Е. Г. Емельянов, Конформно-инвариантные функционалы на римановой сфере, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 2001, том 276, 134–154

Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 276, 2001 г.

Е. Г. Емельянов

КОНФОРМНО-ИНВАРИАНТНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ НА РИМАНОВОЙ СФЕРЕ

Введение

1. Под задачей об экстремальном разбиении (ЭР) римановой поверхности $\mathfrak{R}$ мы понимаем общую задачу, сформулированную в [1]. В настоящей работе мы имеем дело с частным случаем задачи в [1] при $\mathfrak{R} = \overline{\mathbb{C}}$ (см., например, [2]). В дальнейшем используется терминология в [1, 2]. Приведем необходимые определения.

Пусть $P = \{w_1, \ldots, w_n\}$ – система отмеченных точек на $\overline{\mathbb{C}}$, и пусть $\overline{\mathbb{C}}' = \overline{\mathbb{C}} \setminus P$. Пусть $\mathcal{D}$ – семейство всех систем $\mathbb{D} = \{D_1, \ldots, D_{n_1}, D_1^{(1)}, \ldots, D_{n_2}^{(1)}\}$ неналегающих областей, где D_j – односвязная область на $\overline{\mathbb{C}}' \cup \{w_j\}$, $w_j \in D_j$, $j = \overline{1, n_1}$, $(n_1 \leqslant n)$, $D_k^{(1)}$ – двусвязная область на $\overline{\mathbb{C}}'$, $k = \overline{1, n_2}$. Предполагается, что семейство $\mathcal{D}$ ассоциировано с заданным семейством $\mathcal{H} = \{H_1, \ldots, H_{n_1}, H_1^{(1)}, \ldots, H_{n_2}^{(1)}\}$ гомотопических классов замкнутых жордановых кривых на $\overline{\mathbb{C}}'$. Пусть $\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{n_1}\}$ и $\mathbf{l} = \{l_1, \ldots, l_{n_2}\}$ – заданные системы положительных чисел. Рассматривается задача нахождения системы областей $\mathbb{D}^* = \{D_1^*, \ldots, D_{n_1}^*, D_1^{(1)*}, \ldots, D_{n_2}^{(1)*}\}$, реализующей максимум функционала

$$\Phi(\mathbb{D}) = \sum_{j=1}^{n_1} \alpha_1^2 M(D_j, w_j) + \sum_{k=1}^{n_2} l_k^2 M(D_k^{(1)}) \tag{1}$$

в семействе $\mathcal{D}$. Здесь $M(D_j, w_j)$ – приведенный модуль области D_j относительно точки w_j, $M(D_k^{(1)})$ – модуль области $D_k^{(1)}$ относительно семейства кривых, разделяющих ее граничные компоненты.

Известно [1, 2], что экстремальная система $\mathbb{D}^*$ существует, единственна и существует единственный квадратичный дифференциал (к.д.) $Q(w)dw^2$ – ассоциированный к.д. данной задачи,

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 00-01-00118.

обладающий тем свойством, что объединение замыканий его критических траекторий разбивает $\overline{\mathbb{C}}$ на области, образующие систему $\mathbb{D}^*$. При этом

$$Q(w)dw^2 = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{A_j}{(w-w_j)^2} + \frac{\lambda_j}{w-w_j} \right) dw^2, \tag{2}$$

где $A_j = -\frac{\alpha_j^2}{4\pi^2}$, если $j \leqslant n_1$, и $A_j = 0$ в противном случае.

Положим

$$\mathcal{M}(P) = \Phi(\mathbb{D}^*),$$

считая, что системы параметров $\boldsymbol{\alpha}$ и $\mathbf{l}$ фиксированы, а при гомеоморфизме $\tau : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ семейству $\mathcal{H}$ гомотопических классов кривых на $\overline{\mathbb{C}} \setminus P$ соответствует семейство классов кривых на $\overline{\mathbb{C}} \setminus \tau(P)$, являющихся τ-образами кривых из $\mathcal{H}$. В настоящей работе рассматривается функционал

$$J(P) = \mathcal{M}(P) + \frac{1}{4\pi} \sum_{\substack{j,k, \\ j \neq k}} \mu_{k,j} \log |w_k - w_j|^2, \quad \mu_{k,j} = \mu_{j,k}, \tag{3}$$

где $\mu_{k,j}$ – некоторые вещественные числа.

Известно (см. [2]), что для $\tau \in \mathrm{M\ddot{o}b}\,(\overline{\mathbb{C}})$

$$\mathcal{M}(\tau(P)) = \mathcal{M}(P) - 2\pi \sum_{j=1}^{n} A_j \log |\tau'(w_j)|. \tag{4}$$

Поскольку $\log(\tau(u) - \tau(v))^2 = \log(u-v)^2 + \log(\tau'(u)\tau'(v))$, то

$$J(\tau(P)) = J(P) + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k,k\neq j} \mu_{k,j} - 4\pi^2 A_j \right) \log |\tau'(w_j)|. \tag{5}$$

Из (5) следует, что достаточными для конформной инвариантности функционала $J(P)$ (здесь и ниже под этим понимается инвариантность данного функционала относительно дробно-линейных преобразований $\overline{\mathbb{C}}$) является условие

$$\sum_{k,k\neq j} \mu_{k,j} = 4\pi^2 A_j = -\alpha_j^2, \quad j = \overline{1,n}, \tag{6}$$

где полагаем $\alpha_j = 0$ для $n_1 < j \leqslant n$. В дальнейшем мы будем считать условие (6) выполненным.

В §1 данной работы рассмотрен вопрос об ограниченности сверху функционала $J(P)$. В этом случае имеет смысл задача

$$J(P) \underset{P}{\longrightarrow} \max, \tag{7}$$

существует экстремальная система точек $P^* = \{w_1^*, \dots, w_n^*\}$, определяемая с точностью до дробно-линейного отображения, и ассоциированный к.д. $Q_P(w)dw^2$.

