



# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Матус, Подалгебры свободных произведений алгебр многообразия  $\mathcal{A}_{m,n}$ ,  
*Матем. заметки*, 1972, том 12, выпуск 3, 303–311

<https://www.mathnet.ru/mzm9883>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.168

30 апреля 2025 г., 13:36:53



## ПОДАЛГЕБРЫ СВОБОДНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ АЛГЕБР МНОГООБРАЗИЯ $\mathfrak{A}_{m,n}$

В. Н. Матус

Многообразие  $\mathfrak{A}_{m,n}$  определяется системой  $n$ -арных операций  $\omega_1, \dots, \omega_m$ , системой  $m$ -арных операций  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ ,  $1 \leq m \leq n$ , системой тождеств

$$\begin{aligned} x_1 \dots x_n \omega_1 \dots x_1 \dots x_n \omega_m \varphi_i &= x_i \quad (i = 1, \dots, n), \\ x_1 \dots x_m \varphi_1 \dots x_1 \dots x_m \varphi_n \omega_j &= x_j \quad (j = 1, \dots, m). \end{aligned}$$

В статье доказывается, что подалгебра  $U$  свободного произведения  $\prod_{i \in I}^* A_i$  алгебр  $A_i$  ( $i \in I$ ) разлагается в свободное произведение непустых пересечений  $U \cap A_i$  ( $i \in I$ ) и свободной алгебры. Библи. 4 назв.

Многообразие  $\mathfrak{A}_{m,n}$  (см. [1]—[4]) задается системой  $n$ -арных операций  $\omega_1, \dots, \omega_m$ , системой  $m$ -арных операций  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ ,  $1 \leq m \leq n$ , системой тождеств:

$$x_1 \dots x_n \omega_1 \dots x_1 \dots x_n \omega_m \varphi_i = x_i \quad (i = 1, \dots, n), \quad (1)$$

$$\begin{aligned} x_1 \dots x_m \varphi_1 \dots x_1 \dots x_m \varphi_n \omega_j &= x_j \\ (j = 1, \dots, m). \end{aligned} \quad (2)$$

Пусть  $A_i$ ,  $i \in I$ , — система алгебр многообразия  $\mathfrak{A}_{m,n}$ ,  $A^{(0)} = \bigcup_{i \in I} A_i$ , где  $A_i \cap A_j = \phi$ , если  $i \neq j$ ,  $i, j \in I$ .

Будем считать, что  $a_1 \dots a_n \omega_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , в  $A^{(0)}$ , если в  $I$  найдется индекс  $i_0$  такой, что  $a_1, \dots, a_n \in A_{i_0}$  (а поэтому и  $a_1 \dots a_n \omega_i \in A_{i_0}$ ). Аналогично  $a_1 \dots a_m \varphi_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , в  $A^{(0)}$ , если в  $I$  существует индекс  $j_0$  такой, что  $a_1, \dots, a_m \in A_{j_0}$  ( $a_1 \dots a_m \varphi_i \in A_{j_0}$ ).

При таком определении операций множество  $A^{(0)}$  превращается в частичную алгебру, в которой выполняются условия:

а) если для некоторых элементов частичной алгебры  $y_1, \dots, y_n$  определены значения  $u_j = y_1 \dots y_n \omega_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ , то значение  $u_1 \dots u_m \varphi_i$  также определено и равно  $y_i$  для каждого  $i$ ,  $i = 1, \dots, n$ ;

б) если для элементов частичной алгебры  $y_1, \dots, y_m$  определены значения  $y_1 \dots y_m \varphi_i = v_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , то значение  $v_1 \dots v_n \omega_j$  также определено и равно  $y_j$  для каждого  $j$ ,  $j = 1, \dots, m$ .

Предположим, что мы уже построили последовательность частичных алгебр

$$A^{(0)} \subset A^{(1)} \subset A^{(2)} \subset \dots \subset A^{(2s-1)} \subset A^{(2s)} \quad (3)$$

такую, что:

1)  $A^{(i)}$  удовлетворяет условию  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $i = 0, 1, \dots, 2s$ ;

2)  $A^{(2e+1)} = A^{(2e)} \cup \omega_1(A^{(2e)}) \cup \dots \cup \omega_m(A^{(2e)})$ , где  $\omega_j(A^{(2e)})$  обозначает множество термов вида  $y_1 \dots y_n \omega_j$ , где  $y_1, \dots, y_n \in A^{(2e)}$  и  $y_1 \dots y_n \omega_j$  в  $A^{(2e)}$  не определен,  $j = 1, \dots, m$ ,  $e = 0, 1, 2, \dots, s-1$ ;

