



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Валовик, Ю. Г. Смирнов, Е. А. Широкова, Численный метод в задаче о распространении электромагнитных ТЕ-волн в двухслойной нелинейной волноведущей структуре, *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки*, 2012, выпуск 1, 66–74

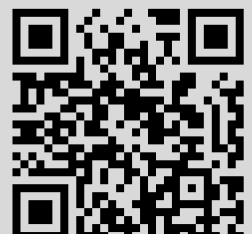
Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.91

15 января 2025 г., 08:11:05



ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД В ЗАДАЧЕ О РАСПРОСТРАНЕНИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ТЕ-ВОЛН В ДВУХСЛОЙНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ВОЛНОВЕДУЩЕЙ СТРУКТУРЕ

Аннотация. Рассматривается распространение электромагнитных волн в волноводе, состоящей из двух плоских слоев с нелинейной средой. Задача сводится к краевой задаче сопряжения на собственные значения в четырехсвязной области. Предложен численный метод для решения указанной задачи. Приведены результаты расчетов.

Ключевые слова: задача сопряжения в многосвязной области, нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение, задача Коши.

Abstract. The article considers electromagnetic wave propagation in a two nonlinear layers' plane waveguide. The problem is reduced to a boundary conjugation problem in a quadruply-connected domain. A numerical method for solving the problem is proposed. Some numerical results are shown.

Key words: conjugation problem in a multiply-connected domain, nonlinear ordinary differential equation, Cauchy problem.

Введение

В работе рассматривается задача о распространении ТЕ-волн в плоском двухслойном диэлектрическом волноводе. Волновод помещен между двумя полубесконечными средами с постоянными электродинамическими параметрами. Диэлектрическая проницаемость в каждом из двух слоев зависит от электрического поля по закону Керра: $\epsilon = \epsilon_{\text{const}} + \alpha |\mathbf{E}|^2$, где ϵ_{const} – постоянная составляющая диэлектрической проницаемости, α – коэффициент нелинейности. Задача сводится к отысканию постоянных распространения электромагнитной волны в рассматриваемой волноводе структуре. Предложен численный метод (который будем называть «метод задачи Коши») отыскания собственных значений.

1. Постановка задачи

Рассмотрим электромагнитные волны, проходящие через два однородных, изотропных, немагнитных диэлектрических слоя. Диэлектрическая проницаемость в слоях зависит от электрического поля по закону Керра. Слои расположены между двумя полупространствами $x < 0$ и $x > h$ в декартовой системе координат $Oxyz$ и $h = h_1 + h_2$. Полупространства заполнены изотропной немагнитной средой без источников и имеют постоянные диэлектрические проницаемости ϵ_1 и ϵ_4 соответственно (ϵ_1 и ϵ_4 – произвольные действительные постоянные). Считаем, что всюду $\mu = \mu_0$ – магнитная проницаемость вакуума.

Предполагаем гармоническую зависимость полей от времени в виде

$$\tilde{\mathbf{E}}(x, y, z, t) = \mathbf{E}_+(x, y, z) \cos \omega t + \mathbf{E}_-(x, y, z) \sin \omega t ;$$

$$\tilde{\mathbf{H}}(x, y, z, t) = \mathbf{H}_+(x, y, z) \cos \omega t + \mathbf{H}_-(x, y, z) \sin \omega t ,$$

где ω – круговая частота; $\mathbf{E}_+, \mathbf{E}_-, \mathbf{H}_+, \mathbf{H}_-$ – вещественные искомые функции.

Образуют комплексные амплитуды полей \mathbf{E}, \mathbf{H} [1]: $\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + i\mathbf{E}_-$; $\mathbf{H} = \mathbf{H}_+ + i\mathbf{H}_-$. Везде ниже множители $\cos \omega t$ и $\sin \omega t$ будем опускать.

Электромагнитное поле \mathbf{E}, \mathbf{H} удовлетворяет уравнениям Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = -i\omega \epsilon \mathbf{E}; \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = i\omega \mu \mathbf{H}, \quad (1)$$

условию непрерывности касательных составляющих компонент поля на границе раздела сред $x=0, x=h_1, x=h_1+h_2$ и условию излучения на бесконечности: электромагнитное поле экспоненциально затухает при $|x| \rightarrow \infty$ в областях $x < 0$ и $x > h$. Диэлектрическая проницаемость внутри слоя имеет вид $\epsilon = \epsilon_i + \alpha_i |\mathbf{E}|^2$, где $i=2,3$ и ϵ_i, α_i – произвольные постоянные. Будем искать решение уравнений Максвелла во всем пространстве.