Предложение 1. *Пусть $P^* = \{w_1^*, \dots, w_n^*\}$ – экстремальная система точек указанной задачи (см. (7)). Тогда для к.д. $Q_{P^*}(w)dw^2$ имеет место выражение*

$$Q_{P^*}(w)dw^2 = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{\substack{k,j=1,\\ k<j}}^{n} \mu_{k,j} \left(\frac{1}{w - w_k^*} - \frac{1}{w - w_j^*} \right)^2. \tag{8}$$

Если $P^* = \{w_1^*, \dots, w_n^*, \infty\}$, то

$$Q_{P^*}(w)dw^2 =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \left(\sum_{\substack{k,j=1,\\ k<j}}^{n} \mu_{k,j} \left(\frac{1}{w - w_k^*} - \frac{1}{w - w_j^*} \right)^2 + \sum_{j=1}^{n} \mu_{j,n+1} \frac{1}{(w - w_j)^2} \right) dw^2. \tag{8$'$}$$

Доказательство. Пусть $w_j^* \in \mathbb{C}$, $j = \overline{1,n}$. Для функционала $\mathcal{M}(P)$ известна формула дифференцирования (см. [3, 1]):

$$\frac{\partial}{\partial w_k} \mathcal{M}(P) = \pi \lambda_k, \tag{9}$$

где величина λ_k определена в (2). Поэтому необходимое условие экстремальности: $\frac{\partial}{\partial w_k} J(P) = 0$, $k = \overline{1,n}$, выражается равенствами

$$\sum_{\substack{j=1,\\ j\neq k}}^{n} \frac{\mu_{j,k}}{w_k^* - w_j^*} = -2\pi^2 \lambda_k, \quad k = \overline{1,n}. \tag{10}$$

Подставляя λ_k из (10) в (2) и учитывая условие (6), получаем (8). Выражение (8$'$) следует из (8) ввиду конформной инвариантности функционала $J(P)$.

2. Как обычно, через $\sum$ обозначаем класс всех мероморфных и однолистных в области $\Delta = \{z : |z| > 1\}$ функций F с разложением

$$F(z) = z + c_0 + \sum_{k\geqslant 1} \frac{c_k}{z^k},$$

через Σ_0 – подкласс функций $F \in \Sigma$, у которых $c_0 = 0$. Пусть $F^* \in \Sigma$, $Q(w)dw^2$ – к.д. на $\overline{\mathbb{C}}$. Мы будем говорить, что функция F^* согласована с к.д. $Q(w)dw^2$ ($F^* \prec Qdw^2$), если $Q \circ F^*(F^{*\prime})^2 dz^2$ – положительный к.д. на Δ, т.е.

$$Q \circ F^*(z)(F^{*\prime}(z))^2 z^2 \leqslant 0 \quad \text{при} \quad |z| = 1.$$

Предложение 2. *Пусть $J(P)$ конформно-инвариантный функционал вида* (3), *$P^* = \{w_1^*, \dots, w_n^*, \infty\}$ – экстремальная система точек, $Q_{P^*}(w)dw^2$ – ассоциированный к.д., $F^* \in \Sigma$, $F^* \prec Q_{P^*}dw^2$, $F^*(z_j) = w_j^*$ при $j = \overline{1, n}$, $P_z = \{z_1, \dots, z_n, \infty\}$. Тогда для любой функции $F \in \Sigma$ выполняется неравенство*

$$\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k^2 \log|F'(z_k)| + \sum_{\substack{j,k=1,\\ j\neq k}}^n \mu_{j,k} \log\left|\frac{F(z_k) - F(z_j)}{z_k - z_j}\right|\right) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k^2 \log|F^{*\prime}(z_k)| + \sum_{\substack{j,k=1,\\ j\neq k}}^n \mu_{j,k} \log\left|\frac{w_k^* - w_j^*}{z_k - z_j}\right|\right). \tag{11}$$

Равенство в (11) *возможно лишь в случае $F \prec Q_{P^*}dw^2$.*

Доказательство. Поскольку к.д. $Q_{P^*}(w)dw^2$ ассоциирован с задачей об ЭР w-сферы и $F^* \prec Q_{P^*}dw^2$, то к.д. $\Omega(z)dz^2 = Q_{P^*} \circ F^*(z) \cdot {F^{*\prime}}^2(z)dz^2$ ассоциирован с соответствующей задачей об ЭР области Δ, и между экстремальными значениями $\mathcal{M}^w(P^*)$ и $\mathcal{M}^z(P_z)$ функционалов этих задач имеется соотношение

$$\mathcal{M}^w(P^*) = \mathcal{M}^z(P_z) + \sum_{j=1}^n \frac{\alpha_j^2}{2\pi} \log|F^{*\prime}(z_k)|. \tag{12}$$

С другой стороны, для любой функции $F \in \Sigma$ F-образы областей экстремального разбиения области Δ образуют систему областей, допустимую в задаче ЭР w-сферы для системы точек $F(P_z)$, откуда следует неравенство

$$\mathcal{M}^z(P_z)+\sum_{j=1}^{n}\frac{\alpha_j^2}{2\pi}\log|F'(z_j)|\leqslant \mathcal{M}^w(F(P_z)). \tag{13}$$

Кроме того, благодаря экстремальности системы точек P^* имеем

$$J(F(P_z))\leqslant J(P^*). \tag{14}$$

Из условий (12)–(14) следует неравенство (11).

3. Для $p\geqslant 0$ введем векторы

$$Y^p=\left(\frac{1}{w_1^{*p+1}},\dots,\frac{1}{w_n^{*p+1}}\right),\quad X^p=\left(\frac{1}{z_1^p},\dots,\frac{1}{z_n^p}\right),$$

$$Y(w)=\left(\frac{1}{w_1^*-w},\dots,\frac{1}{w_n^*-w}\right)$$

и симметричную $n\times n$ матрицу

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_1^2 & \mu_{1,2} & \dots & \mu_{1,n}\\ \mu_{2,1} & \alpha_2^2 & \dots & \mu_{2,n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \mu_{n,1} & \mu_{n,2} & \dots & \alpha_n^2\end{pmatrix}.$$

Через $\langle U,V\rangle$ будем обозначать скалярное произвздение комплексных векторов $U=(u_1,\dots,u_n)$ и $V=(v_1,\dots,v_n)$:

$$\langle U,V\rangle=u_1\overline{v}_1+\dots+u_n\overline{v}_n.$$

Как нетрудно убедиться, имеют место равенства

$$4\pi^2 Q_{P^*}(w)=-\langle AY(w),\overline{Y(w)}\rangle, \tag{15}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2\log F'(z_k)+\sum_{\substack{j,k=1,\\ j\neq k}}^{n}\mu_{k,j}\log\frac{F(z_k)-F(z_j)}{z_k-z_j}=$$

$$=\sum_{p,q\geqslant 1}\langle AX^p,\overline{X^q}\rangle\gamma_{p,q}, \tag{16}$$

где $\gamma_{p,q}$ – коэффициенты Грунского функции $F\in\Sigma$, определяемые разложением

$$\log\frac{F(z)-F(\zeta)}{z-\zeta}=\sum_{p,q\geqslant 1}\gamma_{p,q}\frac{1}{z^p}\frac{1}{\zeta^q}.$$

Неравенство (11) в этих обозначениях принимает вид

$$\operatorname{Re} \sum_{p,q\geqslant 1} \langle AX^p, \overline{X^q}\rangle \gamma_{p,q} \leqslant \operatorname{Re} \sum_{p,q\geqslant 1} \langle AX^p, \overline{X^q}\rangle \gamma^*_{p,q}. \tag{17}$$