3)  $A^{(2e)} = A^{(2e-1)} \cup \varphi_1(A^{(2e-1)}) \cup \dots \cup \varphi_n(A^{(2e-1)})$ , где  $\varphi_i(A^{(2e-1)})$  обозначает множество термов вида  $y_1 \dots y_m \varphi_i$ , где  $y_1, \dots, y_m \in A^{(2e-1)}$  и  $y_1 \dots y_m \varphi_i$  в  $A^{(2e-1)}$  не определен,  $i = 1, \dots, n$ ,  $e = 1, 2, \dots, s$ ;

4) Операции  $\omega_1, \dots, \omega_m, \varphi_1, \dots, \varphi_n$  в  $A^{(2e+1)}$  ( $e = 0, 1, \dots, s-1$ ) определены по правилу:

$y_1 \dots y_n \omega_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , в  $A^{(2e+1)}$  тогда и только тогда, когда  $y_1, \dots, y_n \in A^{(2e)}$  и либо  $y_1 \dots y_n \omega_i$  в  $A^{(2e)}$ , либо  $y_1 \dots y_n \omega_i \in \omega_i(A^{(2e)})$ ;

$y_1 \dots y_m \varphi_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , в  $A^{(2e+1)}$ ,  $y_1, \dots, y_m \in A^{(2e+1)}$  либо при условии, что  $y_1, \dots, y_m \in A^{(2e)}$  и  $y_1 \dots y_m \varphi_j \in A^{(2e)}$ , либо если среди  $y_1, \dots, y_m$  есть  $y_k$ ,  $y_k \notin A^{(2e)}$  и в  $A^{(2e)}$  разрешима система уравнений

$$y_j = x_1 \dots x_n \omega_j \quad (j = 1, \dots, m) \quad (4)$$

относительно  $x_1, \dots, x_n$ . Пусть  $u_1, \dots, u_n$  — решение системы (4) (это решение единственно: если  $v_1, \dots, v_n$  — еще одно решение, то из соотношений  $y_k \notin A^{(2e)}$ ,  $u_1 \dots u_n \omega_k = v_1 \dots v_n \omega_k$  следует, что  $u_1 = v_1, \dots, u_n = v_n$ ). Тогда считаем, что

$$y_1 \dots y_m \varphi_j = u_j, \quad j = 1, \dots, n;$$

5) Операции  $\omega_1, \dots, \omega_m, \varphi_1, \dots, \varphi_n$  в  $A^{(2e)}$  ( $e = 1, 2, \dots, s$ ) определены по правилу:

$y_1 \dots y_m \varphi_i, i = 1, \dots, n$ , в  $A^{(2e)}$  тогда и только тогда, когда  $y_1, \dots, y_m \in A^{(2e-1)}$  и либо  $y_1 \dots y_m \varphi_i$  в  $A^{(2e-1)}$ , либо  $y_1 \dots y_m \varphi_i \in \varphi_i (A^{(2e-1)})$ ;

$y_1 \dots y_n \omega_j, j = 1, \dots, m$ , в  $A^{(2e)}$ ,  $y_1, \dots, y_n \in A^{(2e)}$  либо при условии, что  $y_1, \dots, y_n \in A^{(2e-1)}$  и  $y_1 \dots y_n \omega_j \in A^{(2e-1)}$ , либо если среди  $y_1, \dots, y_n$  есть  $y_k, y_k \notin A^{(2e-1)}$  и в  $A^{(2e-1)}$  разрешима система уравнений

$$y = x_1 \dots x_m \varphi_i \quad (i = 1, \dots, n) \quad (5)$$

относительно  $x_1, \dots, x_m$ . Если  $u_1, \dots, u_m$  — решение системы (5) (а из существования следует единственность этого решения), то полагаем  $y_1 \dots y_n \omega_j = u_j, j = 1, \dots, m$ .

Полагаем  $A^{(2s+1)} = A^{(2s)} \cup \omega_1 (A^{(2s)}) \cup \dots \cup \omega_m (A^{(2s)})$ , где  $\omega_j (A^{(2s)})$  обозначает множество термов вида  $y_1 \dots y_n \omega_j$ , где  $y_1, \dots, y_n \in A^{(2s)}$  и  $y_1 \dots y_n \omega_j$  в  $A^{(2s)}$  не определен,  $j = 1, \dots, m$ .

Операции в  $A^{(2s+1)}$  зададим по правилу 4) при  $e = s$ ;

$$A^{(2s+2)} = A^{(2s+1)} \cup \varphi_1 (A^{(2s+1)}) \cup \dots \cup \varphi_n (A^{(2s+1)}),$$

где  $\varphi_i (A^{(2s+1)})$  обозначает множество термов вида  $y_1 \dots y_m \varphi_i$ , где  $y_1, \dots, y_m \in A^{(2s+1)}$  и  $y_1 \dots y_m \varphi_i$  в  $A^{(2s+1)}$  не определен,  $i = 1, \dots, n$ .

