Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

Б. Касимов, О полиномиальных приближениях функций класса Зигмунда в метрике Хаусдорфа,
Матем. заметки, 1980, том 28, выпуск 3, 335–342

https://www.mathnet.ru/mzm6427

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.9.173
20 января 2026 г., 22:33:30

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 28, № 3 (1980)

О ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ ФУНКЦИЙ КЛАССА ЗИГМУНДА В МЕТРИКЕ ХАУСДОРФА

Б. Касимов

Известно, что для любой 2π-периодической функции f справедливо соотношение (см. [1], [2])

$$HE_n(f) \leqslant E_n(f) \leqslant$$
$$\leqslant HE_n(f) \exp\{\lambda(HE_0(f) + HE_1(f) + \ldots + HE_{n-1}(f))\}, \tag{1}$$

$n = 1, 2, \ldots$, где $E_n(f)$ и $HE_n(f)$ — наименьшие уклонения функций f от тригонометрических полиномов порядка не выше n в равномерной и хаусдорфовой метриках соответственно, а λ — абсолютная постоянная $0 < \lambda \leqslant 3 + 2\sqrt{2}$ (в [1] $\lambda = 6$). Если же 2π-периодическая функция f удовлетворяет условию Липшица $\mathrm{Lip}_c 1$, то [3]

$$HE_n(f) \leqslant E_n(f) \leqslant (c+1)\ HE_n(f), \quad n = 0, 1, \ldots,$$

т. е. $E_n(f)$ и $HE_n(f)$ имеют один и тот же порядок малости. Поскольку при этом $E_n(f) = O(n^{-1})$ (так как $f \in \mathrm{Lip}\,1$), а характеристическим свойством функций с $E_n(f) = O(n^{-1})$ является ее принадлежность классу Зигмунда (т. е. выполнение условия

$$\omega_2(f, \delta) = \max_{|h| \leqslant \delta} \{ \max_{-\infty < x < \infty} \{ |f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)| \} \} = O(\delta)),$$

то естественно спросить, не будет ли справедливо соот-

© Издательство «Наука».
Главная редакция
физико-математической литературы.
«Математические заметки», 1980

ношение $E_n(f) = O(HE_n(f))$ для всех функций класса Зигмунда? Следующее утверждение дает отрицательный ответ на этот вопрос.

ТЕОРЕМА. *Существует 2π-периодическая функция $g(x)$ из класса Зигмунда, для которой $c \cdot n^{-1} \leqslant E_n(g) < n^{-1}$ ($c = \mathrm{const} > 0$, $n = 1, 2, \ldots$) в то время как $HE_n(g) = O((n \ln n)^{-1})$, точнее,*

$$HE_n(g) \leqslant \{n \ln n (1 - \ln(2\ln n) / \ln n)\}^{-1}, \quad n \geqslant 25.$$

Доказательство. Рассмотрим непрерывную 2π-периодическую функцию

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (\sin kx)/k^2. \tag{2}$$

Известно [4], что

$$E_n(g) < n^{-1}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

1. Оценим снизу $\omega_2(g, \delta)$. Пусть $0 < h < 1$, $m = [\pi/2h]$, $n = [\pi/h]$ ($[b]$ — целая часть числа b). Имеем

$$\omega_2(g, h) \geqslant |g(2h) + g(0) - 2g(h)| \geqslant \sigma_1 + \sigma_2 + |\sigma_3|, \tag{4}$$

где

$$\sigma_1 = 4 \sum_{k=1}^{m} \frac{\sin kh \cdot \sin^2(kh/2)}{k^2},$$

$$\sigma_2 = 4 \sum_{k=m+1}^{n} \frac{\sin kh \cdot \sin^2(kh/2)}{k^2},$$

$$\sigma_3 = 2 \sum_{k=n+1}^{\infty} (\sin kh)/k^2 - \sum_{k=n+1}^{\infty} (\sin 2kh)/k^2.$$

Ввиду очевидных неравенств

$$\sin t \geqslant 2t/\pi \qquad (0 \leqslant t \leqslant \pi/2),$$
$$\sin t \geqslant 4t/\sqrt{2}\pi \qquad (0 \leqslant t \leqslant \pi/4)$$