Неравенства (11) и (17) являются в некотором смысле обобщениями соответственно неравенства Голузина и неравенства Грунского. Чтобы убедиться в этом, представим с помощью леммы Шура матрицу A в виде

$$A = U^T \mathbf{D} U, \tag{18}$$

где $U = (u_{i,j})_{i,j=\overline{1,n}}$ – унитарная $n\times n$ матрица, т.е. $\overline{U^T} U = E$, а $\mathbf{D}$ – диагональная матрица с элементами d_k^2, $d_k > 0$ для $k = \overline{1,r}$, где $r = \operatorname{rank} A$, $d_k = 0$ для $r < k \leqslant n$. Положим

$$V^p = UX^p = (v_1^p, \ldots, v_n^p), \quad \widehat{A} = \overline{U^T}\mathbf{D}U = (\widehat{a}_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}.$$

Тогда

$$\langle AX^p, X^q\rangle = \langle \mathbf{D}V^p, \overline{V}^{\,q}\rangle = \sum_{k=1}^r d_k^2 v_k^p v_k^q,$$

$$\sum_{p,q\geqslant 1} \langle AX^p, \overline{X^q}\rangle \gamma_{p,q} = \sum_{k=1}^r d_k^2 \sum_{p,q\geqslant 1} \gamma_{p,q} v_k^p v_k^q, \tag{19}$$

$$4\pi^2 Q_{P^*}(w) = -\langle AY(w), \overline{Y(w)}\rangle = -\sum_{k=1}^r d_k^2 \left(\sum_{j=1}^n u_{kj} \frac{1}{w - w_j^*}\right)^2. \tag{20}$$

Если $r = 1$, то из (18) следует $\mu_{k,j} = u_{k,1} d^2 u_{j,1}$, $k \neq j$, и $\alpha_j^2 = u_{k,j}^2 d^2$, $j = \overline{1,n}$, т.е.

$$\mu_{k,j} = \alpha_k \alpha_j, \quad k,j = \overline{1,n}, \tag{21}$$

и из (20) следует

$$4\pi^2 Q_{P^*}(w) dw^2 = -\left(\sum_{j=1}^n \frac{\alpha_j}{w - w_j^*}\right)^2 dw^2. \tag{21$'$}$$

Благодаря тому, что в этом (и только в этом) случае к.д. $Q_{P^*}(w)dw^2$ оказывается полным квадратом, величина в правой части (11) легко вычисляется (см. [4]):

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k^2 \log |F^{*'}(z_k)| + \sum_{k,j=1}^n \alpha_k \alpha_j \log \left|\frac{w_k^* - w_j^*}{z_k - z_j}\right| =$$

$$= \sum_{k,j=1}^{n} \alpha_k \alpha_j \log \frac{1}{\left|1 - \frac{1}{z_k \overline{z}_j}\right|}, \tag{22}$$

и (11) оказывается неравенством Голузина.

При $r = 1$ левая часть неравенства (17) принимает вид

$$\sum_{p,q \geqslant 1} \langle AX^p, \overline{X^q} \rangle \gamma_{p,q} = d^2 \sum_{p,q \geqslant 1} \gamma_{p,q} v_1^p v_1^q,$$

а правая в силу (22) есть

$$\sum_{p,q \geqslant 1} \langle AX^p, \overline{X^q} \rangle \gamma^*_{p,q} = d^2 \sum_{p \geqslant 1} \frac{1}{p} |v_1^p|^2,$$

где

$$dv_1^p = \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j}{z_j},$$

и (17) оказывается неравенством Грунского.

В случае $r > 1$, применяя к (19) неравенство Грунского, получим

$$\sum_{k,j} a_{k,j} \log \left| \frac{F(z_k) - F(z_j)}{z_k - z_j} \right| = \operatorname{Re} \sum_{p,q \geqslant 1} \langle AX^p, \overline{X^q} \rangle \gamma_{p,q} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{r} d_k^2 \sum_{p \geqslant 1} \frac{1}{p} |v_k^p|^2 = \sum_{p \geqslant 1} \frac{1}{p} \|\mathbf{D} V^p\|^2 = \sum_{k,j} \hat{a}_{k,j} \log \frac{1}{1 - \frac{1}{z_k z_j}}. \tag{23}$$

Однако неравенство (23) уже не является, вообще говоря, точным.

4. Главной целью настоящей работы является получение из неравенства (17) новых неравенств для коэффициентов Грунского функций класса Σ при помощи некоторого предельного перехода.

Пусть $|w_k^*| > M > 0$ при $k = \overline{1,n}$. Тогда для к.д. $Q_{P^*}(w) dw^2$ при $|w| < M$ имеем разложение

$$4\pi^2 Q_{P^*}(w) = -\langle AY(w), \overline{Y}(w) \rangle = - \sum_{p,q \geqslant 0} \langle AY^p, \overline{Y^q} \rangle w^{p+q}. \tag{24}$$

Введем параметр $\rho > 0$ и рассмотрим конформно-инвариантный функционал $J_\rho(P)$, у которого параметры α_j, l_k ($j = \overline{1,n_1}$, $k =$

$\overline{1, n_2}$) и числа $\mu_{k,j}$ зависят от ρ таким образом, что при $\rho \to +\infty$ к.д. $Q_{\rho P^*}(w)dw^2$ сходится равномерно в $\mathbb{C}$ к предельному к.д. $\widehat{Q}(w)dw^2$. В этом случае к.д. $\widehat{Q}(w)dw^2$ регулярен на $\mathbb{C}$ и имеет полюс порядка $\geqslant 4$ в точке $w = \infty$. Функции F_ρ^* сходятся к предельной функции $F^* \in \Sigma$, $F^* \prec \widehat{Q}dw^2$, и неравенство (17) переходит в некоторое предельное неравенство для коэффициентов Грунского функций $F \in \Sigma$, экстремальной в котором является функция F^*. По сравнению с аналогичным неравенством, которое определяется посредством к.д. $\widehat{Q}(w)dw^2$ согласно "основной теореме о коэффициентах" Дженкинса [6, теорема 4.1] мы имеем то преимущество, что не требуется совпадения нескольких первых коэффициентов разложения функций F и F^*.

§1. Ограниченность функционала $J(P)$ сверху

Пусть $P = \{w_1, \dots, w_n\}$, $n \geqslant 4$, – множество отмеченных точек на $\mathbb{C}$, $\Phi(\mathbb{D})$ – функционал (1) для задачи об ЭР, описанной во введении, $J(P)$ – конформно-инвариантный функционал вида (3).