На рис. 1 показана геометрия задачи.

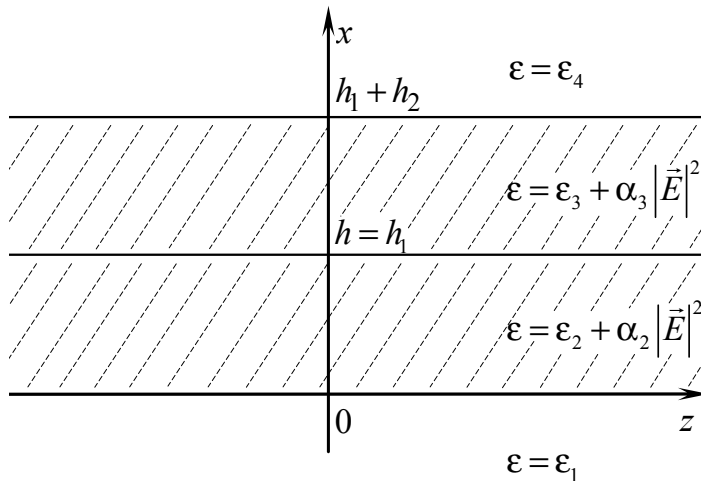


Рис. 1

Рассмотрим ТЕ-поляризованные волны $\mathbf{E} = (0, E_y, 0)^T$, $\mathbf{H} = (H_x, 0, H_z)^T$, где $(\dots)^T$ – операция транспонирования. Легко показать, что компоненты полей \mathbf{E} и \mathbf{H} не зависят от переменной y . Волны, распространяющиеся вдоль границы раздела сред z , гармонически зависят от z . Тогда компоненты полей \mathbf{E}, \mathbf{H} имеют вид

$$H_y = H_y(x) e^{i\gamma z}, \quad E_x = E_x(x) e^{i\gamma z}, \quad E_z = E_z(x) e^{i\gamma z}. \quad (2)$$

Подставив компоненты (2) в уравнения Максвелла (1), выполнив нормировку в соответствии с формулами $\tilde{x} = kx, \frac{d}{dx} = k \frac{d}{d\tilde{x}}, \tilde{\gamma} = \frac{\gamma}{k}, \tilde{\epsilon}_j = \frac{\epsilon_j}{\epsilon_0}$ ($j = 1, 2, 3, 4$), $\tilde{\alpha}_i = \frac{\alpha_i}{\epsilon_0}$ ($i = 1, 2$), где ϵ_0 – диэлектрическая проницаемость вакуума и

$k^2 = \omega^2 \mu \epsilon_0$ с $\mu = \mu_0$, обозначив $E_y(\tilde{x}) \equiv Y(\tilde{x})$ и опуская значок тильды, получаем следующее уравнение [2]:

$$Y''(x) = \gamma^2 Y(x) - \epsilon Y(x), \quad (3)$$

где γ – неизвестный спектральный параметр (постоянная распространения).

Будем искать действительные решения $Y(x)$ уравнения (3). Полагаем γ действительным (так что $|\mathbf{E}|^2$ не зависит от z) и

$$\epsilon = \begin{cases} \epsilon_1, & x < 0; \\ \epsilon_2 + \alpha_2 Y^2, & 0 < x < h_1; \\ \epsilon_3 + \alpha_3 Y^2, & h_1 < x < h_1 + h_2; \\ \epsilon_4, & x > h_1 + h_2. \end{cases} \quad (4)$$

Считаем, что функция Y дифференцируема в слоях так, что

$$Y(x) \in C(-\infty; +\infty) \cap C^1(-\infty; \infty) \cap C^2(-\infty; 0) \cap C^2(0; h_1) \cap C^2(h_1; h) \cap C^2(h; +\infty). \quad (5)$$

2. Решение системы дифференциальных уравнений

Введем обозначения: $k_1^2 = \gamma^2 - \epsilon_1$, $k_2^2 = \epsilon_2 - \gamma^2$, $k_3^2 = \epsilon_3 - \gamma^2$, $k_4^2 = \gamma^2 - \epsilon_4$.