получаем, что

$$\sigma_1 \geqslant 4 \sum_{k=1}^{m} \frac{(2kh/\pi)(4kh/2\sqrt{2}\pi)^2}{k^2} = 8h^3 m(m+1)/\pi^3 \geqslant$$
$$\geqslant 2h(1 - 2h/\pi)/\pi, \tag{5}$$

$$\sigma_2 \geqslant 4 \sum_{k=m+1}^{n} ((kh/\pi)^2 \sin kh)/k^2 =$$
$$= 4 (h/\pi)^2 \sum_{k=m+1}^{n} \sin (\pi - kh) \geqslant$$
$$\geqslant 4 (h/\pi)^2 \sum_{k=m+1}^{n} 2 (\pi - kh)/\pi =$$
$$= 8 (h/\pi)^2 (n - m) \{1 - h (n + m + 1)/2\pi\} \geqslant$$
$$\geqslant h (1 - 2h/\pi)^2/\pi. \qquad (6)$$

Так как

$$\left|\sum_{k=m}^{n} \sin kx\right|, \left|\sum_{k=m}^{n} \cos kx\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left|\sum_{km}^{n} e^{ikx}\right| = |e^{imx} - e^{i(n+1)x}| / |1 - e^{ix}| \leqslant$$
$$\leqslant 2/|2 \sin x/2| = 1/|\sin x/2| \qquad (7)$$

при всех $n > m$, то

$$|\sigma_3| \leqslant 2 \ (n + 1)^{-2} (\sin (h/2))^{-1} + (n + 1)^{-2} (\sin h)^{-1} \leqslant$$
$$\leqslant 2 (\pi/h)^{-2} (h/\pi)^{-1} + (\pi/h)^{-2} (2h/\pi)^{-1} = 5h/2\pi. \qquad (8)$$

Согласно (4) — (6) и (8) при $h \leqslant \pi/32$ выполняется неравенство $w_2 (g, h) \geqslant h/4\pi$.

С другой стороны, так как $E_n (g) < n^{-1}$, то по теореме Зигмунда [4] $w_2 (g, h) \leqslant c_2 h$. Итак, $c_1 h \leqslant w_2 (g, h) \leqslant c_2 h$ ($c_1, c_2 = \text{const} > 0$). Отсюда в силу эквивалентности при $0 < \alpha < 2$ соотношений $c_1 \delta^\alpha \leqslant w_2 (f, \delta) \leqslant c_2 \delta^\alpha$ и $A_1 n^{-\alpha} \leqslant E_n (f) \leqslant A_2 n^{-\alpha}$ ($A_1, A_2 = \text{const} > 0$) (см. [5]) получаем, что $E_n (g) \geqslant cn^{-1}$ ($c = \text{const} > 0$, $n = 1, 2 \ldots$).

2. Оценим сверху $HE_n (g)$. В качестве приближающего полинома возьмем n-ю частичную сумму $S_n (x)$ ряда (2). Для каждого $n = 2, 3, \ldots$ разделим отрезок $[0, 2\pi]$ точками $\beta_n = 2 \ln n/n$ и $\gamma_n = 2\pi - \beta_n$ на три части. По признаку Абеля и из (7) при $\beta_n \leqslant x \leqslant \gamma_n$ имеем

$$|g (x) - S_n (x)| \leqslant (n + 1)^{-2} |\sin (x/2)|^{-1} \leqslant$$
$$\leqslant (n + 1)^{-2} \cdot (\sin (\ln n/n))^{-1} \leqslant$$
$$\leqslant (n + 1)^{-2} (\ln n/n - \ln^3 n / (6n^3))^{-1} < (n \ln n)^{-1}$$
$$(\beta_n \leqslant x \leqslant \gamma_n, \quad n = 2, 3, \ldots). \qquad (9)$$

Оценим хаусдорфово расстояние между $g (x)$ и $S_n (x)$ на

отрезке $[0, \beta_n]$. В силу того, что

$$g(x) = -g(2\pi - x)$$

и

$$S_n(x) = -S_n(2\pi - x).$$

Эти оценки будут справедливы и на отрезке $[\gamma_n, 2\pi]$. Производная

$$g'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (\cos kx)/k = -\ln|2\sin(x/2)|$$

монотонно убывает на $[0, \pi/3]$ от $+\infty$ до 0, так что $g(x)$ выпукла вверх на этом отрезке. При $0 \leqslant x \leqslant \beta_n$ имеем

$$g'(x) \geqslant -\ln(2\sin(\ln n)/n) \geqslant (1 - \ln(2\ln n)/\ln n)\ln n. \tag{10}$$