Теорема 1. *Для того, чтобы функционал $J(P)$ был ограничен сверху, достаточно выполнения следующих двух условий.*

Для любого подмножества $I \subset \{1, 2, \dots, n\}$, содержащего не более $n - 2$ индексов,

$$\sum_{j \in I} \alpha_j^2 + 2 \sum_{\substack{s,t \in I,\\ s<t}} \mu_{s,t} \geqslant 0. \tag{1.1}$$

Для любой области $D_k^{(1)} \in \mathbb{D}$, $k = \overline{1, n_2}$,

$$\sum_{j \in I(D_k^{(1)})} \alpha_j^2 + 2 \sum_{\substack{s,t \in I(D_k^{(1)}),\\ s<t}} \mu_{s,t} \geqslant l_k^2, \tag{1.2}$$

где

$$I(D_k^{(1)}) = \{j : w_j \in E_k'\} \quad \text{или} \quad I(D_k^{(1)}) = \{j : w_j \in E_k''\},$$

$$\overline{\mathbb{C}} \setminus D_k^{(1)} = E_k' \cup E_k''.$$

Доказательство. Допустим, что функционал $J(P)$ не ограничен сверху. Тогда можно считать, что $w_j \to w_j^0$, $j = \overline{1, n}$, и при этом

$J(P) \to +\infty$. Если бы все точки w_j^0, $j = \overline{1,n}$, были различны, то по непрерывности мы имели бы $J(P) \to J(P^0) < +\infty$. Обозначим через $w(k)$, $1 \leqslant k \leqslant \nu < n$, различные точки множества $\{w_j^0\}_{j=\overline{1,n}}$, и положим

$$I_k = \{j : w_j \to w(k)\}.$$

Если $j_1 \in I_{k_1}$, $j_2 \in I_{k_2}$, $k_1 \neq k_2$, то будем писать $j_1 \perp j_2$. Через $|I|$ будем обозначать число точек множества I. Для удобства, в обозначениях функционалов и областей будем указывать используемую переменную.

Прежде всего, заметим, что в силу конформной инвариантности функционала $J(P)$ мы можем считать $|I_k| \leqslant n-2$ для всех $k = \overline{1,\nu}$. Для $k = \overline{1,\nu}$ положим

$$S_{I_k}^w = \sum_{j=I_k} \alpha_j^2 \, M(D_j^w, w_j) + \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{s,t\in I_k,\\ s<t}} \mu_{s,t} \log|w_s - w_t|^2. \qquad (1.3)$$

Мы покажем, что из условия (1.1) следует ограниченность сверху всех сумм $S_{I_k}^w$. Доказательство проведем индукцией по числу $|I_k|$ элементов множества I_k. Если $|I_k| = 1$, то доказывать нечего.

Пусть $|I_k| = 2$, $I_k = \{p,q\}$. Считаем без ограничения общности, что $w_p \to 0$, $w_q \to 0$. Положим

$$w = w_p + z(w_q - w_p). \qquad (1.4)$$

Имеем

$$S_{I_k}^w = \alpha_p^2 M(D_p^w, w_p) + \alpha_q^2 M(D_q^w, w_q) + \frac{1}{2\pi}\, \mu_{p,q} \log|w_p - w_q|^2 =$$

$$= \alpha_p^2 M(D_p^z, 0) + \alpha_q^2 M(D_q^z, 1) + \frac{1}{2\pi}(\alpha_p^2 + \alpha_q^2 + 2\mu_{p,q}) \log|w_p - w_q|.$$

В силу (1.1), получаем $S_{I_k}^w \leqslant C$, где константа C не зависит от P.

Допустим, что ограниченность сверху сумм $S_{I_k}^w$ доказана при $|I_k| \leqslant m-1$. Пусть $|I_k| = m$, $p, q \in I_k$. Снова введем z по формуле (1.4) и положим $z_j(w_q - w_p) = w_j - w_p$, $j \in I_k$. Тогда

$$S_{I_k}^w = S_{I_k}^z + \frac{1}{2\pi}\left(\sum_{j\in I_k} \alpha_j^2 + 2\sum_{\substack{s,t\in I_k,\\ s<t}} \mu_{s,t}\right) \log|w_p - w_q|, \qquad (1.5)$$

где

$$S^w_{I_k} = \sum_{j \in I_k} \alpha_j^2 M(D_j^z, z_j) + \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{s,t \in I_k,\\ s<t}} \mu_{s,t} \log |z_s - z_t|^2. \tag{1.6}$$

В силу (1.1), второе слагаемое в правой части (1.5) неположительно. Переходя, если нужно, к подпоследовательности, можно считать, что $z_j \to z_j^0$ при $j \in I_k$. Обозначим через $z(l)$, $1 \leqslant l \leqslant \mu \leqslant |I_k|$, различные точки множества $\{z_j^0\}_{j \in I_k}$, и положим

$$I_{k,l} = \{j \in I_k : z_j \to z(l)\}.$$

Поскольку $z_p^0 = 0$, $z_q^0 = 1$, то $|I_{k,l}| \leqslant m - 1$. Имеем

$$S^z_{I_k} = \sum_{l=1}^{\mu} S^z_{I_{k,l}} + \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{s,t \in I_k,\\ s<t,\, s \perp t}} \mu_{s,t} \log |z_s - z_t|^2, \tag{1.7}$$

где

$$S^z_{I_{k,l}} = \sum_{j \in I_{k,l}} \alpha_j^2 M(D_j^z, z_j) + \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{s,t \in I_{k,l},\\ s<t}} \mu_{s,t} \log |z_s - z_t|^2,$$

и второе слагаемое в (1.7), очевидно, ограничено. По индуктивному предположению, ограничена сверху и сумма $S^z_{I_k}$, значит, и суммы $S^w_{I_k}$. Далее, поскольку

$$J(P) = \sum_{k=1}^{\nu} S^w_{I_k} + \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{s,t=1,\\ s<t,\, s \perp t}}^{n} \mu_{s,t} \log |w_s - w_t|^2 + \sum_{k=1}^{n_2} l_k^2 M(D_k^{(1)}), \tag{1.8}$$

и второе слагаемое в (1.8) ограничено, то для доказательства теоремы достаточно доказать ограниченность сверху сумм

$$S^w_{I(D_k^{(1)})} + l^2 M(D_k^{(1)w}), \quad k = \overline{1, n_2}.$$

Пусть, для определенности, $I(D_k^{(1)}) = \{j : w_j \in E'_k\}$. Тогда, не теряя общности, можем считать, что $1, \infty \in P$, $1, \infty \in E''_k$. Пусть $p, q \in I(D_k^{(1)})$. Введем z по формуле (1.4) и получим

$$S^w_{I(D_k^{(1)})} + l_k^2 M(D_k^{(1)w}) = S^z_{I(D_k^{(1)})} +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\left(\sum_{j\in I(D_k^{(1)})}\alpha_j^2+2\sum_{\substack{s,t\in I(D_k^{(1)}),\\ s<t}}\mu_{s,t}\right)\log|w_p-w_q|+l_k^2M(D_k^{(1)z}).$$

Область $D_k^{(1)z}$ отделяет точки $\frac{1-w_p}{w_q-w_p}$, ∞ от всех точек z_j, $j\in I(D_k)$. Поскольку $z_p=0$, $z_q=1$, то легко видеть, что

$$M(D_k^z)\leqslant\frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{|w_p-w_q|}+\text{const}\,.$$

Поскольку суммы $S^z_{I(D_k)}$, как доказано выше, ограничены сверху, то имеем

$$S^w_{I(D_k)}+l_k^2M(D_k^{(1)w})\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\left(\sum_{j\in I(D_k^{(1)})}\alpha_j^2+2\sum_{\substack{s,t\in I(D_k^{(1)}),\\ s<t}}\mu_{s,t}-l_k^2\right)\log|w_p-w_q|+\text{const}\,.\quad(1.9)$$

Из условия (1.2) следует ограниченность сверху сумм в левой части (1.9). Тем самым теорема доказана.

