Математические заметки

том 78 выпуск 5 ноябрь 2005

УДК 515.122.4+515.122.536

О БИКОМПАКТНЫХ G-РАСШИРЕНИЯХ

К. Л. Козлов, В. А. Чатырко

Изучается полурешетка бикомпактных G-расширений G-тихоновского пространства X. Показывается, какое множество, содержащее X и содержащееся в максимальном бикомпактном G-расширении $\beta_G X$, должно также содержаться и во всех других бикомпактных G-расширениях пространства X. Указано условие, при выполнении которого $\beta_G X$ можно получить как пополнение по естественной равномерности (близости) на G-пространстве X. Приводятся достаточные условия существования наименьшего (минимального и единственного) бикомпактного G-расширения.

Библиография: 20 названий.

1. Введение и предварительные сведения. Если на тихоновском пространстве X непрерывно действует топологическая группа G, то данное действие может быть непрерывно продолжено только на некоторые (быть может и ни на какие [1]) бикомпактные расширения X, которые называются *бикомпактными G-расширениями*. Существуют различные характеризации бикомпактных G-расширений: через инвариантные близости, согласованные с действием (Ю. М. Смирнов [2]), вполне ограниченные эквиравномерности (М. Мегрелишвили [3]), кольца G-равномерных функций (Я. де Врис [4], Ю. М. Смирнов [2]). В настоящей работе рассматривается вопрос о том, какие подмножества максимального бикомпактного G-расширения $\beta_G X$, содержащие подпространство X, должны присутствовать в любом бикомпактном G-расширении X.

Поводом к постановке этого вопроса послужила статья Ю. М. Смирнова и Л. Стоянова [5], из результатов которой, в частности, вытекает, что у любой вполне ограниченной группы G, действующей самой на себе, существует единственное бикомпактное G-расширение. То есть любое инвариантное подмножество $\beta_G G$, содержащее G, является подмножеством любого (т.е. единственного) бикомпактного G-расширения. Ниже (теорема 1) показано, что любое бикомпактное G-расширение обязано содержать как "пополнение" каждой орбиты (за счет возможности пополнения действующей группы), так и орбиты, состоящие из точек почти открытости действия (см. определение 1), причем получающееся таким образом расширение исходного пространства является его G-расширением. Примеры 2 и 3 показывают независимость двух этих способов "обязательного пополнения" G-пространства в любом бикомпактном G-расширении.

Работа выполнена при поддержке Шведской Королевской академии наук.

Помимо этого дана переформулировка вопроса Я. де Вриса о том, когда $\beta_G X$ совпадает со стоун-чеховской бикомпактификацией βX (следствие 2), и показано, когда максимальное бикомпактное G-расширение можно получить как пополнение по естественной равномерности (расширение по естественной близости), определенной на G-пространстве (теорема 3). Приводятся достаточные условия существования наименьшего, минимального и единственного бикомпактного G-расширения (следствие 3, теорема 4 и следствие 4). Кроме того, сравниваются бикомпактные G-расширения пространства X при различных топологиях на действующей группе (теорема 2).

Все рассматриваемые пространства предполагаются тихоновскими, а отображения пространств непрерывными. Пространства действительных, рациональных и целых чисел обозначаются соответственно через $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$. Для множества A множества $\operatorname{int} A$, $\operatorname{cl} A$ являются его внутренностью и замыканием соответственно.

Если на множестве даны две топологии $\tau_2 \subset \tau_1$, то будем говорить, что топология τ_1 *сильнее* τ_2 ($\tau_1 \geqslant \tau_2$). Топологическое пространство X с топологией τ при необходимости будем обозначать (X, τ).

Пусть $\omega_1 = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ и $\omega_2 = \{V_\beta : \beta \in B\}$ – покрытия пространства X. Обозначение $\omega_1 \succ \omega_2$ означает, что покрытие ω_1 вписано в ω_2. Звезду точки x относительно покрытия ω обозначим $\operatorname{St}(x, \omega)$. Положим $\omega_1 \wedge \omega_2 = \{U_\alpha \cap V_\beta : \alpha \in A,\ \beta \in B\}$, а $\omega_1 \wedge M = \{U_\alpha \cap M : \alpha \in A\}$, где $M \subset X$.

Понятия G-пространства, инвариантного подмножества, орбиты, G-тихоновости, G-расширения и эквивариантного отображения имеются в [6]–[8], [2]. Если в G-пространстве X дано семейство множеств $\gamma = \{O_\alpha : \alpha \in A\}$, то для $g \in G$ положим $g\gamma = \{gO_\alpha : \alpha \in A\}$. В дальнейшем нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть X – G-пространство. Для любых множеств $S \subset G$ и $Y \subset X$ выполняются включения*

$$S \operatorname{cl} Y \subset \operatorname{cl}(SY), \qquad S \operatorname{int} Y \subset \operatorname{int}(SY).$$

Доказательство. Пусть $x \in S \operatorname{cl} Y$. Тогда $x = ht$, где $h \in S$, $t \in \operatorname{cl} Y$. Так как действие непрерывно, для любой окрестности V_x точки x существует окрестность V_t точки t такая, что $V_x \supset hV_t$. Поэтому существует точка $t' \in V_t \cap Y$ такая, что $ht' \in V_x$. Значит, $x \in \operatorname{cl}(SY)$. Первое включение доказано. Второе включение очевидно, так как $S \operatorname{int} Y \subset SY$ и $S \operatorname{int} Y$ – открытое подмножество X.

Лемма 2. *Пусть Y и Z – G-пространства, X – всюду плотное подмножество Y, H – всюду плотная подгруппа G и отображение $f\colon Y \to Z$ таково, что $f(hx) = hf(x)$ для любых $x \in X$, $h \in H$. Тогда f является эквивариантным отображением G-пространств.*

Доказательство. Отображения $f(gy)$ и $gf(y)$, $g \in G$, $y \in Y$, являются непрерывными отображениями из пространства $G \times Y$ в Z, совпадающими на всюду плотном подмножестве $H \times X$. По [9, теорема 1.5.4] они совпадают. Значит, f – эквивариантное отображение.

Всю необходимую информацию о решетках можно найти, например, в [10].

Равномерные структуры на множестве вводятся через семейства покрытий. Необходимые сведения о равномерностях и близостях можно найти в [11], [9].

Равномерность (близость), заданная на топологическом пространстве, называется *согласованной* с его топологией, если она индуцирует исходную топологию пространства. Ниже, если ничего дополнительно не сказано, то термин равномерность (близость) на топологическом пространстве означает согласованность равномерности (близости) с топологией пространства. Семейство всех равномерностей (близостей) на пространстве X является полной верхней полурешеткой с частичным порядком $U_1 \geqslant U_2$, если $U_2 \subset U_1$ ($\delta_1 \geqslant \delta_2$, если из $A\delta_1 B$ следует $A\delta_2 B$).

Для топологической группы G через $\widehat{G}$ будем обозначать пополнение группы по двусторонней равномерности [12].

Через $N_G(e)$ обозначим множество всех открытых окрестностей единицы e группы G, а через U_G – равномерность (не обязательно согласованную с топологией X), состоящую из всех покрытий G-пространства X, в которые можно вписать покрытия вида $\gamma_O = \{Ox : x \in X\}$, $O \in N_G(e)$.

