



Общероссийский математический портал

Г. Г. Магарил-Ильяев, Оптимальная интерполяция и принцип Лагранжа, *Владикавказ. матем. журн.*, 2004, том 6, номер 4, 42–47

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.168

25 марта 2025 г., 16:09:55



УДК 517.5

ОПТИМАЛЬНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ И ПРИНЦИП ЛАГРАНЖА¹

Г. Г. Магарил-Ильяев

*Дорогому учителю Владимиру Михайловичу
Тихомирову с благодарностью за науку*

На примере задачи интерполяции, демонстрируется применение принципа Лагранжа для решения задач оптимального восстановления линейных функционалов.

Задача интерполяции, которая здесь рассматривается, заключается в следующем. Пусть на отрезке $[a, b]$ заданы n точек $a \leq t_1 < \dots < t_n \leq b$, и в этих точках известны значения некоторой функции $x(\cdot)$, т. е. известны числа $x(t_1), \dots, x(t_n)$, а мы хотим определить значение этой функции в другой точке $\tau \in [a, b]$, где $\tau \neq t_i$, $1 \leq i \leq n$. Стандартный прием состоит в том, что строят полином $p(\cdot)$ степени $n - 1$ такой, что $p(t_i) = x(t_i)$, $1 \leq i \leq n$ (он определен однозначно и называется *интерполяционным полиномом Лагранжа*) и считают, что $x(\tau) = p(\tau)$. Можно поступить проще: соединяя точки $(t_i, x(t_i))$ и $(t_{i+1}, x(t_{i+1}))$, $i = 1, \dots, n - 1$, отрезками прямых, получим кусочно линейную функцию $f(\cdot)$ и будем считать, что $x(\tau) = f(\tau)$. Можно придумать и другие способы восстановления (как мы будем говорить) функции $x(\cdot)$ в точке τ . При этом ясно, что до тех пор пока нет никакой априорной информации о функции $x(\cdot)$, мы не можем отдать предпочтение ни одному из таких способов. Предположим теперь, что такая информация о функции $x(\cdot)$ имеется и она заключается в том, что $x(\cdot)$ принадлежит некоторому фиксированному классу функций C на отрезке $[a, b]$. Такого рода информация может появиться, например, из следующих соображений: пусть функция $x(\cdot)$ имеет некую физическую природу и известно (в силу этой природы), что резкие скачки $x(\cdot)$ невозможны. Формализовать это можно, например, так: производная функции $x(\cdot)$ по модулю не превосходит некоторого положительного числа. Тем самым выделится класс функций C , которому наша функция принадлежит.

Итак, будем исходить из того, что мы наблюдаем значения функции $x(\cdot)$, про которую известно, что она принадлежит некоторому классу функций C . В этой ситуации мы уже можем сравнивать различные способы восстановления функций из C в точке τ . Поступаем следующим образом. Пусть $m(\cdot)$ — произвольная функция n переменных. Для каждого $x(\cdot)$ в качестве оценки $x(\tau)$ возьмем число $m(x(t_1), \dots, x(t_n))$. Эффективность такого метода восстановления $x(\tau)$ на классе C будем характеризовать величиной

$$e(\tau, C, t_1, \dots, t_n; m(\cdot)) = \sup_{x(\cdot) \in C} |x(\tau) - m(x(t_1), \dots, x(t_n))|, \quad (1)$$

© 2004 Магарил-Ильяев Г. Г.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №02-01-39012 и №02-01-00386), программ государственной поддержки ведущих научных школ Российской Федерации (НШ-304.2003.1) и «Университеты России» (УР.04.03.067), а также при поддержке U.S. CRDF-R.F. Ministry of Education Award VZ-0100-0.

дающей максимальное (на классе) расхождение между истинным значением функции в точке τ и оценкой этого значения с помощью функции (метода) $m(\cdot)$.