§2. Предельный переход в неравенствах

2.1. Нам потребуется следующая лемма.

Лемма. *Пусть $P=\{w_1,\dots,w_n,\infty\}$ – множество отмеченных точек на $\overline{\mathbb{C}}$, $\Phi(\mathbb{D})$ – функционал (1) задачи об ЭР для этих точек и $Q_P(w)dw^2$ – ассоциированный к.д. Если*

$$Q_P(w)dw^2=-\frac{1}{4\pi^2}\left(\sum_{j=1}^n\frac{\alpha_j}{w-w_j}\right)^2dw^2,$$

то

$$\mathcal{M}(P)=\Phi(\mathbb{D}^*)=\frac{1}{2\pi}\sum_{\substack{p,q=1,\\ p\neq q}}^n\alpha_p\alpha_q\log\frac{1}{|w_p-w_q|}.\qquad(2.1)$$

Доказательство. Утверждение леммы следует из теоремы 1 работы [5]. Поскольку эта теорема формулируется и доказывается в [5] в терминах емкостей конденсаторов, мы дадим здесь другое доказательство.

Известно, что (см., например, [2]),

$$\mathcal{M}(P)=\lim_{\varepsilon\to 0}\iint\limits_{\mathbb{C}_\varepsilon}|Q_P(w)|d\sigma_w-\frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{n+1}\alpha_j^2\log\frac{1}{\varepsilon}, \tag{2.2}$$

где (через $U_\rho(a)$ обозначаем круг $|w-a|<\rho$)

$$\mathbb{C}_\varepsilon=\left(\mathbb{C}\setminus\bigcup_{j=1}U_\varepsilon(w_j)\right)\cap U_{1/\varepsilon}(0),$$

$$\alpha_{n+1}=-\sum_{j=1}^{n}\alpha_j.$$

Положим

$$I(w)=\frac{i}{2\pi}\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\log\frac{1}{w-w_j},\qquad h(w)=\operatorname{Im}I(w).$$

Имеем

$$\iint\limits_{\mathbb{C}_\varepsilon}|Q_P(w)|d\sigma=4\iint\limits_{\mathbb{C}_\varepsilon}|h'_w|^2d\sigma=\frac{2}{i}\iint\limits_{\mathbb{C}_\varepsilon}h'_w h'_{\overline{w}}d\overline{w}\wedge dw=$$

$$=\frac{2}{i}\int\limits_{\partial\mathbb{C}_\varepsilon}h(w)h'_w(w)dw=-\frac{2}{i}\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{|w-w_j|=\varepsilon}h(w)h'_w(w)dw+$$

$$+\frac{2}{i}\int\limits_{|w|=\frac{1}{\varepsilon}}h(w)h'_w(w)dw. \tag{2.2}$$

Учитывая, что при $|w-w_j|=\varepsilon$

$$h(w)=\frac{\alpha_j}{2\pi}\log\frac{1}{\varepsilon}+\sum_{k\neq j}\frac{\alpha_k}{2\pi}\log\frac{1}{|w_k-w_j|}+O(\varepsilon),$$

и при $|w|=1/\varepsilon$

$$h(w)=-\frac{\alpha_{n+1}}{2\pi}\log\frac{1}{\varepsilon}+O(\varepsilon),$$

из (2.2) получаем

$$\iint\limits_{\mathbb{C}_\varepsilon} |Q_P(w)| d\sigma = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\alpha_j^2}{2\pi} \log \frac{1}{\varepsilon} + \sum_{\substack{p,q=1,\\ p\neq q}}^{n} \frac{\alpha_p \alpha_q}{2\pi} \log \frac{1}{|w_p - w_q|} + O(\varepsilon),$$

что и требовалось доказать.

2.2. Пусть теперь $P = \{w_1, w_2, w_3, \infty\}$, где w_j, $j = 1, 2, 3$ – различные точки $\mathbb{C}$. Рассмотрим задачу об ЭР w-сферы на односвязные области D_j, $w_j \in D_j$, $j = \overline{1,4}$ $(w_4 = \infty)$ с функционалом

$$\Phi(\mathbb{D}) = M(D_1, w_1) + M(D_2, w_2) + M(D_3, w_3) + 9M(D_4, \infty),$$

и пусть

$$J(P) = \mathcal{M}(P) + \frac{1}{2\pi}\big(\log|w_2 - w_1|^2 + \log|w_3 - w_2|^2 + \log|w_1 - w_3|^2\big). \quad (2.3)$$

По теореме 1, функционал $J(P)$ ограничен сверху.

Теорема 2. *Пусть* $T = T_0 \cup T^+ \cup T^-$, *где* $T_0 = [-2, 1]$, $T^+ = \{w : |w - \omega| = \sqrt{3}, \operatorname{Im} w \geqslant 0\}$, $T^- = \{\overline{w} : w \in T^+\}$. *Максимум функционала* $J(P)$ *равен* 0 *и достигается для любой системы точек*

$$P_a = \{\omega, \overline{\omega}, a, \infty\}, \quad \text{где} \quad \omega = e^{2\pi i/3}, \quad a \in T,$$

а также для систем точек, получающихся из указанных при дробно-линейных преобразованиях, и только для таких систем точек.