Для $\epsilon = \epsilon_1$ в полупространстве $x < 0$ из (3) и (4) получаем уравнение $Y'' = k_1^2 Y$, его общее решение $Y(x) = A_1 e^{-k_1 x} + A e^{k_1 x}$, в силу условия на бесконечности получаем

$$\begin{aligned} Y(x) &= A e^{k_1 x}, \\ Y'(x) &= A k_1 e^{k_1 x}. \end{aligned} \quad (6)$$

Для $\epsilon = \epsilon_4$ в полупространстве $x > h_1 + h_2$ из (3) и (4) получаем уравнение $Y'' = k_4^2 Y$, его общее решение $Y(x) = B_1 e^{k_4(x-h)} + B e^{-k_4(x-h)}$. В силу условия на бесконечности получаем

$$Y(x) = B e^{-k_4(x-h)}, \quad Y'(x) = -B k_4 e^{-k_4(x-h)}. \quad (7)$$

Постоянные A и B в (6) и (7) определяются граничными условиями.

Из формул (6) и (7) легко видеть, что выполняется неравенство $\gamma > \max(\sqrt{\epsilon_1}, \sqrt{\epsilon_4})$.

Внутри слоя $0 < x < h_1$ уравнение (3) принимает вид

$$Y'' = -(k_2^2 + Y^2) Y. \quad (8)$$

Внутри слоя $h_1 < x < h_1 + h_2$ уравнение (3) принимает вид

$$Y'' = -(k_3^2 + Y^2)Y. \quad (9)$$

3. Условия сопряжения

Как известно, касательные компоненты электромагнитного поля непрерывны на границах раздела сред. В нашем случае касательными компонентами являются E_y и H_z . Учитывая сказанное, получаем для функций Y и Y' следующие условия сопряжения:

$$\begin{aligned} [Y]_{x=0} &= 0, [Y]_{x=h_1} = 0, [Y]_{x=h_1+h_2} = 0, \\ [Y']_{x=0} &= 0, [Y']_{x=h_1} = 0, [Y']_{x=h_1+h_2} = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

где $[f]_{x=x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$.

Пусть $Y_0 := Y(0)$, $Y_h := Y(h)$ и постоянная Y_h считается известной, тогда $B = Y_h$, $A = Y_0$. Далее, используя (5), (6), получаем

$$Y'(h) = -k_4 Y_h, Y'(0) = k_1 Y_0. \quad (11)$$

Сформулируем задачу сопряжения (*задачу P*): необходимо найти собственные значения γ и собственные функции $Y(x; \gamma)$, удовлетворяющие уравнениям (8), (9) и условиям (6), (7), (10).

4. Линейный случай

В случае, когда все четыре среды линейны, можно вывести точное дисперсионное уравнение. Это дисперсионное уравнение окажется полезным для тестирования метода задачи Коши, описанного ниже.

Внутри слоя $0 < x < h_1$ решение уравнения (3) имеет вид

$$Y(x) = C_{11} \sin k_2 x + C_{12} \cos k_2 x, Y'(x) = k_2 (C_{11} \cos k_2 x - C_{12} \sin k_2 x). \quad (12)$$

Внутри слоя $h_1 < x < h_1 + h_2$ решение уравнение (3) имеет вид

$$Y(x) = C_{21} \sin k_3 x + C_{22} \cos k_3 x, Y'(x) = k_3 (C_{21} \cos k_3 x - C_{22} \sin k_3 x). \quad (13)$$

Пользуясь условиями сопряжения (10) и решениями (6), (7), (12), (13), получаем

$$\begin{cases} A = C_{12}, \\ Ak_1 = k_2 C_{11}, \\ C_{11} \sin k_2 h_1 + C_{12} \cos k_2 h_1 = C_{21} \sin k_3 h_1 + C_{22} \cos k_3 h_1, \\ k_2 (C_{11} \cos k_2 h_1 - C_{12} \sin k_2 h_1) = k_3 (C_{21} \cos k_3 h_1 - C_{22} \sin k_3 h_1), \\ C_{21} \sin k_3 (h_1 + h_2) + C_{22} \cos k_3 (h_1 + h_2) = B, \\ k_3 (C_{21} \cos k_3 (h_1 + h_2) - C_{22} \sin k_3 (h_1 + h_2)) = -Bk_4. \end{cases}$$