Отсюда, снова используя признак Абеля и (7), получаем при $\pi/n \leqslant x \leqslant \beta_n$, что

$$\begin{aligned} S_n'(x) &\geqslant g'(x) - \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} (\cos kx)/k\right| \geqslant \\ &\geqslant g'(x) - (n+1)^{-1}(\sin(x/2))^{-1} \geqslant \\ &\geqslant (1 - \ln(2\ln n)/\ln n)\ln n - 1 > 0, \quad n > e^{\pi}. \end{aligned} \tag{11}$$

Кроме того, при $0 \leqslant x \leqslant \pi n^{-1}$, очевидно, имеем

$$\begin{aligned} S_n'(x) = S_n'(0) + S_n''(\theta_x)\ x &\geqslant \ln n - n\cdot\pi n^{-1} > 0, \\ 0 < \theta_x < x, &\quad n > e^{\pi}. \end{aligned} \tag{11'}$$

Определим многозначные функции $u_n(x)$ и $v_n(x)$ с непрерывными графиками, положим: 1) $u_n(x) = 0$ при $x = 0$ и $x = 2\pi$, $u_n(x) = g(x) + n^{-1}$ при $x \in (0, \beta_n) \cup (\gamma_n, 2\pi)$, $u_n(x) = g(x) + (n\ln n)^{-1}$ при $x \in [\beta_n, \gamma_n]$; 2) $v_n(x) = 0$ при $x = 0$ и $x = 2\pi$, $v_n(x) = g(x) - n^{-1}$ при $x \in (0, \beta_n) \cup (\gamma_n, 2\pi)$, $v_n(x) = g(x) - (n\ln n)^{-1}$ при $x \in [\beta_n, \gamma_n]$ и считая, что каждая из этих функций в каждой из своих точек неоднозначности ($x = 0, \beta_n, \gamma_n, 2\pi$) принимает каждое из значений, заключенное между ее наибольшим и наименьшим значениями в этой точке.

Обозначим через $(\xi_1, u_n(\xi_1))$, $(\xi_2, v_n(\xi_2))$, $(\beta, v_n(\beta))$ соответственно самые левые над отрезком $[0, 2\pi]$ точки

пересечения горизонтали $y = g(\xi)$ с графиком функции $u_n(x)$, горизонтали $y = g(\xi)$ — с графиком функции $v_n(x)$ (для $0 \leqslant \xi \leqslant \beta_n$), и горизонтали $y = g(\beta_n)$ — с графиками функции $v_n(x)$. По построению $\xi_1 \in [0, \xi]$, $\xi_2 \in (\xi, \beta]$, $\beta \in (\beta_n, \pi/3)$. Поскольку при $0 < x < \beta_n$ и $\beta_n < x < \beta$ функции $u_n'(x) = g'(x) = v_n'(x)$ убывают, то из (10) имеем

$$\frac{1}{n(\xi - \xi_1)} = \frac{u_n(\xi) - u_n(\xi_1)}{\xi - \xi_1} > g'(\beta_n) \geqslant$$
$$\geqslant \ln n\,(1 - \ln(2\ln n)/\ln n).$$

Откуда

$$0 \leqslant \xi - \xi_1 < (n \ln n)^{-1}(1 - \ln(2\ln n)/\ln n)^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon_n$$
$$(0 \leqslant \xi \leqslant \beta_n). \qquad (12)$$

Аналогично в случае $\xi_2 \in (\xi, \beta_n]$ имеем

$$0 < \xi_2 - \xi < \varepsilon_n. \qquad (13)$$

Приступая к оценке $\xi_2 - \xi$ для $\xi_2 > \beta_n$, напомним, что $\xi_2 \in (\xi_1, \beta]$. Из выпуклости и возрастания функции $g(x)$ на отрезке $[0, \beta]$ и из равенства

$$g(\beta_n) - g(\xi) = v_n(\beta) - v_n(\xi_2) =$$
$$= (g(\beta) - (n \ln n)^{-1}) - (g(\xi_2) - (n \ln)^{-1}) = g(\beta) - g(\xi_2)$$