Доказательство. Пусть $P^* = \{w_1^*, w_2^*, w_3^*, \infty\}$ – экстремальная система точек, $Q_{P^*}(w)dw^2$ – ассоциированный к.д. Для нашей задачи матрица A имеем вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

и из $(21')$ получаем

$$Q_{P^*}(w)dw^2 = -\frac{1}{4\pi^2}\left(\frac{1}{w - w_1^*} + \frac{1}{w - w_2^*} + \frac{1}{w - w_3^*}\right)^2 dw^2. \quad (2.4)$$

Поэтому утверждение о равенстве нулю максимального значения функционала $J(P)$ следует из леммы §2.1. Благодаря конформной инвариантности функционала $J(P)$ можем считать, что

$$\sigma_1 = w_1^* + w_2^* + w_3^* = 0, \quad \sigma_2 = w_1^* w_2^* + w_1^* w_3^* + w_2^* w_3^* \geqslant 0.$$

Тогда

$$Q_{P^*}(w)dw^2 = -\frac{9}{4\pi^2}\frac{(w^2+c^2)^2}{(w-w_1^*)^2(w-w_2^*)(w-w_3^*)}dw^2,$$

$$c^2 = \frac{\sigma_2}{3}.$$

В силу связности объединения замыканий критических траекторий к.д. $Q_{P^*}(w)dw^2$, на границе одной из областей D_j^* – пусть области D_2^* – находятся оба двойных нуля этого к.д., и его структура траекторий необходимо имеет вид, схематично изображенный на рис. 1.

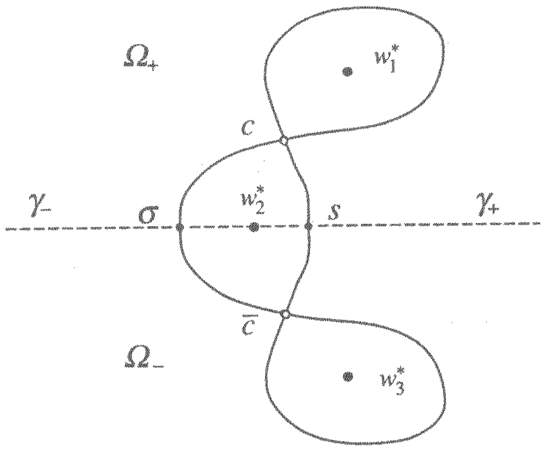

Рис. 1.

Проведем критические ортогональные траектории γ_+ и γ_-, соединяющие точки w_2 и ∞ и проходящие соответственно через точки s и σ, которые являются серединами в Q_{P^*}-метрике граничных дуг области D_2 (см. рис. 1). Замыкание их объединения

$\gamma = \overline{\gamma_+ \cup \gamma_-}$ представляет собой замкнутую аналитическую кривую, разбивающую $\overline{\mathbb{C}}$ на две области: Ω_+ и Ω_-. Отобразим Ω_+ конформно на полуплоскость. Нетрудно видеть, что это отображение продолжается до конформного отображения плоскостей, которое необходимо является дробно-линейным. Отсюда следует, что γ – прямая, значит, структура траекторий к.д. $Q_{P^*}(w)dw^2$ обладает осевой симметрией.

Положим $P^*(t) = \{w_1^*(t), w_2^*(t), w_3^*(t), \infty\}$, где

$$w_1^*(t) = -t + i, \quad w_2^*(t) = 2t, \quad w_3^*(t) = -t - i.$$

Из условия $\sigma_2 \geqslant 0$ следует, что $t^2 \leqslant 1/3$. Изменение структуры траекторий к.д. $Q_{P^*(t)}(w)dw^2$ при возрастании t от $-1/\sqrt{3}$ до $1/\sqrt{3}$ изображено на рис. 2a–2d.

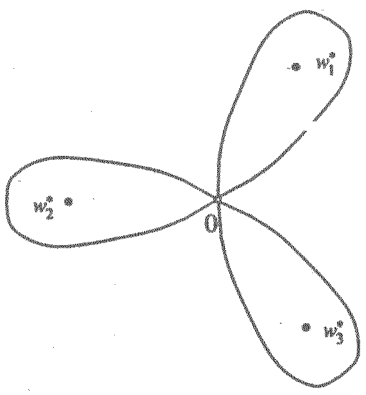

Рис. 2a ($t = -1/\sqrt{3}$)

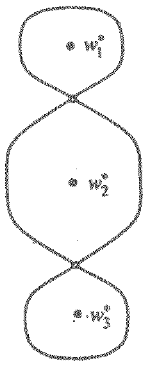

Рис. 2b ($t = 0$).

При линейном преобразовании, при котором $w_1(t) \to \omega$, $w_3(t) \to \overline{\omega}$, $\infty \to \infty$, точка $w_2(t)$ переходит в $a = \frac{3t\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \in T_0$, отрезок $\big[-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}\big]$ переходит в отрезок T_0. При линейном преобразовании, при котором $w_1(t) \to \overline{\omega}$, $w_2(t) \to \omega$, $\infty \to \infty$, точка $w_3(t)$ переходит в $a = \omega - i\sqrt{3}(3t+i)/(3t-i) \in T^+$, отрезок $\big[-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}\big]$ переходит в дугу T^+. Аналогично, при линейном преобразовании, при котором $w_3(t) \to \omega$, $w_2(t) \to \overline{\omega}$, $\infty \to \infty$, точка $w_1(t)$ переходит в $a = \overline{\omega} + i\sqrt{3}(3t-i)/(3t+i) \in T^-$, отрезок

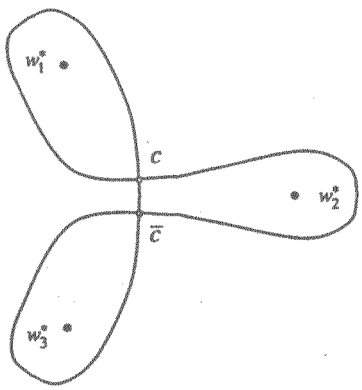

Рис. 2c ($0 < t < 1/\sqrt{3}$)

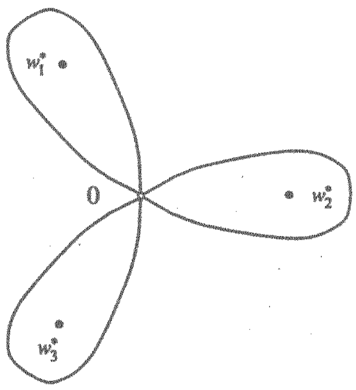

Рис. 2d ($t = 1/\sqrt{3}$).

$\left[-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}\right]$ переходит в дугу T^-. Таким образом, система точек $P_a = \{\omega, \overline{\omega}, a, \infty\}$ будет экстремальной в том и только в том случае, когда $a \in T$, что и требовалось доказать.