Предполагая, что $\cos k_2 h_1 \neq 0$ и $\cos k_3 h_1 \neq 0$, получаем дисперсионное уравнение в такой форме:

$$\begin{aligned} & \left(k_2^2 k_4 + k_1 k_3^2\right) \operatorname{tg} k_2 h_1 \operatorname{tg} k_3 h_2 - k_3 \left(k_1 k_4 - k_2^2\right) \operatorname{tg} k_2 h_1 + \\ & + k_2 \left(k_3^2 - k_1 k_4\right) \operatorname{tg} k_3 h_2 - k_2 k_3 \left(k_1 + k_4\right) = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Уравнение (14) удобно переписать одним из следующих способов:

$$\operatorname{tg} k_3 h_2 = k_3 \frac{\left(k_1 k_4 - k_2^2\right) \operatorname{tg} k_2 h_1 + k_2 \left(k_1 + k_4\right)}{\left(k_2^2 k_4 + k_1 k_3^2\right) \operatorname{tg} k_2 h_1 + k_2 \left(k_3^2 - k_1 k_4\right)}; \quad (15)$$

$$\operatorname{tg} k_2 h_1 = k_2 \frac{\left(k_3^2 - k_1 k_4\right) \operatorname{tg} k_3 h_2 - k_3 \left(k_1 + k_4\right)}{k_3 \left(k_1 k_4 - k_2^2\right) - \left(k_2^2 k_4 + k_1 k_3^2\right) \operatorname{tg} k_3 h_2}, \quad (16)$$

или

$$h_2 = \frac{1}{k_3} \operatorname{arctg} \left(k_3 \frac{\left(k_1 k_4 - k_2^2\right) \operatorname{tg} k_2 h_1 + k_2 \left(k_1 + k_4\right)}{\left(k_2^2 k_4 + k_1 k_3^2\right) \operatorname{tg} k_2 h_1 + k_2 \left(k_3^2 - k_1 k_4\right)} \right) + \frac{\pi n}{k_3}; \quad (17)$$

$$h_1 = \frac{1}{k_2} \operatorname{arctg} \left(k_2 \frac{\left(k_3^2 - k_1 k_4\right) \operatorname{tg} k_3 h_2 - k_3 \left(k_1 + k_4\right)}{k_3 \left(k_1 k_4 - k_2^2\right) - \left(k_2^2 k_4 + k_1 k_3^2\right) \operatorname{tg} k_3 h_2} \right) + \frac{\pi m}{k_2}, \quad (18)$$

где $n \geq 0$, $m \geq 0$ – целые числа.

Из представлений (17), (18) легко видеть, что $\gamma < \min(\sqrt{\varepsilon_2}, \sqrt{\varepsilon_3})$. Окончательно получаем, что в линейном случае выполняется неравенство

$$\max(\varepsilon_1, \varepsilon_4) < \gamma^2 < \min(\varepsilon_2, \varepsilon_3),$$

причем левая часть этого неравенства справедлива и для нелинейного случая.

5. Описание метода задачи Коши

Будем считать, что h_1 задано, а h_2 изменяется. Опишем метод нахождения γ в зависимости от h_2 . Будем считать, что $h_2 \in (0, h^*)$ и $\gamma \in (\max(\sqrt{\varepsilon_1}, \sqrt{\varepsilon_4}), \gamma^*)$. Разбиваем интервалы $(0, h^*)$ и $(\max(\sqrt{\varepsilon_1}, \sqrt{\varepsilon_4}), \gamma^*)$ на n и m частей соответственно. Поскольку Y_h известно, то для всякого $\gamma_j \in (\max(\sqrt{\varepsilon_1}, \sqrt{\varepsilon_4}), \gamma^*)$ и h_i^* из формулы (12) найдем $Y_j'(h_i^*)$ (как легко видеть из (12), значения Y_h и Y_h' от h не зависят, но так писать удобнее). Теперь можно решать задачу P следующим образом. На отрезке $x \in [h_1, h_i^*]$