В [13] на G-пространстве X определена близость δ_G (не обязательно согласованная с топологией X):

$$A\delta_G B \text{ тогда и только тогда, когда } OA \cap OB \neq \varnothing \text{ для любого } O \in N_G(e).$$

Лемма 3. *Пусть X – G-пространство. Тогда δ_G – близость, индуцированная* [9] *равномерностью U_G.*

Доказательство. Пусть δ' – близость, индуцированная равномерностью U_G. Она определяется следующим образом: $A\delta' B$ тогда и только тогда, когда для любого $O \in N_G(e)$ существует $x \in X$ такая, что $A \cap Ox \neq \varnothing$, $B \cap Ox \neq \varnothing$. Покажем, что $\delta_G \geqslant \delta'$. Для любого $O \in N_G(e)$ возьмем $V \in N_G(e)$ такое, что $V = V^{-1}$ и $V \subset O$. Если $A\delta_G B$, то существует $x \in X$ такая, что $x \in VA \cap VB$. Тогда очевидно, что $Vx \cap A \neq \varnothing$ и $Vx \cap B \neq \varnothing$, а значит и $A\delta' B$. Соотношение $\delta' \geqslant \delta_G$ доказывается столь же несложно.

2. Полурешетка бикомпактных G-расширений. Для тихоновского пространства X через $K(X)$ обозначим полную верхнюю (в дальнейшем, если этого не будет требоваться, то эти термины будем опускать) полурешетку бикомпактных расширений пространства X (см., например, [9, гл. 3, §3.5]).

Для G-тихоновского пространства X через $K_G(X)$ обозначим множество всех его бикомпактных G-расширений (мы не различаем эквивалентные бикомпактные расширения). На множестве $K_G(X)$ можно ввести частичный порядок, считая $bX \geqslant cX$, если существует эквивариантное отображение $f_{bc}\colon bX \to cX$ такое, что $c = f_{bc} \circ b$, где b, c – эквивариантные вложения X в бикомпактные расширения bX и cX соответственно.

Так же, как и в [9, теорема 3.5.9], можно показать, что $K_G(X)$ является полной верхней полурешеткой бикомпактных G-расширений. Из этого вытекает, в частности, что у G-тихоновского пространства существует максимальное бикомпактное G-расширение – наибольший элемент полурешетки, обозначаемое $\beta_G X$ [6], [14].

Так как любое бикомпактное G-расширение пространства X является его бикомпактным расширением, каждому элементу $K_G(X)$ можно поставить в соответствие элемент $K(X)$. Так определенное отображение является инъективным. Действительно, пусть не эквивалентным бикомпактным G-расширениям b_1X и b_2X ставится в соответствие одна бикомпактификация. Тогда существует гомеоморфизм $h\colon b_1X \to b_2X$ такой, что $b_2 = h \circ b_1$. При этом, так как ограничение h на $b_1(X)$ является эквивариантным отображением, по лемме 2 с заменой f на h, X на $b_1(X)$, Y на b_1X, Z на b_2X h будет эквивариантным отображением и гомеоморфизмом. Значит бикомпактные G-расширения b_1X и b_2X эквивалентны. Поэтому множество $K_G(X)$ можно рассматривать как подмножество $K(X)$.

Покажем, что порядок, индуцируемый на $K_G(X)$ из $K(X)$, и порядок на $K_G(X)$, описанный выше, совпадают. Если существует эквивариантное отображение $h\colon b_1X \to b_2X$ такое, что $b_2 = h \circ b_1$ (т.е. $b_1X \geqslant b_2X$ в порядке на $K_G(X)$), то $b_1X \geqslant b_2X$ и в порядке на $K(X)$ (отображение то же самое). Обратно, если b_1X и $b_2X \in K_G(X)$ и $b_1X \geqslant b_2X$ в порядке $K(X)$, то существует отображение $h\colon b_1X \to b_2X$ такое, что $b_2 = h \circ b_1$. При этом ясно, что отображение $h|_{b_1(X)}$ является эквивариантным. Из леммы 2 с заменой f на h, X на $b_1(X)$, Y на b_1X, Z на b_2X следует, что h будет эквивариантным, т.е. $b_1X \geqslant b_2X$ и в порядке $K_G(X)$.

Операции взятия точной верхней грани в обеих полурешетках одинаковы. Поэтому доказано следующее предложение.

Предложение 1. *Полурешетка $K_G(X)$ является подрешеткой $K(X)$.*

Рассматривая различные действующие на пространстве X группы, можно сравнивать полурешетки их бикомпактных G-расширений, как подрешетки $K(X)$.

Рассмотрим в $\beta_G X$ такое инвариантное подмножество Y, что $X \subset Y$. Так как X всюду плотно в Y, любой элемент $K_G(Y)$ является и элементом $K_G(X)$. Каждому элементу $K_G(Y)$ поставлен в соответствие элемент $K_G(X)$. Легко проверить, что так определенное отображение является инъективным. Поэтому множество $K_G(Y)$ можно рассматривать как подмножество $K_G(X)$. Покажем, что порядок, индуцируемый на $K_G(Y)$ из $K_G(X)$, и порядок на $K_G(Y)$ совпадают.

Пусть бикомпактным G-расширениям b_1Y и b_2Y поставлены в соответствие бикомпактные G-расширения c_1X и c_2X, где $c_i = b_i|_X\colon X \to c_iX = b_iY$, $i = 1, 2$. Ясно, что из $b_1Y \geqslant b_2Y$ вытекает, что $c_1X \geqslant c_2X$. Обратно, если $c_1X \geqslant c_2X$, то существует эквивариантное отображение $h\colon c_1X \to c_2X$ такое, что $c_2 = h \circ c_1$. Для эквивариантных отображений $b_1\colon Y \to b_1Y = c_1X$ и $b_2\colon Y \to b_2Y = c_2X$ выполнено равенство $b_2|_X = h \circ b_1|_X$, так как $b_i|_X = c_i$, $i = 1, 2$, т.е. отображения $h \circ b_1$ и b_2 совпадают на всюду плотном подмножестве X. Значит, они совпадают на Y и $b_1Y \geqslant b_2Y$.

Операции взятия точной верхней грани в обеих полурешетках одинаковы. Поэтому доказано следующее предложение.

Предложение 2. *Полурешетка $K_G(Y)$ является подрешеткой $K_G(X)$, а значит* (*по предложению* 1) *и $K(X)$. Кроме того, $\beta_G Y = \beta_G X$.*

Рассматривая различные инвариантные подмножества $\beta_G X$, содержащие X, можно сравнивать их полурешетки, как подрешетки $K(X)$.

Определение 1. Точку x G-пространства X назовем *точкой почти открытости действия*, если для любой окрестности $O \in N_G(e)$ имеем $x \in \operatorname{int}(\operatorname{cl}(Ox))$.

Замечание 1. Если x – точка почти открытости действия, то и любая точка ее орбиты Gx является точкой почти открытости. Действительно, пусть $y = gx$. Покажем, что для любой окрестности $O \in N_G(e)$ имеем $y \in \operatorname{int}(\operatorname{cl}(Oy))$. Возьмем $V = g^{-1}Og$. Очевидно, что $V \in N_G(e)$. Тогда

$$y = gx \in g(\operatorname{int}(\operatorname{cl}(Vx))) \subset \operatorname{int}(\operatorname{cl}(gVx)) = \operatorname{int}(\operatorname{cl}(Ogx)) = \operatorname{int}(\operatorname{cl}(Oy))$$

по лемме 1.