Операции в  $A^{(2s+2)}$  задаем правилом 5) при  $e = s + 1$ . Покажем, что при этом в  $A^{(2s+1)}$  и  $A^{(2s+2)}$  выполняются условия  $\alpha, \beta$ . Для  $A^{(2s+1)}$ : условие  $\alpha$  выполняется в силу задания операций по правилу 4); пусть для элементов  $y_1, \dots, y_m \in A^{(2s+1)}$  определены значения  $v_i = y_1 \dots y_m \varphi_i, i = 1, \dots, n$ , тогда, если  $y_1, \dots, y_m \in A^{(2s)}$ , то  $y_1 \dots y_m \varphi_i \in A^{(2s)}$  и в силу предположения 1)  $v_1 \dots v_n \omega_j = y_j, j = 1, \dots, m$ . Если же среди  $y_1, \dots, y_m$  есть  $y_k, y_k \notin A^{(2s)}$ , то система (4) разрешима и  $v_1, \dots, v_n$  — как раз решение этой системы, а поэтому  $y_j = v_1 \dots v_n \omega_j, j = 1, \dots, m$ . Для  $A^{(2s+2)}$  рассуждение аналогично.

Последовательность (3) пополнилась:

$$A^{(0)} \subset \dots \subset A^{(2s-1)} \subset A^{(2s)} \subset A^{(2s+1)} \subset A^{(2s+2)}.$$

Пусть  $A = \bigcup_{e=0}^{\infty} A^{(e)}$ . Тогда  $A \in \mathfrak{A}_{m, n}$ . Покажем, что  $A$  является свободным произведением в  $\mathfrak{A}_{m, n}$  алгебр

$A_i, i \in I$ . По построению  $A_i \subset A^{(0)} \subset AVi, i \in I$ . Пусть  $H \in \mathfrak{A}_{m, n}$  и  $\rho_i: A_i \rightarrow H, i \in I$ , — гомоморфизмы. Тогда  $\bigcup_{i \in I} \rho_i = \lambda_0: A^{(0)} \rightarrow H$  также будет гомоморфизмом. Пред-

положим, что мы построили систему гомоморфизмов  $\lambda_0 \subset \lambda_1 \subset \lambda_2 \subset \dots \subset \lambda_{2s-1} \subset \lambda_{2s}$ , где  $\lambda_i: A^{(i)} \rightarrow H, i = 0, 1, \dots, 2s$ . Построим тогда отображение  $\lambda_{2s+1}: A^{(2s+1)} \rightarrow H$  по правилу: если  $y \in A^{(2s)}$ , то  $y\lambda_{2s+1} = y\lambda_{2s}$ ; если  $y \in A^{(2s+1)} \setminus A^{(2s)}$ , то  $y$  однозначно представим в виде  $y = y_1 \dots y_n \omega_i, i = 1, \dots, m$ . Полагаем в этом случае

$$y\lambda_{2s+1} = y_1\lambda_{2s} \dots y_n\lambda_{2s}\omega_i. \quad (6)$$

В силу такого определения  $\lambda_{2s+1}$  является  $\langle \omega_1, \dots, \omega_m \rangle$ -гомоморфизмом. Пусть теперь для  $y_1, \dots, y_m \in A^{(2s+1)}$  в  $A^{(2s+1)}$  определен элемент  $y_1 \dots y_m \varphi_i$ . Если  $y_1, \dots, y_m \in A^{(2s)}$ , то  $y_1 \dots y_m \varphi_i \in A^{(2s)}$ , а поэтому

$$y_1 \dots y_m \varphi_i \lambda_{2s+1} = \\ = y_1 \dots y_m \varphi_i \lambda_{2s} = y_1 \lambda_{2s} \dots y_m \lambda_{2s} \varphi_i = y_1 \lambda_{2s+1} \dots y_m \lambda_{2s+1} \varphi_i.$$