следует, что

$$\beta_n - \xi \leqslant \beta - \xi_2,$$

откуда

$$\xi_2 - \xi \leqslant \beta - \beta_n.$$

Покажем, что $\beta \in [\beta_n, \beta_n + (n \ln n)^{-1}]$. Отсюда будет следовать неравенство $\xi_2 - \xi \leqslant (n \ln n)^{-1}$ при $\xi_2 \in (\beta_n, \beta]$. Чтобы это показать, достаточно, ввиду возрастания $v_n(x)$ на $[\beta_n, \beta]$, установить неравенство

$$v_n(\beta_n + (n \ln n)^{-1}) \geqslant v_n(\beta) = g(\beta_n),$$

т. е. что

$$g(\beta_n + (n \ln n)^{-1}) - g(\beta_n) \geqslant (n \ln n)^{-1}.$$

При $n \geqslant 16$ это неравенство следует из того, что для

$x \in [\beta_n, \beta_n + (n \ln n)^{-1}]$ справедлива оценка

$$g'(x) = -\ln |2 \sin (x/2)| \geqslant$$
$$\geqslant -\ln |2 \sin (1/2) (\beta_n + (n \ln n)^{-1})| =$$
$$= -\ln (2 \sin (\ln n/n + 1/(2n \ln n)) >$$
$$> -\ln (2 \ln n/n + 1/(n \ln n)) > 1, \quad n \geqslant 16.$$

Итак, доказано, что $\beta \in [\beta_n, \beta_n + (n \ln n)^{-1}]$ и $0 < \xi_2 - \xi \leqslant (n \ln n)^{-1}$ в случае $\xi_2 \in (\beta_n, \beta]$. Сравнив с (13),видим, что $0 < \xi_2 - \xi < \varepsilon_n$.

В силу определения $u_n(x)$, $v_n(x)$ и неравенств (3), (9) график функции $S_n(x)$ лежит между графиками функций $u_n(x)$ и $v_n(x)$. Поэтому, ввиду определения точек ξ_1 и ξ_2 горизонталь $y = g(\xi)$, $\xi \in [0, \beta_n]$ пересечет график функции $y = S_n(x)$ в точке $(t, S_n(t)) = (t, g(\xi))$, где $\xi_1 \leqslant t \leqslant \xi_2$. Поскольку $\xi_1 \leqslant \xi \leqslant \xi_2$, то точка $(\xi, g(\xi))$ находится в хаусдорфовой окрестности точки $(t, S_n(t))$ радиуса $\max \{ |\xi_1 - \xi|, |\xi_2 - \xi| \} < \varepsilon_n$ какова бы ни была точка $\xi \in [0, \beta_n]$ (см. (12) и (14)). По сказанному в начале п. 3 это верно и для любой точки $\xi \in [\gamma_n, 2\pi]$, а ввиду неравенства (9) и для любого $\xi \in [\beta_n, \gamma_n]$.

Подводя итог, мы можем сказать, что при $n \geqslant 25$ график функции $g(x)$ на отрезке $[0, 2\pi]$ находится в хаусдорфовой ε_n-окрестности графика функции $S_n(x)$.

Докажем теперь, что хаусдорфова ε_n-окрестность графика функции $g(x)$ на отрезке $[0, 2\pi]$ содержит график функции $S_n(x)$ на этом же отрезке. Прежде всего напомним, что при $n > e^{\pi}$ на отрезке $[0, \beta_n]$ функции $g(x)$ и $S_n(x)$ являются строго возрастающими (см. (10), (11) и (11')). Обозначим через t_n точку t, построенную по точке $\xi = \beta_n$ как и выше. Тогда если $t \in [0, t_n]$, то по доказанному найдется $\xi \in [0, \beta_n]$ такое, что хаусдорфово расстояние между точками

$$(t, S_n(t)) = (t, g(\xi)) \text{ и } (\xi, g(\xi))$$

меньше ε_n. Если же $t_n < \beta_n$ и $t \in [t_n, \beta_n]$, то $|t - \beta_n| \leqslant \beta_n - t_n < \varepsilon_n$ и в то же время $g(\beta_n) \leqslant S_n(t) \leqslant S_n(\beta_n) \leqslant g(\beta_n) + (n \ln n)^{-1}$ (см. (9)). Таким образом, при $t_n \leqslant t \leqslant \beta_n$ точка $(t, S_n(t))$ находится в ε_n-окрестности точки $(\beta_n, g(\beta_n))$. Если $t \in [\beta_n, \gamma_n]$, то точка $(t, S_n(t))$ находится в ε_n-окрестности точки $(t, g(t))$ в силу (9). Ситуация при $t \in [\gamma_n, 2\pi]$, по сказанному в начале п. 2, является такой же, как при $t \in [0, \beta_n]$. Итак, график функции $S_n(x)$

($x \in [0, 2\pi]$) находится в хаусдорфовой ε_n-окрестности графика функции $g(x)$ ($x \in [0, 2\pi]$).