Отсюда следует, что множество X_G точек почти открытости действия группы G является инвариантным подмножеством X.

Пусть X – подмножество G-пространства Y. Положим $X^G = GX$, $X^G_Y = X^G \cup Y_G$. Легко проверить, что подмножества X^G и X^G_Y являются инвариантными подмножествами Y.

Лемма 4. *Пусть X является всюду плотным подмножеством G-пространства Y, Z – G'-пространство, $f\colon Y \to Z$ – непрерывное замкнутое отображение и его ограничение $f|_X\colon X \to f(X) \subset Z$ является гомеоморфизмом. Кроме того, пусть $h\colon G \to G'$ – гомоморфизм такой, что выполнено условие*

$$f(gy) = h(g)f(y) \qquad \text{для любых} \quad y \in Y, \quad g \in G. \tag{$*$}$$

Тогда отображение $f' = f|_{X^G_Y}\colon X^G_Y \to f(X^G_Y) \subset Z$ является гомеоморфизмом, удовлетворяющим условию $(*)$ с заменой f на f' и Y на X^G_Y.

Более того, если $G = G'$ и $h = \mathrm{id}$, то отображение f' является эквивариантным гомеоморфизмом.

Доказательство. Если $x \in X$, то по [9, лемма 3.5.6] $f^{-1}fx = x$. Покажем, что это условие выполняется и для $x \in X^G_Y$.

Пусть $x \in X^G \setminus X$. Предположим, что существует точка $x' \in Y$, $x' \neq x$, такая, что $x' \in f^{-1}fx$. Так как $x \in X^G$, существует $g \in G$ такое, что $gx \in X$. Тогда, так как отображение f удовлетворяет условию $(*)$, то $f(gx) = h(g)f(x) = h(g)f(x') = f(gx')$, где $gx \in X$ и $gx \neq gx'$. Но это противоречит условию, что $f^{-1}fx = x$ для любой точки $x \in X$. Значит, f взаимно однозначно на X^G.

Пусть теперь $x \in Y_G \setminus X^G$. Предположим, что существует точка $x' \in Y$, $x' \neq x$, такая, что $x' \in f^{-1}fx$. Тогда из непрерывности действия вытекает существование такой окрестности $O \in N_G(e)$, что $\mathrm{cl}(Ox) \cap \mathrm{cl}(Ox') = \varnothing$. При этом $x \in \mathrm{int}(\mathrm{cl}(Ox))$. Из условия $(*)$ и равенства $fx = fx'$ следует, что $f(Ox) = f(Ox')$, а из непрерывности и замкнутости отображения f вытекает равенство $f(\mathrm{cl}(Ox)) = f(\mathrm{cl}(Ox'))$.

Поэтому для любой точки $z \in \mathrm{int}(\mathrm{cl}(Ox)) \cap X$ (напомним, что $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(Ox)) \neq \varnothing$, а X всюду плотно) существует точка $z' \in \mathrm{cl}(Ox')$ такая, что $fz = fz'$. Но это противоречит условию, что $f^{-1}fx = x$ для любой точки $x \in X$. Значит, отображение f удовлетворяет условию $f^{-1}fx = x$ для любой точки $x \in X^G_Y$.

Отображение f' является непрерывным, взаимно однозначным и замкнутым, как ограничение замкнутого отображения на полный прообраз, поэтому f' является гомеоморфизмом. Оно удовлетворяет условию $(*)$ с заменой f на f' и Y на X^G_Y, так как подмножество X^G_Y является инвариантным.

В [15] М. Мегрелишвили привел достаточные условия для пополнения действия. Из [15, теорема 3.1 и лемма 1.3] вытекает, что действие группы G на любом бикомпактном пространстве продолжается до действия пополненной (по двусторонней равномерности) группы $\widehat{G}$ на нем. Таким образом, действие группы G на любом бикомпактном G-расширении пространства X продолжается до действия группы $\widehat{G}$. Положим

$$\widehat{X} = X^{\widehat{G}}_{\beta_G X} = X^{\widehat{G}} \cup (\beta_G X)_{\widehat{G}}.$$

Отметим, что $\widehat{X}$ является инвариантным подмножеством $\beta_G X$ как относительно действия группы $\widehat{G}$, так и действия ее подгруппы G.

Теорема 1. *Пусть X – G-тихоновское пространство. Тогда $K_G(X) = K_G(\widehat{X})$.*

Доказательство. По предложению 2 мы рассматриваем полурешетку $K_G(\widehat{X})$ как подрешетку $K_G(X)$.

Пусть bX – произвольное бикомпактное G-расширение X и $f_{\beta_G b}\colon \beta_G X \to bX$ – эквивариантное отображение G-пространств. Тогда по лемме 2 оно же будет и эквивариантным отображением $\widehat{G}$-пространств $\beta_G X$, bX. Если в лемме 4 положить G и $G' = \widehat{G}$, $X = X$, $Y = \beta_G X$, $Z = bX$ и $f = f_{\beta_G b}$, то $\widehat{X}$ будет эквивариантно вложено в bX относительно действия группы $\widehat{G}$, а значит, и ее подгруппы G. Значит, любое бикомпактное G-расширение X является бикомпактным G-расширением $\widehat{X}$. Отсюда сразу вытекает равенство $K_G(X) = K_G(\widehat{X})$.

Следствие 1. *Пусть X – G-тихоновское пространство. Тогда для любого инвариантного подмножества Y такого, что $X \subset Y \subset \widehat{X}$, $K_G(X) = K_G(Y)$.*

Доказательство. Отметим, что $\beta_G X = \beta_G Y$ (предложение 2) и $\widehat{X} = \widehat{Y}$. Значит, $K_G(X) = K_G(\widehat{X}) = K_G(\widehat{Y}) = K_G(Y)$.

Замечание 2. Легко показать, если $X \subset Y \subset \beta X$, то $K(X) = K(Y)$ тогда и только тогда, когда $X = Y$ или $Y = \beta X$ и $|\beta X \setminus X| = 1$. В эквивариантном случае это не так (см. пример 3).

В некоторых случаях множество $\widehat{X}$ можно находить проще.

Лемма 5. *Пусть пространство X является G-тихоновским. Тогда выполняются следующие утверждения*:

1) *если $X^{\widehat{G}}$ локально бикомпактно, то $\widehat{X} = X^{\widehat{G}}$;*
2) *если $X^G_{\beta_G X} = X \cup (\beta_G X)_G$ локально бикомпактно, то $\widehat{X} = X^G_{\beta_G X}$.*

Доказательство. 1) Если подпространство $X^{\widehat{G}}$ локально бикомпактно, то оно является открытым всюду плотным инвариантным относительно действия группы $\widehat{G}$ подмножеством пространства $\beta_G X$. Значит, орбиты любой точки из $\beta_G X \setminus X^{\widehat{G}}$ принадлежат замкнутому нигде не плотному подмножеству $\beta_G X$. Отсюда вытекает, что $(\beta_G X)_{\widehat{G}} \subset X^{\widehat{G}}$ и, значит, $\widehat{X} = X^{\widehat{G}}$.

Пример 3 показывает, что включение $(\beta_G X)_{\widehat{G}} \subset X^{\widehat{G}}$, вообще говоря, строгое.