Пусть среди  $y_1, \dots, y_m$  есть  $y_k, y_k \notin A^{(2s)}$ . Тогда в  $A^{(2s)}$  разрешима система уравнений (4). Пусть  $u_1, \dots, u_n$  — решение системы (4). Тогда  $y_1 \dots y_m \varphi_i = u_i$ , а поэтому в силу (6)  $y_1 \dots y_m \varphi_i \lambda_{2s+1} = u_i \lambda_{2s+1} = u_i \lambda_{2s} = u_1 \lambda_{2s} \dots u_n \lambda_{2s} \omega_1 \dots u_1 \lambda_{2s} \dots u_n \lambda_{2s} \omega_m \varphi_i = y_1 \lambda_{2s+1} \dots y_m \lambda_{2s+1} \varphi_i$ . Таким образом,  $\lambda_{2s+1}$  — гомоморфизм и

$$\lambda_0 \subset \lambda_1 \subset \dots \subset \lambda_{2s-1} \subset \lambda_{2s} \subset \lambda_{2s+1}. \quad (7)$$

Построим гомоморфизм  $\lambda_{2s+2}: A^{(2s+2)} \rightarrow H$  по правилу: если  $y \in A^{(2s+1)}$ , то  $y\lambda_{2s+2} = y\lambda_{2s+1}$ ; если  $y \in A^{(2s+2)} \setminus A^{(2s+1)}$ , то  $y \in \varphi_i (A^{(2s+1)})$  и  $y = y_1 \dots y_m \varphi_i, i = 1, \dots, n$ . Полагаем тогда

$$y\lambda_{2s+2} = y\lambda_{2s+1} \dots y_m \lambda_{2s+1} \varphi_i. \quad (8)$$

По определению,  $\lambda_{2s+2}$  является  $\langle \varphi_1, \dots, \varphi_n \rangle$ -гомоморфизмом. Пусть для элементов  $y_1, \dots, y_n \in A^{(2s+2)}$   $y_1 \dots y_n \omega_j \in A^{(2s+2)}$ . Если  $y_1, \dots, y_n \in A^{(2s+1)}$ , то  $y_1 \dots y_n \omega_j \in A^{(2s+1)}$ . В этом случае, по построению,  $\lambda_{2s+2}$  сохраняет  $\omega_j$ :  $y_1 \dots y_n \omega_j \lambda_{2s+2} = y_1 \dots y_n \omega_j \lambda_{2s+1} = y_1 \lambda_{2s+1} \dots y_n \lambda_{2s+1} \omega_j = y_1 \lambda_{2s+2} \dots y_n \lambda_{2s+2} \omega_j$ . Пусть теперь  $y_k$  — один из  $y_1, \dots, y_n$  и  $y_k \notin A^{(2s+1)}$ . Тогда

в  $A^{(2s+1)}$  разрешима система уравнений (5). Пусть  $u_1, \dots, u_m$  — решение этой системы. Тогда  $y_1 \dots y_n \omega_j = u_j$ . В силу (8)  $y_1 \dots y_n \omega_j \lambda_{2s+2} = u_j \lambda_{2s+2} = u_j \lambda_{2s+1} = u_1 \lambda_{2s+1} \dots u_m \lambda_{2s+1} \varphi_1 \dots u_1 \lambda_{2s+1} \dots u_m \lambda_{2s+1} \varphi_n \omega_j = y_1 \lambda_{2s+2} \dots y_n \lambda_{2s+2} \omega_j$ . Последовательность (7) пополнилась:

$$\lambda_0 \subset \lambda_1 \subset \dots \subset \lambda_{2s} \subset \lambda_{2s+1} \subset \lambda_{2s+2}.$$

Пусть  $\lambda = \bigcup_{i=0}^{\infty} \lambda_i: A \rightarrow H$  и  $\lambda$  является гомоморфизмом.

Мы доказали, что  $A$  является свободным произведением алгебр  $A_i, i \in I: A = \prod_{i \in I}^* A_i$ .

**ТЕОРЕМА.** *Подалгебра  $U$  свободного произведения  $\prod_{i \in I}^* A_i$  алгебр  $A_i (i \in I)$  разлагается в свободное произведение непустых пересечений  $U \cap A_i (i \in I)$  и свободной алгебры.*

**Доказательство.** Положим, что  $U_{2e+1}$  обозначает множество термов  $y_1 \dots y_n \omega_i, i = 1, \dots, m$ , таких, что  $y_1 \dots y_n \omega_i \in U \cap \omega_i (A^{(2e)})$ , а среди  $y_1, \dots, y_n$  существует  $y_k$  такой, что  $y_k \notin U, e = 0, 1, 2, \dots$ .  $U_{2e+2}$  обозначает множество термов  $y_1 \dots y_m \varphi_i, i = 1, \dots, n$ , таких, что  $y_1 \dots y_m \varphi_i \in U \cap \varphi_i (A^{(2e+1)})$  и среди  $y_1, \dots, y_m$  есть  $y_k$  такой, что  $y_k \notin U, e = 0, 1, 2, \dots$ . Пусть  $Z = U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_{2s+1} \cup U_{2s+2} \cup \dots$ . Докажем, что  $U = \prod_{i \in I}^* (U \cap A_i) * F(Z)$ , где  $F(Z)$  — свободная  $\mathfrak{A}_{m,n}$ -алгебра с системой свободных образующих  $Z$ .