можно поставить задачу Коши для уравнения (9) с начальными условиями $Y_h, Y_j'(h_i^*)$ и $\gamma = \gamma_j$. Решив ее, получим $Y_{ij}(h_1), Y_{ij}'(h_1)$ – значения функции Y и ее производной Y' в точке $x = h_1$. Теперь мы можем поставить задачу Коши на отрезке $x \in [0, h_1]$ для уравнения (8) с начальными условиями $Y_{h_1}, Y_{ij}'(h_1)$ и $\gamma = \gamma_j$. Решив ее, получим значения $Y_{ij}(0), Y_{ij}'(0)$ – значения функции Y и ее производной Y' в точке $x = 0$. С другой стороны, из (6) и (12) нам известно, что $Y(0) = A$ и $Y'(0) = \sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_1} A$. Используя полученные результаты для $\gamma = \gamma_j$, приходим к выводу, что $A = Y_{ij}(0)$. Сконструируем функцию $F(h_i^*, \gamma) = Y_{ij}'(0) - \sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_1} Y_{ij}(0)$. Можно показать, что функция $F(h_i^*, \gamma)$ непрерывна по γ [3].

Пусть для заданного h_i^* существуют такие γ_j и γ_{j+1} , что $\frac{F(h_i^*, \gamma_j)}{F(h_i^*, \gamma_{j+1})} < 0$. Это значит, что существует $\tilde{\gamma}_j \in (\gamma_j, \gamma_{j+1})$ такое, что $\tilde{\gamma}_j$ является собственным значением рассматриваемой задачи о распространении волн. Значение $\tilde{\gamma}_j$ может быть найдено с любой степенью точности, например методом дихотомии.

Пусть $\bar{\gamma}_j$ есть предельное¹ значение для $\tilde{\gamma}_j$ (где $\tilde{\gamma}_j$ определяется некоторым итерационным процессом, например методом дихотомии). Тогда $\bar{\gamma}_j$ есть собственное значение задачи P , которому соответствуют толщины h_i^* и h_1 слоев и собственная функция $Y(x; \bar{\gamma}_j)$, определенная на $x \in (-\infty, +\infty)$.

Обозначим через $f(x)|_{\Theta}$ сужение функции $f(x)$ на множество $x \in \Theta$. Тогда собственная функция $Y(x; \bar{\gamma}_j)$ удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $Y(x; \bar{\gamma}_j)|_{(-\infty, 0]} = Y_{ij}(0; \bar{\gamma}_j) \exp\left(x\sqrt{\bar{\gamma}_j^2 - \varepsilon_1}\right)$;
- 2) $Y(x; \bar{\gamma}_j)|_{[0, h_1]}$ – решение уравнения (8);
- 3) $Y(x; \bar{\gamma}_j)|_{[h_1, h_i^*]}$ – решение уравнения (9);
- 4) $Y(x; \bar{\gamma}_j)|_{[h_i^*, +\infty)} = Y_{ij}(h_i^*; \bar{\gamma}_j) \exp\left(-\left(x - h_i^*\right)\sqrt{\bar{\gamma}_j^2 - \varepsilon_4}\right)$;

¹ Ясно, что указанный предел существует, если $F(h_i^*, \gamma)$ непрерывна по γ и $F(h_i^*, \gamma)$ меняет знак при переходе от γ_j к γ_{j+1} .

5) функция $Y(x; \bar{\gamma}_j)$ удовлетворяет условиям сопряжения (9) в точках $x = 0$, $x = h_1$, $x = h_1 + h_i^*$.

Отметим, что описанный в данной работе метод обладает важными достоинствами:

- метод прост в реализации (все известные математические пакеты могут решать задачу Коши);
- метод позволяет находить собственные значения с любой заданной точностью;
- метод может быть применен для изучения не только керровской нелинейности;
- метод может быть обобщен на произвольное число слоев.

6. Численные результаты

На рис. 2–4 изображены графики дисперсионных кривых. При расчетах использованы следующие значения параметров: $A = 1$ (см. (6)); $\epsilon_1 = 1$; $\epsilon_4 = 1$; $h_1 = 1$. На рис. 2–4 вертикальная ось соответствует изменению γ , а горизонтальная – изменению h_2 .