2) Докажем включение $\widehat{X} \subset X^G_{\beta_G X}$. Так как $X^G_{\beta_G X}$ локально бикомпактно и $X \subset X^G_{\beta_G X}$, то $F = \beta_G X \setminus X^G_{\beta_G X}$ является замкнутым нигде не плотным подмножеством $\beta_G X$. Непрерывное действие $G \times \beta_G X \to \beta_G X$ продолжается [15] до непрерывного действия $\widehat{G} \times \beta_G X \to \beta_G X$. Прообраз замкнутого множества F является замкнутым подмножеством $\widehat{G} \times \beta_G X$ и содержит множество $G \times F$, которое всюду плотно в $\widehat{G} \times F$. Значит, прообраз F содержит $\widehat{G} \times F$, т.е. $\widehat{G}F \subset F$ и множество F является инвариантным подмножеством $\beta_G X$ относительно действия группы $\widehat{G}$. Отсюда вытекает, что множество $X^G_{\beta_G X} = \beta_G X \setminus F$ является инвариантным подмножеством $\beta_G X$ относительно действия группы $\widehat{G}$, и $X^{\widehat{G}} \subset X^G_{\beta_G X}$, так как $X \subset X^G_{\beta_G X}$. Орбиты любой точки из F принадлежат замкнутому нигде не плотному подмножеству $\beta_G X$. Отсюда вытекает, что $(\beta_G X)_{\widehat{G}} \subset X^G_{\beta_G X}$. Значит, $\widehat{X} \subset X^G_{\beta_G X}$. Так как обратное включение очевидно, то требуемое равенство доказано.

Пример 2 показывает, что включение $X^{\widehat{G}} \subset X^G_{\beta_G X}$, вообще говоря, строгое.

Вопрос 1. Пусть X – G-тихоновское пространство, Y – инвариантное подмножество $\beta_G X$ и $\widehat{X} \subset Y$. Для каких Y полурешетки $K_G(X)$ и $K_G(Y)$ совпадают?

Пусть топологии $\tau, \tau', \tau' \geqslant \tau$, на группе G такие, что групповые операции непрерывны. Топологические группы (G, τ') и (G, τ) будем обозначать G' и G соответственно. Заметим, что при данных предположениях любое G-пространство является и G'-пространством.

Лемма 6. *Пусть $f\colon X \to Y$ – совершенное эквивариантное отображение G'-пространств. Если X является также и G-пространством, то и Y – G-пространство.*

Доказательство. Возьмем произвольные точку $y \in Y$ и ее окрестность O_y. Отображение f совершенно, поэтому $f^{-1}y$ – бикомпакт и $f^{-1}y \subset f^{-1}(O_y)$. Так как X является G-пространством, для любой точки $x \in f^{-1}y$ существует пара открытых множеств U_x, $x \in U_x$, и $O_x \in N_G(e)$ таких, что $O_x U_x \subset f^{-1}(O_y)$. Из покрытия $\{U_x : x \in f^{-1}y\}$ бикомпакта $f^{-1}y$ выберем конечное подпокрытие, тело объединения которого обозначим U, а пересечение соответствующих этому подпокрытию окрестностей единицы группы обозначим O. Тогда $OU \subset f^{-1}(O_y)$. Из эквивариантности отображения f вытекает, что $Of(U) = f(OU) \subset O_y$. Так как f замкнуто, то $y \in \operatorname{int} f(U)$ и $O \operatorname{int} f(U) \subset O_y$. Значит, Y является G-пространством.

Теорема 2. *Пусть пространство X является G-тихоновским. Тогда $K_G(X)$ является подрешеткой полурешетки $K_{G'}(X)$.*

Кроме того, $K_G(X) = K_{G'}(X)$ тогда и только тогда, когда $\beta_G X = \beta_{G'} X$.

Доказательство. Первая часть утверждения вытекает из предложения 1 и того, что все бикомпактные G-расширения являются G'-расширениями.

Необходимость второй части теоремы очевидна, а достаточность следует из первой части и леммы 6.

3. Максимальные бикомпактные G-расширения. Близости и равномерности являются одним из инструментов исследования бикомпактных расширений. Работая с G-пространствами, вместо равномерностей и близостей будем использовать эквиравномерности и эквиблизости (последний термин ранее не употреблялся, но авторы считают уместным его введение). Равномерность U (близость δ) на G-пространстве X называется *инвариантной* [3], [2], если для любого $\gamma \in U$ имеем $g\gamma \in U$ (из $A\delta B$ следует $gA\delta gB$) при любом $g \in G$. Действие группы G на равномерном пространстве (X, U) Я. деВрис [16] назвал U-ограниченным, если $U_G \geqslant U$. Ю.М. Смирнов [2] назвал близость δ согласованной с действием, если $\delta_G \geqslant \delta$.

Определение 2 [3]. Равномерность U на G-пространстве X называется *эквиравномерностью*, если она согласована с топологией X, инвариантна и действие U-ограничено.

Определение 3. Близость δ на G-пространстве X называется *эквиблизостью*, если она согласована с топологией X, инвариантна и согласована с действием. (Близости с описанными свойствами рассматривались в [2] без введения соответствующего понятия.)

Как уже было отмечено, любое G-тихоновское пространство обладает максимальным бикомпактным G-расширением. Покажем, когда оно может быть получено как пополнение (расширение) по естественным эквиравномерностям (эквиблизостям), заданным на G-пространстве.

Для любого тихоновского пространства X существуют изоморфизмы между полурешетками близостей, вполне ограниченных равномерностей на нем (вполне ограниченной равномерности соответствует индуцированная близость или, что то же самое, близости соответствует индуцированная вполне ограниченная равномерность) и его бикомпактных расширений.

При этом, рассматривая пополнение пространства по вполне ограниченной равномерности и расширение пространства по близости, ей соответствующей, получим одинаковые бикомпактные расширения X (см., например, [9, гл. 8]).

В [2, теорема C4] показано, что эквиблизости при данном изоморфизме между близостями и бикомпактными расширениями соответствует бикомпактное G-расширение, а в [3, теорема 2] показано, что вполне ограниченной эквиравномерности при изоморфизме между вполне ограниченными равномерностями и бикомпактными расширениями соответствует бикомпактное G-расширение. Из этих результатов Ю. М. Смирнова и М. Мегрелишвили, принимая во внимание, что если эквиблизости и вполне ограниченной эквиравномерности соответствует одно и тоже бикомпактное G-расширение, то эквиблизость индуцирует вполне ограниченную эквиравномерность и наоборот, вытекает следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Семейства вполне ограниченных эквиравномерностей (эквиблизостей) на топологическом пространстве являются полурешетками. Существуют изоморфизмы между полурешетками вполне ограниченных эквиравномерностей и эквиблизостей на G-пространстве X, между бикомпактными G-расширениями X и вполне ограниченными эквиравномерностями на нем и между бикомпактными G-расширениями X и эквиблизостями на нем. При этом рассматривая пополнение пространства по вполне ограниченной эквиравномерности и расширение пространства по эквиблизости, ею индуцированной, получаются одинаковые бикомпактные G-расширения X.*

Пусть U^* – максимальная вполне ограниченная равномерность, а δ_β – максимальная близость на пространстве X (см., например, [9]). Из предложения 3 вытекает следствие, которое позволяет переформулировать в терминах эквиблизостей и эквиравномерностей вопрос Я. де Вриса [17] о совпадении βX и $\beta_G X$.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Пусть X – G-пространство. Тогда следующие условия эквивалентны*:

a) $\beta_G X = \beta X$;
b) U^* – *эквиравномерность*;
c) δ_β – *эквиблизость*.