Проверим вначале, что  $Z$  является  $\langle \omega_1, \dots, \omega_m, \varphi_1, \dots, \varphi_n \rangle$ -чистым множеством. Множество  $U_1$  состоит из термов  $y_1 \dots y_n \omega_i \in \omega_i (A^{(0)}), i = 1, \dots, m$ , где  $y_1, \dots, y_n \in A^{(0)}$  и среди  $y_1, \dots, y_n$  есть элемент  $y_k, y_k \notin U$ , в то время как все  $y_1 \dots y_n \omega_i$  из  $U$ . По построению,  $U_1$  является  $\langle \omega_1, \dots, \omega_m \rangle$ -чистым.  $U_1$  также  $\langle \varphi_1, \dots, \varphi_n \rangle$ -чисто, так как результат операции  $\varphi_i$  над элементами из  $A^{(1)} \setminus A^{(0)}$  принадлежит  $A^{(0)}$ . Рассмотрим  $U_1 \cup U_2$ . Пусть  $y_1, \dots, y_n \in U_1 \cup U_2$  и в  $U_1 \cup U_2$  определен терм  $y_1 \dots y_n \omega_i, i = 1, \dots, m$ . Если среди  $y_1, \dots, y_n$  есть элементы из  $U_1$ , то обязательно есть и элементы из  $U_2$  ( $U_1$  —  $\langle \omega_i \rangle$ -чисто), а поэтому разрешима в  $A^{(1)}$  система уравнений (5). Пусть  $y_k \notin U_1, k = 1, \dots, n$ . Если  $u_1, \dots, u_m$  — решение системы (5), то  $y_1 \dots y_n \omega_i = u_i \in U, \forall i, i = 1, \dots, m$ , а поэтому  $u_1 \dots u_m \varphi_k = y_k \notin U_2$ . Это противоречие доказывает  $\langle \omega_1, \dots, \omega_m \rangle$ -

чистоту множества  $U_1 \cup U_2$ . По определению  $U_2$  и заданию операций  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  в  $A^{(2)}$   $U_1 \cup U_2$  будет  $\langle \varphi_1, \dots, \dots, \varphi_n \rangle$ -чистым.

Предположим, что мы доказали  $\langle \omega_1, \dots, \omega_m, \varphi_1, \dots, \dots, \varphi_n \rangle$ -чистоту множества  $\bigcup_{i=1}^{2s} U_i$ .

Рассмотрим множество  $\bigcup_{i=1}^{2s+1} U_i$ . Само задание множества  $\bigcup_{i=1}^{2s+1} U_i$  обеспечивает его  $\langle \omega_1, \dots, \omega_m \rangle$ -чистоту. Пусть

$y_1, \dots, y_m \in \bigcup_{i=1}^{2s+1} U_i$  и  $y_1 \dots y_m \varphi_i \in \bigcup_{i=1}^{2s+1} U_i$ . В силу чистоты

$\bigcup_{i=1}^{2s} U_i$  среди  $y_1, \dots, y_m$  есть  $y_k$  такой, что  $y_k \in U_{2s+1}$ .

Тогда в  $A^{(2s)}$  разрешима система уравнений (4). Если  $u_1, \dots, u_n$  — решение этой системы, то  $y_k = u_1 \dots \dots u_n \omega_k \notin U_{2s+1}$ , вопреки предположению, так как  $u_1, \dots, \dots, u_n \in U$ .

Рассмотрим множество  $\bigcup_{i=1}^{2s+2} U_i$ . Это множество  $\langle \varphi_1, \dots, \dots, \varphi_n \rangle$ -чисто по самому его заданию. Пусть  $y_1, \dots, y_n,$

$y_1 \dots y_n \omega_i \in \bigcup_{i=1}^{2s+2} U_i$ . Среди элементов  $y_1, \dots, y_n$  есть тогда

$y_k, y_k \in U_{2s+2}$ . В  $A^{(2s+1)}$  разрешима система (5), и если  $u_1, \dots, u_m$  — решение системы (5), то  $y_k = u_1 \dots u_m \varphi_k \notin \notin U_{2s+2}$ , так как  $y_1 \dots y_n \omega_i = u_i \in U \forall i, i = 1, \dots, m$ .

Таким образом,  $Z$  —  $\langle \omega_1, \dots, \omega_m, \varphi_1, \dots, \varphi_n \rangle$ -чистое множество. Покажем, что  $\{Z\} = F(Z)$ . Пусть  $H \in \mathfrak{A}_{m,n}$  и  $\rho: Z \rightarrow H$  — произвольное отображение.