Заметим, что оценка $x(\tau)$ с помощью интерполяционного полинома Лагранжа состоит в том, что мы берем число $p(\tau) = \sum_{i=1}^n l_i(\tau)x(t_i)$, где $l_i(\cdot)$, $1 \leq i \leq n$, — полиномы степени $n - 1$ такие, что $l_i(\tau_j) = 1$, если $i = j$, и $l_i(\tau_j) = 0$, если $i \neq j$. Другими словами, в качестве метода восстановления $x(\tau)$ мы рассматриваем линейную функцию $m(\xi_1, \dots, \xi_n) = \sum_{i=1}^n l_i(\tau)\xi_i$.

Нас интересует вопрос, на каком методе восстановления $m(\cdot)$ величина (1) достигает своего минимального значения и чему это значение равно? Точнее говоря, нас интересует величина

$$E(\tau, C, t_1, \dots, t_n) = \inf_{m(\cdot)} e(\tau, C, t_1, \dots, t_n; m(\cdot)) \quad (2)$$

(где нижняя грань берется по всем функциям n переменных), которая называется *погрешностью оптимального восстановления* и метод $\hat{m}(\cdot)$, на котором эта нижняя грань достигается, называемый *оптимальным методом восстановления*.

Нахождение оптимальной погрешности восстановления и оптимального метода восстановления будем называть *задачей оптимальной интерполяции на классе C* .

В данной работе мы решаем эту задачу для случая, когда $C = W_\infty^n([a, b])$ (совокупность функций $x(\cdot)$ на $[a, b]$, у которых $(n - 1)$ -ая производная $x^{(n-1)}(\cdot)$ абсолютно непрерывна на $[a, b]$ и $\|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_\infty([a, b])} \leq 1$) и показываем, что интерполяционный полином Лагранжа — оптимальный метод восстановления. Основная цель, которую мы при этом преследуем — продемонстрировать применение принципа Лагранжа для решения задачи оптимального восстановления. Этот принцип позволяет получать решения многих экстремальных задач, в некотором смысле, автоматически. Он заключается в том, что надо составить функцию (функцию Лагранжа), которая есть сумма минимизируемого или максимизируемого функционала и функций, задающих различные ограничения с неопределенными множителями (множителями Лагранжа) и тогда решение исходной задачи удовлетворяет необходимым условиям минимума в более простой задаче — в задаче на минимум функции Лагранжа без ограничений (при некотором наборе множителей Лагранжа). Этот прием (который впервые был сформулировал Лагранжем для задач с ограничениями типа равенств) оказался универсальным — он верен (при весьма широких предположениях) для любых экстремальных задач с ограничениями типа равенств, неравенств и включений. Если задача выпукла, то функция Лагранжа на решении достигает минимума и более того, если множитель Лагранжа при минимизируемом (или максимизируемом) функционале отличен от нуля, то функция, которая удовлетворяет необходимым условиям минимума функции Лагранжа, является решением исходной задачи. Подробнее о принципе Лагранжа и его приложениях см. в [1] и [2]. Не бояться применять принцип Лагранжа для решения самых различных задач я научился у В. М. Тихомирова.

Применением принципа Лагранжа, доказывается следующая

Теорема 1. *Справедливо равенство*

$$E(\tau, W_\infty^n([a, b]), t_1, \dots, t_n) = \frac{1}{n!} \left| \prod_{j=1}^n (\tau - t_j) \right|$$

и метод $\hat{m}(\xi_1, \dots, \xi_n) = \sum_{i=1}^n l_i(\tau)\xi_i$ (интерполяционный полином Лагранжа) является оптимальным.

◁ Свяжем с задачей оптимального восстановления следующую экстремальную задачу

$$x(\tau) \rightarrow \max, \quad x(t_i) = 0, \quad 1 \leq i \leq n, \quad x(\cdot) \in W_\infty^n([a, b]) \quad (3)$$

и обозначим через $S(\tau, W_\infty^n([a, b]), t_1, \dots, t_n)$ ее значение. Покажем, что

$$E(\tau, W_\infty^n([a, b]), t_1, \dots, t_n) \geq S(\tau, W_\infty^n([a, b]), t_1, \dots, t_n). \quad (4)$$