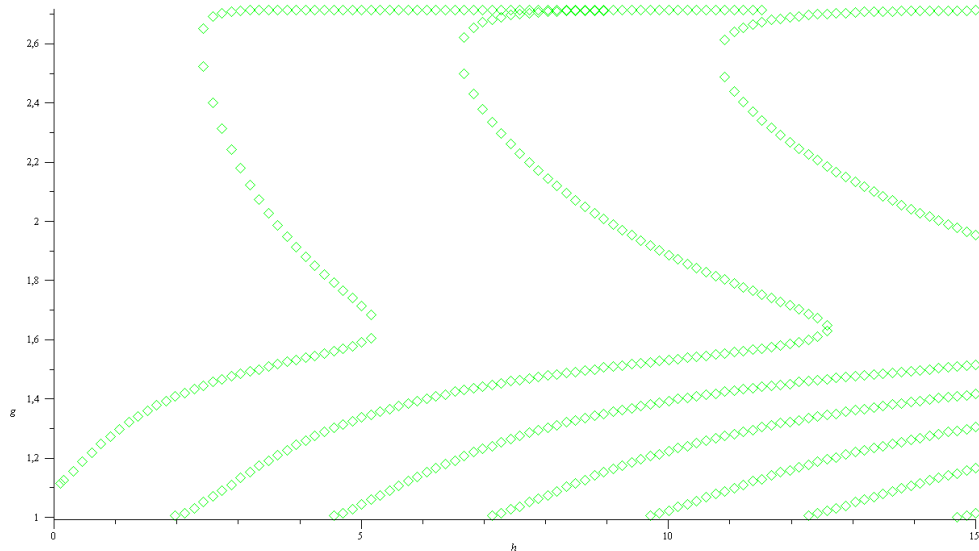
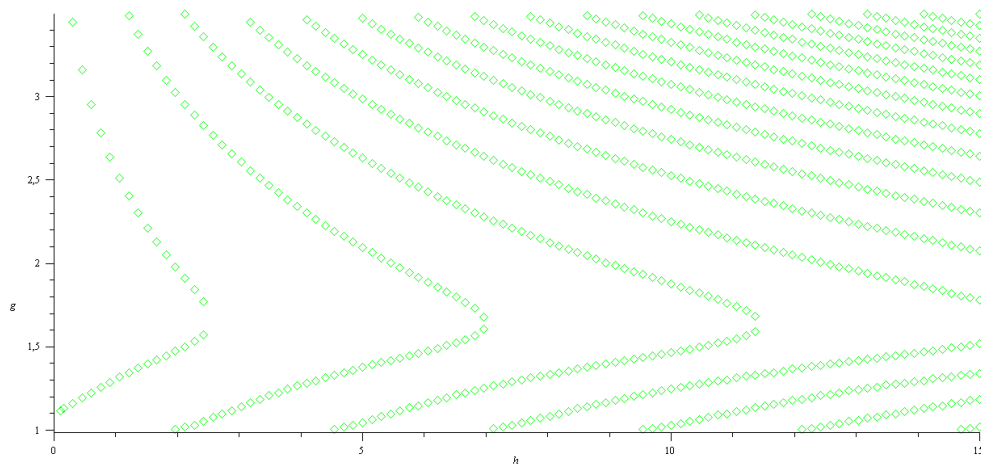
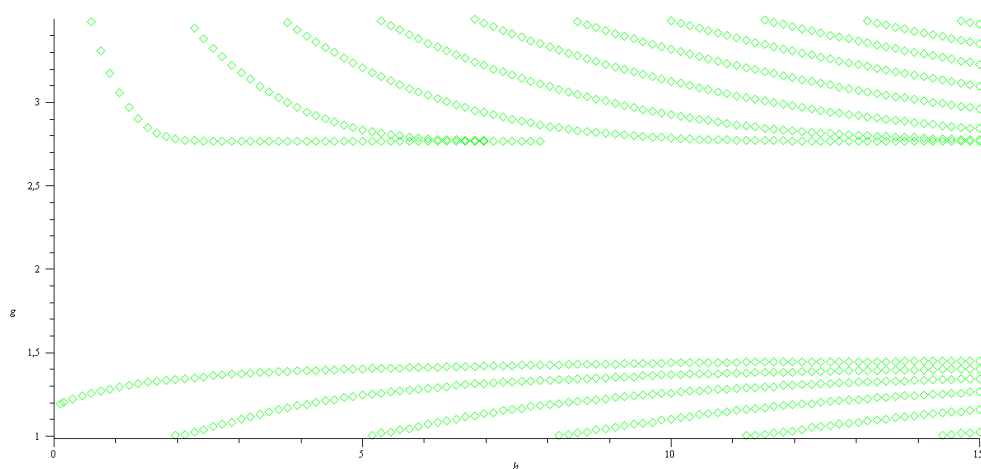