Будем считать, что  $\rho = \bigcup_{i=1}^{\infty} \rho_i$ , где  $\rho_i: U_i \rightarrow H$ . Зададим

отображение  $\bar{\rho}_2: A^{(2)} \cap \{Z\} \rightarrow H$  по правилу: если  $y \in A^{(1)} \cap \{Z\} = U_1$ , то  $y \bar{\rho}_2 = y \rho_1$ ; если  $y \in U_2$ , то  $y \bar{\rho}_2 = y_2 \rho$ ; если

$$y \in A^{(2)} \cap \{Z\} \setminus [U_1 \cup U_2],$$

то  $y = y_1 \dots y_m \varphi_i$  (причем это представление однозначно:  $y \in \varphi_i(A^{(1)})$ ), где  $y_1, \dots, y_m \in A^{(1)} \cap \{Z\}$ . Полагаем в этом случае

$$y \bar{\rho}_2 = y_1 \rho_1 \dots y_m \rho_1 \varphi_i. \quad (9)$$

Так определенное отображение  $\bar{\rho}_2$  является в силу (9)  $\langle \varphi_1, \dots, \varphi_n \rangle$ -гомоморфизмом и  $\rho_1 \cup \rho_2 \subset \bar{\rho}_2$ . Пусть в  $A^{(2)} \cap \{Z\}$  для некоторых  $y_1, \dots, y_n$  определен терм  $y_1 \dots y_n \omega_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Тогда среди  $y_1, \dots, y_n$  существует  $y_k$ ,  $y_k \notin A^{(1)} \cap \{Z\}$  и разрешима система (5). Пусть  $u_1, \dots, u_m$  — решение системы (5). Тогда  $u_1, \dots, u_m \in A^{(1)} \cap \{Z\}$ . Получаем,  $y_1 \dots y_n \omega_i = u_i$ . В силу (9)  $y_1 \dots y_n \omega_i \bar{\rho}_2 = u_i \bar{\rho}_2 = u_i \rho_1 = u_1 \rho_1 \dots u_m \rho_1 \varphi_1 \dots u_1 \rho_1 \dots u_m \rho_1 \varphi_n \omega_1 = y_1 \bar{\rho}_2 \dots y_m \bar{\rho}_2 \omega_i$ , а поэтому  $\bar{\rho}_2$  является гомоморфизмом. Пусть мы уже построили гомоморфизм  $\bar{\rho}_{2s}: A^{(2s)} \cap \{Z\} \rightarrow H$ , который про-

должает отображение  $\bigcup_{i=1}^{2s} \rho_i$ . Зададим отображение  $\bar{\rho}_{2s+1}: A^{(2s+1)} \cap \{Z\} \rightarrow H$  по правилу: если  $y \in A^{(2s)} \cap \{Z\}$  то  $y \bar{\rho}_{2s+1} = y \bar{\rho}_{2s}$ ; если  $y \in U_{2s+1}$ ; то  $y \bar{\rho}_{2s+1} = y \rho_{2s+1}$ , если  $y \in A^{(2s+1)} \cap \{Z\} \setminus [(A^{(2s)} \cap \{Z\}) \cup U_{2s+1}]$ , то  $y = y_1 \dots y_n \omega_i$ , где  $y_1, \dots, y_n \in A^{(2s)} \cap \{Z\}$ , и полагаем в этом случае

$$y \bar{\rho}_{2s+1} = y_1 \bar{\rho}_{2s} \dots y_n \bar{\rho}_{2s} \omega_i. \quad (10)$$

Это правило гарантирует  $\langle \omega_1, \dots, \omega_m \rangle$ -гомоморфность отображения  $\bar{\rho}_{2s+1}$ . Пусть для  $y_1, \dots, y_m \in A^{(2s+1)} \cap \{Z\}$  в  $A^{(2s+1)} \cap \{Z\}$  определен  $y_1 \dots y_m \varphi_i$ . Тогда, если  $y_1, \dots, y_m \in A^{(2s)}$ , то  $y_1 \dots y_m \varphi_i \in A^{(2s)} \cap \{Z\}$ , а поэтому  $y_1 \dots y_m \varphi_i \bar{\rho}_{2s+1} = y_1 \dots y_m \varphi_i \bar{\rho}_{2s} = y_1 \bar{\rho}_{2s} \dots y_m \bar{\rho}_{2s} \varphi_i = y_1 \bar{\rho}_{2s+1} \dots y_m \bar{\rho}_{2s+1} \varphi_i$ . Если же среди  $y_1, \dots, y_m$  есть  $y_k$ ,  $y_k \in \omega_k (A^{(2s)})$ , то в  $A^{(2s)}$  разрешима система (4). Если  $u_1, \dots, u_n$  — решение системы (4), то