Пусть действие на G-пространстве X удовлетворяет условию:

$$\text{для любых } x \in X, O \in N_G(e) \text{ существует } y \in X \text{ такая, что } x \in \operatorname{int}(\operatorname{cl}(Oy)). \qquad (**)$$

Тогда для любого $O \in N_G(e)$ семейство $\widetilde{\gamma}_O = \{\operatorname{int}(\operatorname{cl}(Ox)) : x \in X\}$ является покрытием X. Положим $\widetilde{U}_G$ – семейство всех покрытий, в которые можно вписать покрытие вида $\widetilde{\gamma}_O$, $O \in N_G(e)$.

На подмножествах G-пространства X определим отношение $\widetilde{\delta}_G$: $A\widetilde{\delta}_G B$ тогда и только тогда, когда для любого $O \in N_G(e)$ существует $x \in X$ такая, что $A \cap \operatorname{int}(\operatorname{cl}(Ox)) \neq \varnothing$ и $B \cap \operatorname{int}(\operatorname{cl}(Ox)) \neq \varnothing$.

Теорема 3. *Пусть X – G-пространство и действие удовлетворяет условию $(**)$. Тогда выполнены следующие эквивалентные условия:*

a) *$\beta_G X$ – компактификация Самюэля G-пространства X относительно эквиравномерности $\widetilde{U}_G$;*
b) *$\beta_G X$ – расширение G-пространства X по близости $\widetilde{\delta}_G$.*

Доказательство. Для доказательства условия a) достаточно показать (см., например, [9, задача 8.5.7.] и [18]), что семейство $\widetilde{U}_G$ – максимальная эквиравномерность на X. В начале проверим, что выполняются условия (UC1)–(UC4) из [9, гл. 8, § 1], показывающие, что $\widetilde{U}_G$ – равномерность. Выполнение условия (UC1) вытекает из определения семейства $\widetilde{U}_G$.

Пусть $\beta_1, \beta_2 \in \widetilde{U}_G$, а $V, W \in N_G(e)$ такие, что $\widetilde{\gamma}_V \succ \beta_1$, $\widetilde{\gamma}_W \succ \beta_2$. Тогда очевидно, что для $O = V \cap W$ выполняются условия $\widetilde{\gamma}_O \succ \widetilde{\gamma}_V$, $\widetilde{\gamma}_O \succ \widetilde{\gamma}_W$, а значит, и $\widetilde{\gamma}_O \succ \beta_1$, $\widetilde{\gamma}_O \succ \beta_2$. Тем самым, проверено условие (UC2).

Пусть $\beta \in \widetilde{U}_G$, а V и $O \in N_G(e)$ такие, что $\widetilde{\gamma}_V \succ \beta$, $O^3 \subset V$ и $O = O^{-1}$. Докажем, что $\widetilde{\gamma}_O$ звездно вписано в $\widetilde{\gamma}_V$.

Для любой точки $x \in X$ существует точка $z \in X$ такая, что $x \in \operatorname{int}(\operatorname{cl}(Oz))$. Покажем, что $\operatorname{St}(x, \widetilde{\gamma}_O) \subset \operatorname{int}(\operatorname{cl}(Vz))$. Если $x \in \operatorname{int}(\operatorname{cl}(Oy))$, то $O_y \cap \operatorname{cl}(Oz) \neq \varnothing$, так как $x \in \operatorname{cl}(Oy)$ и любая окрестность x, в частности, $\operatorname{int}(\operatorname{cl}(Oz))$, пересекается с Oy. Значит, $y \in O^{-1}\operatorname{cl}(Oz) \subset \operatorname{cl}(O^2 z)$ по лемме 1. Очевидно, что $Oy \subset O\operatorname{cl}(O^2 z) \subset \operatorname{cl}(O^3 z) \subset \operatorname{cl}(Vz)$. Поэтому $\operatorname{cl}(Oy) \subset \operatorname{cl}(Vz)$ и $\operatorname{int}(\operatorname{cl}(Oy)) \subset \operatorname{int}(\operatorname{cl}(Vz))$. Значит, покрытие $\widetilde{\gamma}_O$ звездно вписано в $\widetilde{\gamma}_V$.

Аналогичным образом для покрытия $\widetilde{\gamma}_O$ можно найти звездно вписанное в него покрытие из $\widetilde{U}_G$, которое, в свою очередь, будет (см., например, [9, лемма 5.1.15]) сильно звездно вписано в $\widetilde{\gamma}_V$. Условие (UC3) выполнено.

Пусть x, y – пара различных точек пространства X. Так как действие непрерывно, существуют $O \in N_G(e)$, $O = O^{-1}$, и окрестности W_x, W_y точек x и y соответственно такие, что $\operatorname{cl}(OW_x) \cap \operatorname{cl}(OW_y) = \varnothing$. Покажем, что никакой элемент покрытия $\widetilde{\gamma}_O$ не содержит x и y одновременно. В самом деле, если x и $y \in \operatorname{int}(\operatorname{cl}(Oz))$, $z \in X$, то $W_x \cap Oz \neq \varnothing$ и $W_y \cap Oz \neq \varnothing$. Поэтому $z \in OW_x$ и $z \in OW_y$ и, значит, $OW_x \cap OW_y \neq \varnothing$. Полученное противоречие показывает выполнение условия (UC4).

Так как базу равномерности $\widetilde{U}_G$ составляют открытые покрытия, она согласована с топологией X.

Так как для любых $O \in N_G(e)$, $g \in G$, $x \in X$ и $U = gOg^{-1}$ выполняется равенство $g\operatorname{int}(\operatorname{cl}(Ox)) = \operatorname{int}(\operatorname{cl}(gOx)) = \operatorname{int}(\operatorname{cl}(Ugx))$, равномерность $\widetilde{U}_G$ является инвариантной.

Наконец проверим, что $U_G \geqslant \widetilde{U}_G$. Пусть $\beta \in \widetilde{U}_G$, а $O \in N_G(e)$ такая, что $\widetilde{\gamma}_O \succ \beta$. Возьмем $V \in N_G(e)$, $V^2 \subset O$. Для любой точки $x \in X$ существует точка $z \in X$ такая, что $x \in \operatorname{int}(\operatorname{cl}(Vz))$. Тогда $Vx \subset V\operatorname{int}(\operatorname{cl}(Vz)) \subset \operatorname{int}(\operatorname{cl}(V^2 z)) \subset \operatorname{int}(\operatorname{cl}(Oz))$. Поэтому $\gamma_V = \{Vx : x \in X\} \succ \widetilde{\gamma}_O$. Значит, $\widetilde{U}_G$ является эквиравномерностью.

В [18] показано, что если действие удовлетворяет условию $(**)$, то эквиравномерность $\overline{U}_G$, базой которой являются покрытия $\overline{\gamma}_O = \{\operatorname{cl}(Ox) : x \in X\}$, $O \in N_G(e)$, является максимальной эквиравномерностью. Очевидно, что $\widetilde{U}_G \geqslant \overline{U}_G$. Значит, они совпадают и $\widetilde{U}_G$ является максимальной эквиравномерностью на X.

Эквивалентность условий a) $\Longleftrightarrow$ b) вытекает из предложения 3 и того, что эквиравномерность $\widetilde{U}_G$ индуцирует эквиблизость $\widetilde{\delta}_G$.