Действительно, пусть $x(\cdot)$ — допустимая функция в (3). Тогда и $-x(\cdot)$ — допустимая функция в этой задаче и мы имеем для любого метода $m(\cdot)$

$$\begin{aligned} 2x(\tau) &\leq |x(\tau) - m(0) + x(\tau) + m(0)| \leq |x(\tau) - m(0)| + | -x(\tau) - m(0)| \\ &\leq 2 \sup_{\substack{x(\cdot) \in W_\infty^n([a, b]) \\ x(t_i) = 0, i=1, \dots, n}} |x(\tau) - m(0)| \leq 2 \sup_{x(\cdot) \in W_\infty^n([a, b])} |x(\tau) - m(x(t_1), \dots, x(t_n))|. \end{aligned}$$

Переходя справа к нижней грани по всем методам $m(\cdot)$, а затем слева к верхней грани по всем допустимым в (3) функциям $x(\cdot)$, получаем требуемое утверждение. ▷

Задача оптимального восстановления является (в определенном смысле) двойственной к задаче (3) (см. [2]) и поэтому решив последнюю, мы найдем и оптимальный метод и погрешность оптимального восстановления.

Задачу (3) запишем формально следующим образом

$$\begin{aligned} \int_a^b \delta(t - \tau)x(t) dt &\rightarrow \max, \\ \int_a^b \delta(t - t_i)x(t) dt &= 0, \quad 1 \leq i \leq n, \quad x^{(n)}(t) = u(t), \quad |u(t)| \leq 1, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\delta(\cdot - \xi)$ — δ -функция в точке ξ и последнее неравенство понимается п. в.

Мы выпишем необходимые условия максимума в ней, рассуждая эвристически, не ссылаясь ни на какие точные результаты, а руководствуясь лишь здравым смыслом и верой в то, что принцип Лагранжа верен. Это приведет нас к некоторым соотношениям, справедливость которых мы уже проверим непосредственно. Так как задача (3) выпукла, то эти соотношения позволят нам найти ее решение, а затем доказать все утверждения теоремы.

Отметим, что внешне задача (5) — стандартная задача оптимального управления и можно было бы сразу выписать необходимые условия максимума, но мы их получим, исходя из общих рассуждений.

Выпишем функцию Лагранжа задачи, не включая в нее ограничение $|u(t)| \leq 1$ и воспринимая ограничение $x^{(n)}(t) = u(t)$ как континуум равенств, каждое из которых надо умножить на множитель Лагранжа $p(t)$, а затем их «просуммировать»:

$$\mathcal{L}(x(\cdot), u(\cdot), \lambda) = \int_{-1}^1 ((-\delta(t - \tau) + \sum_{i=1}^n \mu_i \delta(t - t_i))x(t) + p(t)(x^{(n)}(t) - u(t)) dt.$$

Здесь $\lambda = (-1, \mu_1, \dots, \mu_n, p(\cdot))$ (мы взяли множитель Лагранжа при максимизируемом функционале равным -1 , чтобы полученные необходимые условия максимума оказались и достаточными).

Если пара $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ — решение задачи (5), то согласно принципу Лагранжа существует такое λ , что функция Лагранжа должна достигать минимума в этой точке по $x(\cdot)$ и по $u(\cdot)$, т. е. должны выполняться условия:

$$\mathcal{L}_{x(\cdot)}(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot), \lambda) = 0, \quad \min_{|u(t)| \leq 1} \mathcal{L}(\hat{x}(\cdot), u(\cdot), \lambda) = \mathcal{L}(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot), \lambda). \quad (6)$$

Первое соотношение означает, что

$$\int_{-1}^1 \left(\left(-\delta(t - \tau) + \sum_{i=1}^n \mu_i \delta(t - t_i) \right) x(t) + p(t) x^{(n)}(t) \right) dt = 0 \quad \forall x(\cdot).$$

Интегрируя последнее слагаемое под знаком интеграла n раз по частям, приходим к равенству

$$\int_a^b \left(-\delta(t - \tau) + \sum_{i=1}^n \mu_i \delta(t - t_i) + (-1)^n p^{(n)}(t) \right) x(t) dt + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (p^{(k)}(b) x^{(n-k-1)}(b) - p^{(k)}(a) x^{(n-k-1)}(a)) = 0,$$

верному для всех $x(\cdot)$, и тем самым

$$-\delta(t - \tau) + \sum_{i=1}^n \mu_i \delta(t - t_i) + (-1)^n p^{(n)}(t) = 0 \quad (7)$$

и

$$p^{(k)}(a) = p^{(k)}(b) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n - 1. \quad (8)$$

Из второго соотношения в (6) вытекает, что

$$\hat{x}^{(n)}(t) = \text{sign } p(t). \quad (9)$$

Соотношения (7), (8) и (9) и есть необходимые условия максимума в задаче (3), которые можно было сразу выписать.