$$y_1 \dots y_m \varphi_i = u_i, \quad i = 1, \dots, n; \quad (11)$$

$$y_j = u_1 \dots u_n \omega_j, \quad j = 1, \dots, m. \quad (12)$$

Можно утверждать, что  $y_k \notin U_{2s+1}$ . Действительно,  $y_1, \dots, y_m \in U$  по предположению; из (11) следует, что  $u_1, \dots, u_n \in U$ , а поэтому  $y_k = u_1 \dots u_n \omega_k$  в  $U_{2s+1}$  лежать не может. Тогда  $u_1, \dots, u_n \in A^{(2s)} \cap \{Z\}$ , а поэтому в силу (10), (12)  $y_1 \dots y_m \varphi_i \bar{\rho}_{2s+1} = u_i \bar{\rho}_{2s+1} = u_i \bar{\rho}_{2s} = u_1 \bar{\rho}_{2s} \dots u_n \bar{\rho}_{2s} \omega_1 \dots u_1 \bar{\rho}_{2s} \dots u_n \bar{\rho}_{2s} \omega_m \varphi_i = y_1 \bar{\rho}_{2s+1} \dots y_m \bar{\rho}_{2s+1} \varphi_i$ .

Мы доказали гомоморфность отображения  $\bar{\rho}_{2s+1}$ . Аналогично строится  $\bar{\rho}_{2s+2}$  и т. д.  $\rho = \bigcup_{i=2}^{\infty} \bar{\rho}_i$  будет гомомор-

физмом  $\{Z\}$  в  $H$ . Итак,  $\{Z\} = F(Z)$ . Мы доказали, что  $F(Z) \subset U$ ; по условию  $A_i \cap U \subset U$ ,  $i \in I$ . Пусть  $H$  — произвольная  $\mathfrak{A}_{m,n}$ -алгебра и  $\tau_0: F(Z) \rightarrow H$ ,  $\tau_i: U \cap A_i \rightarrow H$ ,  $i \in I$ , — некоторые гомоморфизмы. Отображение  $\bigcup_{i \in I} \tau_i: \bigcup_{i \in I} (U \cap A_i) \rightarrow H$  будет гомоморфизмом по определению операций в  $A^{(0)}$ . Определим отображение  $\bar{\tau}_1: A^{(1)} \cap U \rightarrow H$  по правилу: если  $y \in A^{(0)} \cap U$ , то  $y\bar{\tau}_1 = y(\bigcup_{i \in I} \tau_i)$ ; если  $y \in A^{(1)} \cap F(Z) = U_1$ , то  $y\bar{\tau}_1 = y\tau_0$ ; если  $y \in U \cap A^{(1)} \setminus [(U \cap A^{(0)}) \cup U_1]$ , то  $y = y_1 \dots y_n \omega_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  ( $y_1, \dots, y_n \in A^{(0)} \cap U$ ). Полагаем в этом случае

$$y\bar{\tau}_1 = y_1 \left( \bigcup_{i \in I} \tau_i \right) \dots y_n \left( \bigcup_{i \in I} \tau_i \right) \omega_i. \quad (13)$$

Это определение гарантирует  $\langle \omega_1, \dots, \omega_m \rangle$ -гомоморфность  $\bar{\tau}_1$ . Пусть для элементов  $y_1, \dots, y_m \in A^{(1)} \cap U y_1 \dots y_m \varphi_j$  в  $A^{(1)} \cap U$ . Если  $y_1, \dots, y_m \in A^{(0)}$ , то  $y_1 \dots y_m \varphi_j$  в  $A^{(0)} \cap U$ , а поэтому  $\bar{\tau}_1$  сохраняет операцию  $\varphi_j$ , так как на  $A^{(0)} \cap U \bar{\tau}_1$  совпадает с  $\bigcup_{i \in I} \tau_i$ . Если среди  $y_1, \dots, y_m$  есть  $y_k$ ,  $y_k \notin A^{(0)}$ , то в  $A^{(0)}$  разрешима система (4). Пусть  $u_1, \dots, u_n$  — решение этой системы. Тогда  $u_1, \dots, u_n \in U \cap A^{(0)}$ , а поэтому в силу (13)

$$\begin{aligned} y_1 \dots y_m \varphi_j \bar{\tau}_1 &= u_j \bar{\tau}_1 = u_j \left( \bigcup_{i \in I} \tau_i \right) = u_1 \left( \bigcup_{i \in I} \tau_i \right) \dots u_n \left( \bigcup_{i \in I} \tau_i \right) \omega_1 \dots \\ &\dots u_1 \left( \bigcup_{i \in I} \tau_i \right) \dots u_n \left( \bigcup_{i \in I} \tau_i \right) \omega_m \varphi_j = y_1 \bar{\tau}_1 \dots y_m \bar{\tau}_1 \varphi_j. \end{aligned}$$

Мы доказали гомоморфность отображения  $\bar{\tau}_1$ .