Замечание 3. Пример 1 из [18] показывает, что, вообще говоря, равномерность U_G может и не быть эквиравномерностью, а близость δ_G – эквиблизостью, в то время как $\widetilde{U}_G$ – эквиравномерность, а $\widetilde{\delta}_G$ – эквиблизость.

Замечание 4. Если действие на G-пространстве X удовлетворяет условию

$$x \in \operatorname{int}(Ox) \qquad \text{для любых} \quad O \in N_G(e) \quad \text{и} \quad x \in X, \tag{$***$}$$

то $\widetilde{U}_G = U_G$ [18] и $\widetilde{\delta}_G = \delta_G$ по лемме 3.

4. Наименьшие (минимальные, единственные) бикомпактные G-расширения. Наименьший (минимальный) элемент полурешетки бикомпактных G-расширений G-пространства X называется *наименьшим* (*минимальным*) *бикомпактным G-расширением X*. Легко показать, что полурешетка бикомпактных G-расширений G-пространства X является полной решеткой тогда и только тогда, когда у X существует наименьшее бикомпактное G-расширение.

Если полурешетка бикомпактных расширений тихоновского пространства является решеткой тогда и только тогда, когда пространство локально бикомпактно, то в случае G-тихоновских пространств это не так [5]. Ниже приводятся достаточные условия существования наименьшего (минимального и единственного) бикомпактного G-расширения.

Из теоремы 1 и существования наименьшего бикомпактного G-расширения у локально бикомпактного G-пространства [6] следует.

Следствие 3. 1) *Если $\widehat{X}$ локально бикомпактно, то у X существует наименьшее бикомпактное G-расширение.*

2) *Если $|\beta_G X \setminus \widehat{X}| \leqslant 1$, то у X существует единственное бикомпактное G-расширение.*

Из леммы 6 и теоремы 2 вытекает

Теорема 4. *Пусть пространство X является G'-тихоновским. Если на действующей группе существует более слабая групповая топология (G – та же самая группа в более слабой топологии) такая, что X – G-тихоновское пространство с полной решеткой бикомпактных G-расширений, то у G'-пространства X существует минимальное бикомпактное G'-расширение – наименьшее бикомпактное G-расширение.*

Более того, если $\beta_G X = \beta_{G'} X$, то минимальное бикомпактное G'-расширение пространства X будет наименьшим.

Вопрос 2. Можно ли привести пример G-тихоновского пространства у которого существует минимальное, но не наименьшее бикомпактное G-расширение? Сколько может быть минимальных бикомпактных G-расширений у G-тихоновского пространства? (Заметим, что у тихоновского пространства наименьшее и минимальное бикомпактные расширения совпадают.)

Следствие 4. *Пусть пространство X является G'-тихоновским. Если на действующей группе существует более слабая групповая топология (G – та же самая группа в более слабой топологии) такая, что для G-пространства X выполнено условие $\beta_G X = \beta_{G'} X$, и у G-пространства X существует единственное бикомпактное G-расширение, то у G'-пространства X существует единственное бикомпактное G'-расширение.*

Вопрос 3. Какие условия являются необходимыми и достаточными (необходимыми, достаточными) для существования наименьшего (минимального, единственного) бикомпактного G-расширения?

5. Примеры.

Пример 1. Если H – замкнутая подгруппа G, то G действует на пространстве левых смежных классов $\mathscr{X} = G/H$ посредством левых сдвигов. Очевидно, что действие G на $\mathscr{X}$ удовлетворяет условию ($***$). Значит, по замечанию 4 U_G – максимальная эквиравномерность на $\mathscr{X}$, которая, тем самым, является G-тихоновским пространством.

Для применения результатов пунктов 2–4 к изучению полурешетки бикомпактных G-расширений пространства $\mathscr{X}$ выясним, чему гомеоморфно подмножество $\mathscr{X}^{\widehat{G}}$ максимального бикомпактного G-расширения $\beta_G\mathscr{X}$.

Пусть $\pi\colon G \to \mathscr{X}$, $f_\beta\colon \mathscr{X} \to \beta_G\mathscr{X}$ – естественные отображения, U_{LR} – двусторонняя равномерность на G, V – единственная равномерность (она же и эквиравномерность [15]) на $\beta_G\mathscr{X}$, а

$$f = f_\beta \circ \pi\colon G \to \beta_G\mathscr{X}. \tag{1}$$

Отображение π является эквивариантным и равномерно непрерывным относительно пары равномерностей U_R (правая равномерность на G) и U_G [12, гл. 3]. Так как $U_{LR} \geqslant U_R$, то π равномерно непрерывно и относительно U_{LR} и U_G. Из теоремы 3 и замечания 4 следует, что отображение f_β эквивариантно и равномерно непрерывно относительно пары равномерностей U_G и V. Тогда отображение f является эквивариантным и равномерно непрерывным относительно пары равномерностей U_{LR} и V, как композиция эквивариантных и равномерно непрерывных отображений.

Согласно [9, теорема 8.3.10] существует равномерно непрерывное отображение $F\colon \widehat{G} \to \beta_G\mathscr{X}$ и

$$f = F \circ j, \tag{2}$$

где $j\colon G \to \widehat{G}$ – естественное вложение. Действие группы G на $\beta_G\mathscr{X}$ продолжается [15] до действия группы $\widehat{G}$. Группа $\widehat{G}$ является $\widehat{G}$-пространством. По лемме 2 отображение F является эквивариантным отображением $\widehat{G}$-пространств $\widehat{G}$ и $\beta_G\mathscr{X}$.

Так как $f(H)$ – одноточечное множество, то и $F(\operatorname{cl} H)$ (замыкание берется в $\widehat{G}$) одноточечно. Поэтому определено отображение $h\colon \mathscr{Y} = \widehat{G}/\operatorname{cl} H \to \beta_G\mathscr{X}$ такое, что

$$F = h \circ \widehat{\pi}, \tag{3}$$

где $\widehat{\pi}\colon \widehat{G} \to \mathscr{Y}$ – естественное отображение $\widehat{G}$-пространств. Отображение h, очевидно, непрерывно. Принимая во внимание (3) легко показать, что оно является эквивариантным отображением $\widehat{G}$-пространств.

Определено вложение $i\colon \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$, $i(gH) = g\,\mathrm{cl}\,H$ (см. [5] и [12, гл. 3, §2, предложение 21]), где $gH, g\,\mathrm{cl}\,H$ – левые смежные классы в $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ соответственно. Очевидно, что оно является эквивариантным относительно действия группы G. Покажем, что

$$h \circ i = f_\beta. \tag{4}$$

Произведение в группах (чтобы не путать с обозначением смежных классов) будем, где это необходимо, обозначать через '$\cdot$'. Пусть $gH \in \mathscr{X}$; тогда $i(gH) = g\,\mathrm{cl}\,H$ и $h(g\,\mathrm{cl}\,H) =$ (по (3)) $= F(g \cdot \mathrm{cl}\,H) =$ (по (2) и так как $g \in G$) $= f(g \cdot H) =$ (по (1)) $= f_\beta(gH)$.

Условия (1)–(4) доказывают коммутативность следующей диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dd, "j"'] \arrow[dr, "f"] & & \mathscr{X} \arrow[dd, "i"] \arrow[dl, "f_\beta"'] \\
& \beta_G \mathscr{X} & \\
\widehat{G} \arrow[rr, "\widehat{\pi}"] \arrow[ur, "F"] & & \mathscr{Y} \arrow[ul, "h"']
\end{tikzcd},$$

где j, π, f, i, f_β – эквивариантные отображения G-пространств, а $F, h, \widehat{\pi}$ – эквивариантные отображения $\widehat{G}$-пространств.

