А.Шаповалов

6. См. задачу 5 «Кванта» для младших школьников» в «Кванте» №1.

8 класс

1. На доске написаны четыре трехзначных числа, в сумме дающие 2012. Для записи их всех были использованы только две различные цифры. Приведите пример таких чисел.

А.Шаповалов

2. Кузнечик умеет прыгать только ровно на 50 сантиметров. Он хочет обойти 8 точек, отмеченных на рисунке 4 (сторона клетки равна 10 сантиметрам). Какое наименьшее количество прыжков ему придется сделать? (Разрешается посещать и другие точки плоскости, в том числе не узлы

сетки. Начинать и заканчивать можно в любых точках.)

Т.Голенищева-Кутузова

3. См. задачу M2271a «Задачника «Кванта».

4. В параллелограмме $ABCD$ опустили перпендикуляр BH на сторону AD . На отрезке BH отметили точку M , равноудаленную от точек C и D . Пусть точка K – середина стороны AB . Докажите, что угол MKD прямой.

Рис. 4

М.Волчкевич

5. Рациональные числа x , y и z таковы, что все числа $x + y^2 + z^2$, $x^2 + y + z^2$ и $x^2 + y^2 + z$ целые. Докажите, что число $2x$ целое.

И.Богданов

6. В клетках таблицы $m \times n$ расставлены числа. Оказалось, что в каждой клетке записано количество соседних с ней по стороне клеток, в которых стоит единица. При этом не все числа – нули. При каких числах m и n , больших 100, такое возможно?

И.Раскина

9 класс

1. В стране Далекой провинция называется *крупной*, если в ней живет более 7% жителей этой страны. Известно, что для каждой крупной провинции найдутся две провинции с меньшим населением такие, что их суммарное население больше, чем у этой крупной провинции. Какое наименьшее число провинций может быть в стране Далекой?

А.Петухов

2. См. задачу 1 сложного варианта для 8–9 классов весеннего тура XXXIII Турнира городов.

3. См. задачу 4 для 8 класса.

4. См. задачу 5 для 8 класса.

5. См. задачу 5 сложного варианта для 10–11 классов весеннего тура XXXIII Турнира городов.

6. а) В футбольном турнире участвовали 75 команд. Каждая команда играла с каждой один раз, за победу в матче команда получала 3 очка, за ничью 1 очко, за поражение 0 очков. Известно, что любые две команды набрали различное количество очков. Найдите наименьшую возможную разность очков у команд, занявших первое и последнее места.

б) Тот же вопрос для n команд.

А.Блинков

10 класс

1. Алеша написал на доске 5 целых чисел – коэффициенты и корни квадратного трехчлена. Боря стер одно из них. Остались числа 2, 3, 4, –5 в каком-то порядке. Восстановите стертое число и докажите, что было написано именно оно.

Б.Френкин

2. См. задачу M2270 «Задачника «Кванта».

3. Из плоскости вырезали равносторонний треугольник. Можно ли оставшуюся часть плоскости замостить треугольниками, любые два из которых подобны, но не гомотетичны?

А.Бердников

4. По кругу разложено четное количество груш. Массы любых двух соседних отличаются не более чем на 1 г. Докажите, что можно все груши объединить в пары и

разложить по кругу таким образом, чтобы массы любых двух соседних пар тоже отличались не более чем на 1 г.

А.Шаповалов

5. См. задачу M2272 «Задачника «Кванта».

6. Рассмотрим граф, у которого вершины соответствуют всевозможным трехэлементным подмножествам множества $\{1, 2, 3, \dots, 2^k\}$, а ребра проводятся между вершинами, которые соответствуют подмножествам, пересекающимся ровно по одному элементу. Найдите минимальное количество цветов, в которые можно раскрасить вершины графа так, чтобы любые две вершины, соединенные ребром, были разного цвета.

А.Райгородский

11 класс, первый день

1. См. задачу 1 для 10 класса.

2. Для заданных значений a, b, c и d оказалось, что графики функций $y = 2a + \frac{1}{x-b}$ и $y = 2c + \frac{1}{x-d}$ имеют ровно одну общую точку. Докажите, что графики функций $y = 2b + \frac{1}{x-a}$ и $y = 2d + \frac{1}{x-c}$ также имеют ровно одну общую точку.