2.3. Рассмотрим теперь задачу об ЭР w-сферы на односвязные области D_j, $j = \overline{1,4}$, $w_j \in D_j$, и двусвязную область D, разделяющую пары точек w_1, w_3 и w_2, ∞. Будем считать, что замкнутые жордановы кривые в области D, разделяющие ее граничные компоненты, гомотопны на $\mathbb{C}\backslash\{w_1, w_2, w_3\}$ разрезу по отрезку $[w_1, w_3]$. Положим

$$\tilde{\Phi}(\mathbb{D}) = M(D_1, w_1) + M(D_2, w_2) + M(D_3, w_3) + 9M(D_4, \infty) + 4M(D),$$

$$\tilde{\mathcal{M}}(P) = \tilde{\Phi}(\mathbb{D}^*),$$

и пусть функционал $J(P)$ определяется по аналогии с (2.3):

$$\tilde{J}(P) = \tilde{\mathcal{M}}(P) + \frac{1}{2\pi}\left(\log|w_2 - w_1|^2 + \log|w_3 - w_2|^2 + \log|w_1 - w_3|^2\right).$$

По теореме 1, функционал $\tilde{J}(P)$ ограничен сверху, причем в условии (1.2) имеет место равенство.

Через $\Omega_{1,3}$ обозначим ту из трех областей, на которые множество T разбивает $\overline{\mathbb{C}}$, которая содержит точку $w = \infty$. Из теоремы 2 легко получаем

Следствие. *Максимум функционала* $\tilde{J}(P)$ *равен* 0 *и достигается для любой системы точек* $P_a = \{\omega, a, \overline{\omega}, \infty\}$, $a \in \Omega_{1,3}$, *а также для систем точек, получающихся из указанных при дробно-линейных преобразованиях, и только для таких систем точек.*

Доказательство. Ассоциированным с указанной задачей к.д. является снова к.д. (2.4), откуда следует утверждение о максимальном значении $\tilde{J}(P)$. В структуре траекторий к.д. (2.4) присутствуют четыре круговые области и, возможно, одна кольцевая область. Из теоремы 2 следует, что для всех $a \in \Omega_{1,3}$ кольцевая область действительно существует. Пусть $a > 1$, $c_1 < c_2$ – нули (двойные) к.д. $Q_{P_a}(w)dw^2$. Положим для $k = 1, 2$

$$d_k = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\operatorname{Im} \int\limits_{c_k}^{\omega-\varepsilon} \sqrt{Q_{P_a}(w)}\, dw - \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{|\varepsilon|} \right), \tag{2.5}$$

где ветвь корня выбрана таким образом, чтобы предел в (2.5) был конечным. Легко подсчитать, что

$$2\pi d_k = \log \frac{1}{|\omega - \overline{\omega}|} + \log \frac{1}{|\omega - a|} + 2 \log |c_k - \omega| + \log(a - c_k).$$

Из условия $a > 1$ получаем, что $d_2 > d_1$, т.е. именно двойной нуль c_1 лежит на границе областей D_1^* и D_3^* (см. рис. 3a–3b).
Следовательно, область D разделяет пару точек w_1, w_3 и w_2, ∞ указанным образом. Из соображений непрерывности ясно, что это остается справедливым для всех точек области $\Omega_{1,3}$. Пусть теперь

$$\Omega_{1,2} = \{w : |w - \omega| < \sqrt{3}, \operatorname{Im} w > 0\},$$

$$\Omega_{2,3} = \{w : |w - \overline{\omega}| < \sqrt{3}, \operatorname{Im} w < 0\}$$

– две другие из областей, на которые T разбивает $\overline{\mathbb{C}}$. Так же, как и выше, убеждаемся, что область D при $a \in \Omega_{1,2}$ разделяет пары точек ω, a и $\overline{\omega}, \infty$ (см. рис. 3), а при $a \in \Omega_{2,3}$ – пары точек $\overline{\omega}, a$ и ω, ∞. Следствие доказано.

2.4. Пусть $P_a = \{\omega, a, \overline{\omega}, \infty\}$, где $a \in \mathbb{C}$, $a \neq \omega, \overline{\omega}$, $Q_{P_a}(w)dw^2$ – к.д., определенный в (2.4) при $w_1^* = \omega$, $w_2^* = a$, $w_3^* = \overline{\omega}$, $F_a^* \in \Sigma_0$ – функция, согласованная с $Q_{P_a}(w)dw^2$. Теорема 2 и следствие из нее позволяют получить неравенство типа (17) для коэффициентов Грунского функций из класса Σ, экстремальной в котором будет

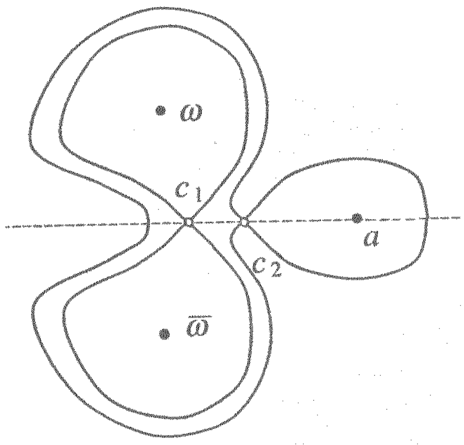

Рис. 3а

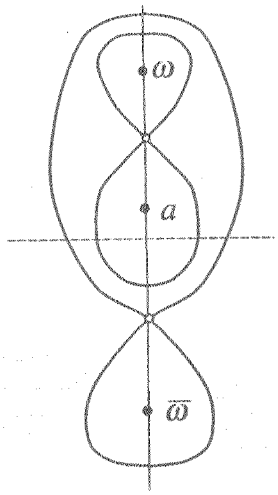

Рис. 3b.

функция F_a^*. Техника предельного перехода позволяет получить отсюда предельное неравенство, в котором участвуют только несколько коэффициентов Грунского.

Теорема 3. *Пусть функция* $F^* = z + \sum_{k\geqslant 1} c_k^* z^{-k} \in \Sigma_0$, *и* F^* *согласована с к.д.* $\widehat{Q}(w)dw^2 = -(w^2 - \lambda^2 e^{2i\varphi})^2 dw^2$, $\lambda > 0$, $-\pi < \varphi \leqslant \pi$. *Тогда для любой функции* $F \in \Sigma$ *верно неравенство*

$$\mathrm{Re}(B^2\gamma_{1,1} + 2B\gamma_{1,3} + \gamma_{3,3}) \leqslant |B|^2 + \frac{1}{3}, \tag{2.6}$$

где $\gamma_{i,j}$ *– коэффициенты Грунского функции* F,

$$B = c_1^* - \lambda^2 e^{2i\varphi}. \tag{2.7}$$

Доказательство. Положим $a = 1 + \delta^2$, $\delta = |\delta|e^{i\varphi}$, $\rho = \lambda\sqrt{3}/|\delta|$, $\alpha^2 = 1/|\delta|^6$. Тогда

$$Q_{P_a}(w)dw^2 = -\frac{9}{4\pi^2}\frac{(w-\zeta_1)^2(w-\zeta_2)^2}{(2-\omega)^2(w-\overline{\omega})^2(w-a)^2}dw^2,$$

$$\zeta_{1,2} = \pm\frac{\delta}{\sqrt{3}} + O(\delta^2) \quad \text{при} \quad \delta \to 0.$$