Из свойства максимальности бикомпактного G-расширения вытекает существование эквивариантных отображений $H\colon \beta_{\widehat{G}}\mathscr{Y} \to \beta_G\mathscr{X}$ и $h_\beta\colon \mathscr{Y} \to \beta_{\widehat{G}}\mathscr{Y}$ $\widehat{G}$-пространств таких, что

$$H \circ h_\beta = h. \tag{5}$$

Показана коммутативность следующей диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{X} \arrow[r, "f_\beta"] \arrow[d, "i"'] & \beta_G\mathscr{X} \\
\mathscr{Y} \arrow[r, "h_\beta"'] \arrow[ur, "h"] & \beta_{\widehat{G}}\mathscr{Y} \arrow[u, "H"']
\end{tikzcd},$$

где i, f_β – эквивариантные отображения G-пространств, а h_β, h, H – эквивариантные отображения $\widehat{G}$-пространств.

Из леммы 4, если положить $G, G' = \widehat{G}$, $X = h_\beta \circ i(\mathscr{X})$, $Y = \beta_{\widehat{G}}\mathscr{Y}$, $Z = \beta_G\mathscr{X}$ и $f = H$, и, так как $X^{\widehat{G}} = \widehat{G} \cdot (h_\beta \circ i(\mathscr{X})) = h_\beta(\widehat{G} \cdot i(\mathscr{X}))$ =(так как действие группы $\widehat{G}$ на $\mathscr{Y}$ транзитивно)$= h_\beta(\mathscr{Y})$, вытекает, что отображение $H|_{h_\beta(\mathscr{Y})}$ является гомеоморфизмом. Значит, h – вложение, как композиция (по (5)) гомеоморфизмов, и $\mathscr{X}^{\widehat{G}} = \widehat{G} \cdot f_\beta(\mathscr{X}) =$ (по (4)) $= \widehat{G} \cdot (h \circ i(\mathscr{X})) = h(\widehat{G} \cdot i(\mathscr{X})) = h(\mathscr{Y})$. Тем самым, показано, что $\mathscr{X}^{\widehat{G}}$ гомеоморфно $\mathscr{Y}$.

Из примера 1, леммы 5 и следствия 3 вытекают следствия.

Следствие 5. *Если пространство* $\widehat{G}/\operatorname{cl} H$ *является локально бикомпактным, то у пространства* G/H *будет наименьшее бикомпактное* G*-расширение – одноточечная бикомпактификация Александрова пространства* $\widehat{G}/\operatorname{cl} H$.

Следствие 6. *Если пространство* $\widehat{G}/\operatorname{cl} H$ *является бикомпактным, то у пространства* G/H *будет единственное бикомпактное* G*-расширение* [5, теорема 3].

Следствие 7. *Если* G *– локально вполне ограниченная группа* [19] *или* [12, гл. 3, §3] (*в частности, локально псевдокомпактная группа*), *действующая сама на себе, то она обладает наименьшим бикомпактным* G*-расширением – одноточечной бикомпактификацией ее пополнения по правой равномерности.*

Следствие 8. *Если* G *– вполне ограниченная группа* [19] *или* [12, гл. 3, §3] (*в частности, псевдокомпактная группа*), *действующая сама на себе, то она обладает единственным бикомпактным* G*-расширением – пополнением по правой равномерности.*

Замечание 5. Пусть топологии $\tau, \tau', \tau' \geqslant \tau$, на группе G такие, что групповые операции непрерывны, $G' = (G, \tau')$, $G = (G, \tau)$. Тогда для любой замкнутой подгруппы $H \subset G$ пространство G/H является как G-, так и G'-пространством. Из теоремы 4 и примера 1 следует, что если G-пространство G/H имеет наменьшее бикомпактное G-расширение, то G'-пространство G/H имеет минимальное бикомпактное G'-расширение. В частности, если $\widehat{G}/\operatorname{cl} H$ локально бикомпактно, то с учетом леммы 5 G'-пространство G/H имеет минимальное бикомпактное G'-расширение. Это обобщение теоремы 2 из [5].

Пример 2. Пусть $\beta\mathbb{Q}$ – бикомпактификация Стоуна–Чеха пространства рациональных чисел. В качестве действующей группы G рассмотрим группу всех гомеоморфизмов $\beta\mathbb{Q}$ в компактно-открытой топологии. Заметим, что, так как характер точек из $\mathbb{Q}$ счетен, а из нароста $\beta\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Q}$ несчетен, то ни при каком $g \in G$ точка из $\mathbb{Q}$ не может отобразиться в точку из нароста. Значит, $\mathbb{Q}$ – всюду плотное инвариантное подмножество, которое можно рассматривать как G-пространство, а $\beta\mathbb{Q}$ – его максимальное бикомпактное G-расширение.

Из [20, теорема 6] следует, что группа G полна относительно двусторонней равномерности. Поэтому $\mathbb{Q}^{\widehat{G}} = \mathbb{Q}^G = \mathbb{Q} \subset \beta\mathbb{Q}$. Покажем, что $\beta\mathbb{Q}_G = \beta\mathbb{Q}$.

На группе G систему открытых окрестностей единицы образуют конечные пересечения множеств вида $M(K,V) = \{g \in G : g(K) \subset V\}$, где K – бикомпактное, а V – открытое подмножества $\beta\mathbb{Q}$ и $K \subset V$ [20]. Пусть $\omega = \{V_i : i = 1, \dots, k\}$ – конечное дизъюнктное покрытие $\beta\mathbb{Q}$, состоящее из открыто-замкнутых множеств. Положим $M(\omega) = \{g \in G : g(V_i) \subset V_i,\ i = 1, \dots, k\}$.

Лемма 7. *Множества* $M(\omega)$, *где* ω *– всевозможные конечные дизъюнктные покрытия* $\beta\mathbb{Q}$, *состоящие из открыто-замкнутых множеств, образуют базу окрестностей единицы группы* G.

Доказательство. Пусть $\bigcap\{M(K_i, V_i) : i = 1, \dots, k\}$ – произвольная окрестность единицы e группы G.

Так как пространство $\beta\mathbb{Q}$ сильно нульмерно, то для бикомпактного множества K, содержащегося в открытом множестве V, существует открыто-замкнутое (а значит, и бикомпактное) подмножество B такое, что $K \subset B \subset V$. Очевидно, что

$$M(B,B) \subset M(K,V).$$

Поэтому имеем $e \in \bigcap\{M(B_i,B_i) : i = 1,\dots,k\} \subset \bigcap\{M(K_i,V_i) : i = 1,\dots,k\}$, где $K_i \subset B_i \subset V_i$, B_i – открыто-замкнутое подмножество, $i = 1,\dots,k$.

Для любого $i = 1,\dots,k$ рассмотрим бинарное покрытие $\omega_i = \{B_i, \beta\mathbb{Q} \setminus B_i\}$. Очевидно, что $M(\omega_i) \subset M(B_i,B_i)$.

Пусть $\omega = \wedge\{\omega_i : i = 1,\dots,k\}$ – дизъюнктное конечное открыто-замкнутое покрытие. Так как $\omega \succ \omega_i$, $i = 1,\dots,k$, то

$$\begin{aligned} M(\omega) &\subset \bigcap\{M(\omega_i) : i = 1,\dots,k\} \\ &\subset \bigcap\{M(B_i,B_i) : i = 1,\dots,k\} \subset \bigcap\{M(K_i,V_i) : i = 1,\dots,k\}. \end{aligned}$$

В любой окрестности e группы G содержится окрестность вида $M(\omega)$. Значит, множества вида $M(\omega)$ образуют базу окрестностей e группы G.