Рис. 2. $\epsilon_2 = 2$, $\epsilon_3 = 2,5$, $\alpha = 0,02$, $\beta = 0,01$

Заключение

Рассматриваемая задача на собственные значения для керровской нелинейности (и даже для обобщенной керровской [4]) может быть решена точно: дисперсионное уравнение выписывается в эллиптических функциях. Однако исследование такого дисперсионного уравнения не является тривиальной задачей и будет усложняться при увеличении числа слоев. В то же время такие многослойные структуры (линейные), носящие название одномерных фотонных кристаллов, активно изучаются в настоящее время [5, 6]. Все это оправдывает разработку численных методов решения указанного класса задач.

Рис. 3. $\epsilon_2 = 2$, $\epsilon_3 = 2,5$, $\alpha = 0,02$, $\beta = 0,05$ Рис. 4. $\epsilon_2 = 2,5$, $\epsilon_3 = 2$, $\alpha = 0,02$, $\beta = 0,03$

Список литературы

1. **Eleonskii, P. N.** Cylindrical Nonlinear Waveguides / L. G. Oganеs'yants, P. N. Eleonskii, V.P. Silin // Soviet physics JETP. – 1972. – V. 35, № 1. – P. 44–47.
2. **Валовик, Д. В.** Распространение электромагнитных волн в нелинейных слоистых средах / Д. В. Валовик., Ю. Г. Смирнов. – Пенза : Изд-во ПензГУ, 2010. – 264 с.
3. **Понтрягин, Л. С.** Обыкновенные дифференциальные уравнения / Л. С. Понтрягин. – М. : ГИФМЛ, 1961. – 312 с.
4. **Валовик, Д. В.** Распространение электромагнитных ТЕ-волн в слое из нелинейного метаматериала / Д. В. Валовик // Радиотехника и электроника. – 2011. – Т. 56, № 5. – С. 587–599.
5. **Joannopoulos, J. D.** Photonic crystals: Molding the flow of light / J. D. Joannopoulos, S. G. Johnson, J. N. Winn, R. Meade. – Princeton : Princeton University Press, 2008. – 304 p.
6. **Lourtioz, J.-M.** Photonic crystals / J.-M. Lourtioz et al. – Berlin : Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005. – 430 p.

Валовик Дмитрий Викторович

кандидат физико-математических наук,
доцент, кафедра математики
и суперкомпьютерного моделирования,
Пензенский государственный
университет

E-mail: dvalovik@mail.ru

Valovik Dmitry Victorovich

Candidate of physical and mathematical
sciences, associate professor,
sub-department of mathematics
and supercomputer modeling,
Penza State University

Смирнов Юрий Геннадьевич

доктор физико-математических наук,
профессор, заведующий кафедрой
математики и суперкомпьютерного
моделирования, Пензенский
государственный университет

E-mail: mmm@pnzgu.ru

Smirnov Yury Gennadyevich

Doctor of physical and mathematical
sciences, professor, head of sub-department
of mathematics and supercomputer
modeling, Penza State University

Широкова Екатерина Алексеевна

аспирант, Пензенский
государственный университет

E-mail: ekaterina_shirokova88@mail.ru

Shirokova Ekaterina Alekseevna

Postgraduate student,
Penza State University

УДК 517.927, 519.62, 517.958

Валовик, Д. В.

Численный метод в задаче о распространении электромагнитных ТЕ-волн в двухслойной нелинейной волноведущей структуре / Д. В. Валовик, Ю. Г. Смирнов, Е. А. Широкова // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2012. – № 1 (21). – С. 66–74.