О.Косухин

3. В треугольнике ABC высоты или их продолжения пересекаются в точке H , а R – радиус описанной около него окружности. Докажите, что если $\angle A \leq \angle B \leq \angle C$, то $AH + BH \geq 2R$.

В.Панферов, В.Ушаков

4. На собрание пришли n человек ($n > 1$). Оказалось, что у любых двух из них есть среди собравшихся ровно два других общих знакомых.

а) Докажите, что каждый из них знаком с одинаковым числом людей на этом собрании.

б) Покажите, что n может быть больше 4.

П.Сергеев

5. Для $n = 1, 2, 3$ будем называть числом n -го типа любое число, которое либо равно 0, либо входит в бесконечную геометрическую прогрессию $1, (n+2), (n+2)^2, \dots$, либо является суммой нескольких различных ее членов. Докажите, что любое натуральное число можно представить в виде суммы числа первого типа, числа второго типа и числа третьего типа.

О.Косухин

6. См. задачу M2274 «Задачника «Кванта».

11 класс, второй день

1. К каждому члену некоторой конечной последовательности подряд идущих натуральных чисел приписали справа по две цифры и получили последовательность квадратов подряд идущих натуральных чисел. Какое наибольшее число членов могла иметь эта последовательность?

А.Бегуниц

2. На плоской горизонтальной площадке стоят 5 прожекторов, каждый из которых испускает лазерный луч под одним из двух острых углов α или β к площадке и может вращаться лишь вокруг вертикальной оси, проходящей через вершину луча. Известно, что любые 4 из этих прожекторов можно повернуть так, что все 4 испускаемых ими луча пересекутся в одной точке. Обязательно ли можно так повернуть все 5 прожекторов, чтобы все 5 лучей пересеклись в одной точке?

О.Косухин

3. Учитель написал на доске в алфавитном порядке все возможные 2^n слов, состоящих из n букв А или Б. Затем он заменил каждое слово на произведение n множителей, исправив каждую букву А на x , а каждую букву Б – на $(1-x)$, и сложил между собой несколько первых из этих многочленов от x . Докажите, что полученный многочлен представляет собой либо постоянную, либо возрастающую на отрезке $[0; 1]$ функцию от x .

О.Косухин

4. После обеда на прозрачной квадратной скатерти остались темные пятна общей площади S . Оказалось, что если сложить скатерть пополам вдоль любой из двух линий, соединяющих середины противоположных ее сторон, или же вдоль одной из двух ее диагоналей, то общая видимая площадь пятен будет равна S_1 . Если же сложить скатерть пополам вдоль другой ее диагонали, то общая видимая площадь пятен останется равна S . Какое наименьшее значение может принимать величина $S_1 : S$?

О.Косухин

5. Обозначим через $S(n, k)$ количество не делящихся на k коэффициентов разложения многочлена $(x+1)^n$ по степеням x .

а) Найдите $S(2012, 3)$.

б) Докажите, что $S(2012^{2011}, 2011)$ делится на 2012.

В.Ушаков

Публикацию подготовил Б.Френкин

Избранные задачи Московской физической олимпиады

Первый теоретический тур

7 класс

1. Школьник Вася, стоя на эскалаторе, поднялся наверх за 1 мин. Его друг Петя, идя по эскалатору вверх, поднялся за 40 с. Сколько времени понадобится Пете, чтобы по тому же эскалатору спуститься вниз (против движения эскалатора), если он будет бежать со скоростью в три раза быстрее, чем идет?

Д.Паринов

2. На рисунке 1 изображен график зависимости скорости автомобиля v от пройденного им пути s . Какое расстояние проехал автомобиль за первые 2 минуты своего движения?

О.Шведов

3. Школьницы Ирина, Карина и Марина бегают по кругу в одном направлении с по-

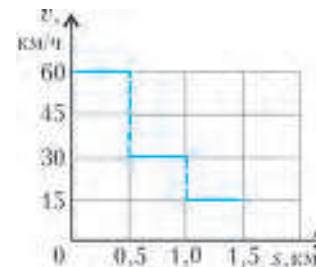


Рис. 1