Пусть мы построили уже последовательность гомоморфизмов

$$\bar{\tau}_1 \subset \bar{\tau}_2 \subset \dots \subset \bar{\tau}_{2e-2} \subset \bar{\tau}_{2e-1}, \quad (14)$$

где  $\bar{\tau}_i: A^{(i)} \cap U \rightarrow H$ ,  $i = 1, \dots, 2e - 1$ . Определим отображение  $\bar{\tau}_{2e}: U \cap A^{(2e)} \rightarrow H$  по правилу: если  $y \in U \cap A^{(2e-1)}$ , то  $y\bar{\tau}_{2e} = y\bar{\tau}_{2e-1}$ ; если  $y \in U_{2e}$ , то  $y\bar{\tau}_{2e} = y\tau_0$ ; если  $y \in U \cap A^{(2e)} \setminus [(A^{(2e-1)} \cap U) \cup U_{2e}]$ , то  $y = y_1 \dots y_m \varphi_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , ( $y_1, \dots, y_m \in U \cap A^{(2e-1)}$ ), а поэтому полагаем, что

$$y\bar{\tau}_{2e} = y_1 \bar{\tau}_{2e-1} \dots y_m \bar{\tau}_{2e-1} \varphi_i. \quad (15)$$

Это определение задает  $\bar{\tau}_{2e} \langle \varphi_1, \dots, \varphi_n \rangle$ -гомоморфизмом. Пусть для элементов  $y_1, \dots, y_n \in U \cap A^{(2e)} y_1 \dots y_n \omega_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ , в  $U \cap A^{(2e)}$ . Тогда если  $y_1, \dots, y_n \in \in A^{(2e-1)}$ , то  $y_1 \dots y_n \omega_j \in U \cap A^{(2e-1)}$ , а поэтому по определению  $\bar{\tau}_{2e}$  сохраняет операцию  $\omega_j$ . Предположим теперь, что среди  $y_1, \dots, y_n$  есть  $y_k$ ,  $y_k \notin A^{(2e-1)}$ . Тогда в  $A^{(2e-1)}$  разрешима система (5). Если  $u_1, \dots, u_m$  — решение системы (5), то  $u_1, \dots, u_m \in U \cap A^{(2e-1)}$ , а поэтому в силу (15)

$$y_1 \dots y_n \omega_j \bar{\tau}_{2e} = u_j \bar{\tau}_{2e} = u_j \bar{\tau}_{2e-1} = u_1 \bar{\tau}_{2e-1} \dots u_m \bar{\tau}_{2e-1} \varphi_1 \dots \\ \dots u_1 \bar{\tau}_{2e-1} \dots u_m \bar{\tau}_{2e-1} \varphi_n \omega_j = y_1 \bar{\tau}_{2e} \dots y_m \bar{\tau}_{2e} \omega_j.$$

Последовательность (14) получила пополнение:  $\bar{\tau}_{2e-1} \subset \bar{\tau}_{2e}$ .

В итоге  $\bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{\tau}_i = \bar{\tau}$  будет гомоморфизмом из  $U$  в  $H$ , что и доказывает теорему.

**З а м е ч а н и е.** Многообразие  $\mathfrak{B}_{m,n}$  определяется системой операций  $\omega_1, \dots, \omega_m, \varphi_1, \dots, \varphi_n$  и системой тождеств (1), (см. [1]). Для этого многообразия также справедлива доказанная теорема.

Армавирский государственный  
педагогический институт

Поступило  
18.V.1971

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- [1] С м и р н о в Д. М., Решетки многообразий и свободные алгебры, Сиб. матем. ж., т. 10, № 5 (1969), 1144—1160.
- [2] А к а т а е в А. А., С м и р н о в Д. М., Решетки подмногообразий многообразий алгебр, семинар «Алгебра и логика», Новосибирск, 7, № 1 (1968), 5—25.
- [3] А к а т а е в А. А., О многообразиях  $\mathfrak{A}_{m,n}$ , семинар «Алгебра и логика», Новосибирск, 9, № 2 (1970), 127—136.
- [4] S w i e r c z k o w s k i S., On isomorphic free algebras, Fund. Math., 50, № 1 (1961), 35—44.