Теперь проанализируем полученные соотношения. Интегрируя (7), получаем, что

$$p(t) = \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \left((t - \tau)_+^{n-1} - \sum_{j=1}^n \mu_j (t - t_j)_+^{n-1} \right). \quad (10)$$

Покажем, что эта функция (с произвольными μ_i , $1 \leq i \leq n$) сохраняет знак на $[a, b]$. Действительно, если это не так, то $p(\cdot)$ имеет нуль на (a, b) . Поскольку $p(a) = p(b) = 0$, то по теореме Ролля $\dot{p}(\cdot)$ имеет на (a, b) не менее двух нулей. Продолжая, получим с учетом (8), что кусочно линейная функция $p^{(n-2)}(\cdot)$ имеет на (a, b) не менее $n - 1$ нуля, а значит, снова в силу (8), на отрезке $[a, b]$ она имеет не менее $n + 1$ нуля. Тогда по элементарному следствию из теоремы Ролля кусочно постоянная функция $p^{(n-1)}(\cdot)$ имеет на $[a, b]$ не менее n перемен знака. Но эта функция с n интервалами постоянства (она может иметь разрывы только в точках τ, t_1, \dots, t_n) и поэтому у нее не может быть больше, чем $n - 1$ перемен знака. Итак, $p(\cdot)$ не меняет знак на $[a, b]$ и тогда согласно (9) функция $\hat{x}(\cdot)$ есть полином n -го порядка со старшим коэффициентом по модулю равным $1/n!$ По

условию $\hat{x}(t_j) = 0$, $1 \leq j \leq n$, и очевидно, $\hat{x}(\tau) > 0$. Этими условиями $\hat{x}(\cdot)$ определяется однозначно: $\hat{x}(t) = \alpha(1/n!) \prod_{j=1}^n (t - t_j)$, где $\alpha = \text{sign} \prod_{j=1}^n (\tau - t_j)$.

Определим теперь числа μ_j , $1 \leq j \leq n$. Возьмем любой полином $q(\cdot)$ степени не выше $n - 1$, умножим на него обе части равенства (7) и проинтегрируем по отрезку $[a, b]$. Тогда получим $q(\tau) = \sum_{j=1}^n \mu_j q(t_j)$. Подставляя сюда, определенные выше полиномы $l_j(\cdot) \in \mathcal{P}_{n-1}$, найдем, что $\mu_j = l_j(\tau)$, $j = 1, \dots, n$. Таким образом,

$$q(\tau) = \sum_{j=1}^n l_j(\tau) q(t_j). \quad (11)$$

Обозначим через $\mathcal{W}_\infty^n([a, b])$ пространство функций на $[a, b]$, у которых $(n - 1)$ -ая производная абсолютно непрерывна, а n -ая производная принадлежит $L_\infty([a, b])$ (так что $W_\infty^n([a, b]) = \{x(\cdot) \in \mathcal{W}_\infty^n([a, b]) : \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_\infty([a, b])} \leq 1\}$). Умножим (7) на функцию $x(\cdot)$ из этого пространства и проинтегрируем по частям. Тогда будем иметь

$$x(\tau) - \sum_{j=1}^n l_j(\tau) x(t_j) = \int_a^b p(t) x^{(n)}(t) dt. \quad (12)$$

Итак, рассуждая эвристически, мы получили соотношения (11) и (12). Теперь будем рассуждать точно. Элементарная проверка показывает, что равенство (11) действительно имеет место для любого полинома степени не выше $n - 1$.