Мы доказали, что графики функций $g(x)$ и $S_n(x)$ находятся в хаусдорфовой ε_n-окрестности друг друга. Ввиду их 2π-периодичности это выполняется на всей числовой оси. Теорема доказана полностью.

Следствие. *Постоянная λ в неравенстве* (1) *не может быть менее единицы*: $1 \leqslant \lambda \leqslant 3 + 2\sqrt{2}$.

Доказательство. По доказанной теореме для любого $\varepsilon > 0$ при $n > n(\varepsilon)$ получаем:

$$HE_n(g) < (1 + \varepsilon)/(n \ln n).$$

Поскольку существует такое $A = \text{const} > 0$, что $HE_0(g) \leqslant A$, $HE_1(g) \leqslant A$, $HE_n(g) \leqslant A/n \ln n$ при $n \geqslant 2$, то отсюда и из (1) имеем:

$$\frac{c}{n} \leqslant E_n(g) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1+\varepsilon}{n \ln n} \exp\left\{\lambda\left(A + A + \frac{A}{2\ln 2} + \ldots + \frac{A}{n(\varepsilon)\ln n(\varepsilon)} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{1+\varepsilon}{(n(\varepsilon)+1)\ln(n(\varepsilon)+1)} + \ldots + \frac{1+\varepsilon}{(n-1)\ln(n-1)}\right)\right\} \leqslant$$
$$\leqslant c(\varepsilon) \frac{\exp\{\lambda(1+\varepsilon)\ln\ln n\}}{n \ln n} = c(\varepsilon) \frac{(\ln n)^{\lambda(1+\varepsilon)}}{n},$$

где $c(\varepsilon)$ не зависит от $n > n(\varepsilon)$. Если $\lambda < 1$, то, выбирая $\varepsilon > 0$, из условия $\lambda(1 + \varepsilon) - 1 < 0$ при $n \to \infty$ получим противоречивое соотношение $n^{-1} \leqslant o(n^{-1})$. Итак $\lambda \geqslant 1$.

Замечание. Доказанная теорема распространяется и на наименьшие уклонения $H_\alpha E_n(g)$ функции g от тригонометрических полиномов порядка не выше n в α-метрике Хаусдорфа ($\alpha > 0$)

$$H_\alpha E_n(g) \leqslant (\alpha n \ln n)^{-1}(1 - \ln(2\ln n)/\ln n)^{-1}, \qquad n \geqslant n(\alpha).$$

Отсюда получим, что в неравенстве

$$H_\alpha E_n(f) \leqslant E_n(f) \leqslant H_\alpha E_n(f) \exp\{\lambda\alpha(H_\alpha E_0(f) + H_\alpha E_1(f) + \ldots + H_\alpha E_{n-1}(f))\} \qquad (\lambda = \text{const} \leqslant 3 + 2\sqrt{2})$$

(см. [1], [2]) постоянная λ не может быть менее единицы.

Автор благодарит Е. П. Долженко за руководство работой.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
13.X.1977

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Долженко Е. П., Севастьянов Е. А., О приближениях функций в хаусдорфовой метрике, Докл. АН СССР, **226**, № 4 (1976), 768—700.

[2] Долженко Е. П., Севастьянов Е. А., О зависимости свойств функций от скорости их приближения полиномами, Изв. АН СССР, Сер. матем., **42**, № 2 (1978), 270—304.

[3] Сендов Б., Некоторые вопросы теории приближений функций и множеств в хаусдорфовой метрике, Успехи матем. наук, **24**, № 5 (1969), 141—178.

[4] Натансон Н. П., Конструктивная теория функций, М.— Л., Гостехиздат, 1949.

[5] Стечкин С. Б., О порядке наилучших приближений непрерывных функций, Изв. АН СССР, Сер. матем., **15**, № 2 (1951), 219—242.