При $\delta \to 0$ имеем

$$\alpha^2 Q_{\rho P_a}(w)dw^2 \to -\frac{9}{4\pi^2}(w^2-\lambda^2 e^{2i\varphi})^2 dw^2.$$

Пусть $F^*_\delta \in \Sigma_0$, $F^*_\delta \prec Q_{P_a}(w)dw^2$,

$$F^*_\delta(z_1(\delta)) = \rho\omega, \quad F^*_\delta(z_2(\delta)) = \rho a, \quad F^*_\delta(z_3(\delta)) = \rho\overline{\omega}. \tag{2.8}$$

При $\delta \to 0$ $F^*_\delta \to F^* \in \Sigma_0$, $F^* \prec -(w^2-\lambda^2 e^{2i\varphi})^2 dw^2$. В соответствии с обозначениями введения, для $k \geqslant 0$, $m \geqslant 1$ полагаем

$$X^m_\delta = \left(\frac{1}{z_1(\delta)^m}, \frac{1}{z_2(\delta)^m}, \frac{1}{z_3(\delta)^m}\right), \quad Y^k_\delta = \left(\overline{\omega}^{\,k+1}, \frac{1}{a^{k+1}}, \omega^{k+1}\right),$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Находим:

$$\langle AY^0, \overline{Y^0}\rangle = \delta^4 + O(\delta^5), \quad \langle AY^0, \overline{Y^2}\rangle = -3\delta^2 + O(\delta^3),$$

$$\langle AY^2, \overline{Y^2}\rangle = 9 + O(\delta), \quad \langle AY^p \overline{Y^q}\rangle = o(\delta^{4-p-q})$$

для всех прочих p и q, $p, q \geqslant 0$.

Нам потребуется связь между векторами Y^k_δ и X^m_δ, $k \geqslant 0$, $m \geqslant 1$, определяемся посредством условий (2.8). Пусть $p_m(t)$, $m \geqslant 1$ – многочлены Фабера для функции $F^* \in \Sigma_0$, определяемые разложением

$$\log\frac{z}{F(z)-t} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} p'_m(t) \frac{1}{z^m}. \tag{2.9}$$

Последовательно дифференцируя (2.9) по t, получим для $w = F^*(z)$ равенства

$$\frac{1}{w^k} = \sum_{m \geqslant k} \frac{1}{m} \frac{p^{(k)}_m(0)}{(k-1)!} \frac{1}{z^m}, \tag{2.10}$$

что дает искомую связь между векторами:

$$\frac{1}{\rho^{k+1}} Y^k_\delta = \sum_{m \geqslant k} \frac{1}{m} \frac{p^{(k)}_m(0)}{(k-1)!} X^m_\delta, \quad k \geqslant 0. \tag{2.11}$$

Обращая равенства (2.11), получаем:

$$X_\delta^1 = \frac{1}{\rho} Y_\delta^0 + \frac{c_1^*}{\rho^3} Y_\delta^2 + \frac{c_2^*}{\rho^4} Y_\delta^3 \dots ,$$
$$X_\delta^2 = \frac{1}{\rho^2} Y_\delta^1 + \frac{2c_1^*}{\rho^4} Y_\delta^3 + \dots ,$$
$$X_\delta^3 = \frac{1}{\rho^3} Y_\delta^2 + \frac{3c_1^*}{\rho^5} Y_\delta^4 + \dots .$$

Теперь находим

$$\alpha^2 \langle AX^1, \overline{X}^1 \rangle = \frac{1}{3\lambda^6}(c_1^* + \lambda^2)^2 + O(\delta),$$
$$\alpha^2 \langle AX^1, X^3 \rangle = \frac{1}{3\lambda^6}(c_1^* + \lambda^2) + O(\delta),$$
$$\alpha^2 \langle AX^3, \overline{X}^3 \rangle = \frac{1}{3\lambda^6} + O(\delta),$$
$$\alpha^2 \langle AX^p, \overline{X}^q \rangle = O(\delta) \quad \text{при всех остальных} \quad p, q \geqslant 0.$$

Таким образом, предел левой части неравенства (17) равен

$$\frac{1}{3\lambda^6} \operatorname{Re}(B^2 \gamma_{11} + 2B\gamma_{13} + \gamma_{33}),$$

где B введено в (2.7), а предел правой части равен

$$\frac{1}{3\lambda^6} \operatorname{Re}(B^2 \gamma_{11}^* + 2B\gamma_{13}^* + \gamma_{33}^*).$$

В силу условия $\operatorname{rank} A = 1$, последняя величина легко вычисляется, что и дает неравенство (2.6). Теорема доказана.

Используя выражения коэффициентов Грунского через коэффициенты разложения функции $F(z) = z + c_0 + \sum_{k \geqslant 1} c_k z^{-k} \in \Sigma$, именно,

$$\gamma_{11} = -c_1, \quad \gamma_{13} = -c_3, \quad \gamma_{33} = -\left(c_5 + c_1 c_3 + c_2^2 + \frac{1}{3} c_1^3\right),$$

можем представить (2.6), как неравенство между коэффициентами разложений функций F и F^*. Приведем для сравнения неравенство, определяемое к.д. $-(w^2 - \lambda^2 e^{2i\varphi})^2 dw^2$ согласно “основной теореме о коэффициентах” Дженкинса:

$$\operatorname{Re}(c_5 + 3c_1^* c_3 + c_2^2 - 2\lambda^2 e^{2i\varphi} c_3) \geqslant \operatorname{Re}(c_5^* - 3c_1^* c_3^* + c_2^{*^2} - 2\lambda^2 e^{2i\varphi} c_3^*) \quad (2.12)$$

для каждой функции $F \in \Sigma$, у которой $c_1 = c_1^*$. Легко убедиться, что при $c_1 = c_1^*$ неравенства (2.6) и (2.12) совпадают.

Литература

1. Е. Г. Емельянов, Г. В. Кузьмина, *Теоремы об экстремальном разбиении в семействах систем областей различных типов,* Зап. научн. семин. ПОМИ **237** (1997), 74–104.
2. Г. В. Кузьмина, *Модули семейства кривых и квадратичные дифференциалы,* Тр. Матем. ин-та АН СССР **139** (1980), 1–240.
3. Е. Г. Емельянов, *Некоторые свойства модулей семейств кривых,* Зап. научн. семин. ПОМИ **144** (1985), 72–82.
4. Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного,* 2-ое изд., М., 1966.
5. В. Н. Дубинин, Л. В. Ковалев, *Приведенный модуль комплексной сферы,* Зап. научн. семин. ПОМИ **254** (1998), 76–94.
6. Дж. Дженкинс, *Однолистные функции и конформные отображения,* М., 1962.

С.-Петербургский университет
экономики и финансов

Поступило 25 декабря 2001 г.,
в дополненном виде 29 марта 2001 г.