Покажем теперь, что тождество (12) справедливо для любой функции $x(\cdot) \in \mathcal{W}_\infty^n([a, b])$ с функцией $p(\cdot)$, определяемой формулой (10), где $\mu_j = l_j(\tau)$, $1 \leq j \leq n$.

Из определения $p(\cdot)$ сразу следует, что $p^{(k)}(a) = 0$, $k = 0, 1, \dots, n - 1$. Далее $p^{(k)}(b) = 0$, $k = 0, 1, \dots, n - 1$, поскольку полиномы $q_k(t) = (1 - t)^k$, $k = 0, 1, \dots, n - 1$, удовлетворяют (11). Используя это обстоятельство и интегрируя $n - 1$ раз по частям в интеграле справа в (12), убеждаемся после несложных преобразований, что равенство (12) справедливо.

Покажем, что функция $\hat{x}(\cdot)$ — решение задачи (3). Подставляя в (12) любую допустимую в (3) функцию $x(\cdot)$ и оценивая по модулю, будем иметь

$$x(\tau) = \int_a^b p(t) x^{(n)}(t) dt \leq \int_a^b |p(t)| dt.$$

Выше было показано, что $p(\cdot)$ не меняет знака на $[a, b]$ и поэтому функция $\hat{x}^{(n)}(\cdot)$ (которая есть константа) совпадает с точностью до знака с $\text{sign} p(\cdot)$. Подставим $\hat{x}(\cdot)$ в (12) и учитывая, что $\hat{x}(\tau) > 0$, получим

$$\hat{x}(\tau) = \int_a^b p(t) \hat{x}^{(n)}(t) dt = \left| \int_a^b p(t) \text{sign} p(t) dt \right| = \int_a^b |p(t)| dt. \quad (13)$$

Таким образом, $\hat{x}(\cdot)$ — решение задачи (3). Тогда вследствие (4) верно

$$E(\tau, W_\infty^n([a, b]), t_1, \dots, t_n) \geq \hat{x}(\tau) = \frac{1}{n!} \left| \prod_{j=1}^n (\tau - t_j) \right|. \quad (14)$$

Из (12) и (13) для любого $x(\cdot) \in W_\infty^n([a, b])$ имеем

$$\left| x(\tau) - \sum_{j=1}^n l_j(\tau) x(t_j) \right| \leq \int_a^b |p(t)| dt = \hat{x}(\tau) = \frac{1}{n!} \left| \prod_{j=1}^n (\tau - t_j) \right|,$$

т. е.

$$E(\tau, W_\infty^n([a, b]), t_1, \dots, t_n) \leq \frac{1}{n!} \left| \prod_{j=1}^n (\tau - t_j) \right|.$$

Отсюда и (14) следует нужная оценка для $E(\tau, W_\infty^n([a, b]), t_1, \dots, t_n)$ и оптимальность метода $\hat{m}(\xi_1, \dots, \xi_n) = \sum_{j=1}^n l_j(\tau) \xi_j$. \triangleright

Отметим, что если рассматривать задачу оптимальной интерполяции для случая, когда заданы n точек $a \leq t_1 < \dots < t_n \leq b$, а класс $C = W_\infty^r([a, b])$, где $n \neq r$, то при $n < r$ задача не имеет смысла, так как можно построить, например, полином степени n (он, очевидно, будет принадлежать данному классу), который в точке τ принимает сколь угодно большие значения. Если же $n > r$, то задача осмысленна и здесь оптимальным методом будет интерполяционный сплайн. Доказательство получается на том же пути, что и в рассмотренном случае, но нужно воспользоваться еще утверждениями о существовании разного рода сплайнов.

Литература

1. Алесеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление.—М.: Наука, 1979.—429 с.
2. Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М. Выпуклый анализ и его приложения.—М.: Эдиториал УРСС, 2003.—176 с.

Статья поступила 15 ноября 2004 г.

МАГАРИЛ-ИЛЬЯЕВ ГЕОРГИЙ ГЕОРГИЕВИЧ, д. ф.-м. н.
г. Москва, Московский государственный институт радиотехники,
электроники и автоматики (Технический университет)
E-mail: georg@magaril.mcsme.ru