Пусть B_1, B_2 – дизъюнктные открыто-замкнутые подмножества $\beta\mathbb{Q}$. Тогда $C_i = B_i \cap \mathbb{Q}$, $i = 1,2$, – счетные плотные в себе метрические пространства. Они гомеоморфны (см., например, [9, упражнение 6.2.A.(d)]).

Этот гомеоморфизм продолжается до гомеоморфизма их стоун-чеховских бикомпактификаций, совпадающих с их замыканиями B_i, $i = 1,2$, в $\beta\mathbb{Q}$. Так как множества B_i, $i = 1,2$, дизъюнктны и открыто-замкнуты, существует гомеоморфизм $\beta\mathbb{Q}$ на себя, при котором B_1 отображается на B_2, B_2 на B_1, и являющийся тождественным на $\beta\mathbb{Q} \setminus (B_1 \cup B_2)$. Доказана следующая лемма.

Лемма 8. *Для любых двух дизъюнктных открыто-замкнутых подмножеств $B_i \in \beta\mathbb{Q}$, $i = 1,2$, существует гомеоморфизм пространства $\beta\mathbb{Q}$, отображающий B_1 на B_2, B_2 на B_1 и тождественный на дополнении до $B_1 \cup B_2$.*

Пусть $O \in N_G(e)$, $x \in \beta\mathbb{Q}$. По лемме 7 можно считать, что множество $O = M(\omega)$, $x \in V \in \omega$. Покажем, что множество Ox всюду плотно в открыто-замкнутом подмножестве V. Пусть W – произвольное открыто-замкнутое подмножество $\beta\mathbb{Q}$, $W \subset V$ и $x \notin W$ (иначе $ex = \mathrm{id}(x) \in W$). Существует открыто-замкнутая окрестность W_x точки x такая, что $W_x \subset V$ и $W \cap W_x = \varnothing$. По лемме 8 существует гомеоморфизм h пространства $\beta\mathbb{Q}$ на себя такой, что $hW_x = h(W_x) = W$, $hW = h(W) = W_x$ и тождественный на $\beta\mathbb{Q} \setminus (W_x \cup W)$. Очевидно, что $h \in O$ и $hx = h(x) \in W$. Значит, $\mathrm{cl}(Ox) = V$ и $x \in \mathrm{int}(\mathrm{cl}(Ox)) = V$. Отсюда следует, что все точки из $\beta\mathbb{Q}$ являются точками почти открытости действия.

Из следствия 3 вытекает, что у G-пространства $\mathbb{Q}$ существует единственное бикомпактное G-расширение.

Пример 3. Пусть $G = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ – счетная всюду плотная подгруппа абелевой группы $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $I = [0,1]$. Действие G на $X = I \times G$ определяется следующим образом: $g(x,t) = (x, gt)$. Легко проверить, что X – G-пространство и бикомпакт $bX = I \times S^1$ с аналогично определенным действием является G-расширением X. Пополнение $\widehat{G} = S^1$ и $S^1 b(X) = bX$, где $b\colon X \to bX$.

Покажем, что $\beta_G X = bX$. Пусть $\beta_G\colon X \to \beta_G X$, $f_{\beta_G b}\colon \beta_G X \to bX$. Тогда

$$f_{\beta_G b}(S^1 \cdot \beta_G(X)) = S^1 \cdot b(X) = bX$$

и по лемме 4 $f_{\beta_G b}|_{S^1 \cdot \beta_G(X)}$ является гомеоморфизмом. Значит, $\beta_G X = bX$ и bX – единственное бикомпактное G-расширение X. Для любой точки $(x,t) \in bX$ ее орбита $\{x\} \times S^1$ – слой произведения $I \times S^1$. Поэтому она нигде не плотна и $(\beta_G X)_{S^1} = \varnothing$.

Легко показать, что множество $Y = X \cup \{0\} \times S^1 \subset bX$ является инвариантным относительно действия группы G и $X \subset Y$. Имеем $|Y \setminus X| = \mathfrak{c}$, но $K_G(X) = K_G(Y)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Мегрелишвили М. Г. Тихоновское G-пространство, не обладающее бикомпактным G-расширением и G-линеаризацией // УМН. 1988. Т. 43. №2. С. 145–146.
[2] Антонян С. А., Смирнов Ю. М. Универсальные объекты и бикомпактные расширения для топологических групп преобразований // Докл. АН СССР. 1981. Т. 257. №3. С. 521–525.
[3] Мегрелишвили М. Г. Эквивариантные пополнения и бикомпактные расширения // Сообщения АН ГССР. 1984. Т. 115. №1. С. 21–24.
[4] de Vries J. Equivariant embeddings of G-spaces // General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra IV. Part B. Prague, 1977. P. 485–493.
[5] Smirnov J. M., Stoyanov L. N. On minimal equivariant compact extensions // Comptes rendus de l'Academie bulgare des Sciences. 1983. V. 36. №6. P. 733–736.
[6] Palais R. The classification of G-spaces // Memoir. Amer. Math. Soc. 1960. V. 36. №2. P. 1–72.
[7] de Vries J. Topological transformation groups I // Math. Centre Tracts. №65. Amsterdam: Mathematisch Centrum, 1975.
[8] de Vries J. On the existense of G-compactifications // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math. 1978. V. 26. №3. P. 275–280.
[9] Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986.
[10] Биркгоф Г. Теория решеток. М.: Наука, 1983.
[11] Бурбаки Н. Общая топология. Основные структуры. М.: Наука, 1968.
[12] Бурбаки Н. Общая топология. Топологические группы. Числа и связанные с ними группы и пространства. М.: Наука, 1969.
[13] Мегрелишвили М. Г. Об эквивариантной нормальности // Сообщения АН ГССР. 1983. Т. 111. №1. С. 17–19.
[14] de Vries J. On the G-compactification of products // Pacif. J. Math. 1983. V. 110. №1. P. 447–470.
[15] Megrelishvili M. Equivariant completions // Comment. Math. Univ. Carolinae. 1994. V. 35. №3. P. 539–547.
[16] de Vries J. Universal topological transformation groups // Gen. Topology and Appl. 1975. V. 5. №2. P. 107–122.
[17] de Vries J. G-spaces: compactifications and pseudocompactness // Proceedings of the Colloquim on Topology. Eger. (August 8–12). 1983. P. 655–666.
[18] Chatyrko V. A., Kozlov K. L. The maximal G-compactifications of G-spaces with special actions // Proceedings of the 9th Prague Topological Symposium (Prague 2001). North Bay, ON: Topol. Atlas, 2002. P. 15–21.
[19] Weil A. Sur les espaces à structure uniforme et sur la topologie générale. V. 551. Paris: Actualitiés Sci. Industr., 1938.
[20] Arens R. Topologies for homeomorphism groups // Amer. J. Math. 1946. V. 68. №4. P. 593–610.

(К. Л. Козлов) Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
(В. А. Чатырко) Университет г. Линчёпинг, Швеция
E-mail: kkozlov@mech.math.msu.su, vitja@mai.liu.se

Поступило 09.04.2004
Исправленный вариант 21.03.2005