Е. П. Вдовин, Большие нильпотентные подгруппы конечных простых групп,
Алгебра и логика, 2000, том 39, номер 5, 526–546

https://www.mathnet.ru/al290

Алгебра и логика, 39, N 5 (2000), 526—546

УДК 512.542.5

БОЛЬШИЕ НИЛЬПОТЕНТНЫЕ ПОДГРУППЫ КОНЕЧНЫХ ПРОСТЫХ ГРУПП*)

Е. П. ВДОВИН

Введение

В данной работе изучаются строение и порядки больших нильпотентных подгрупп в конечных простых группах и конечных группах, близких к простым — конечных группах лиева типа и симметрических группах. Оценки порядков больших нильпотентных подгрупп в конечных простых и близких к простым группам приведем в табл. 1 и **3**. В частности, докажем, что если G — некоторая конечная неабелева простая группа, N — ее нильпотентная подгруппа, то $|N|^2 < |G|$ (теор. 2.2).

Основным инструментом для изучения нильпотентных подгрупп в конечных группах лиева типа является строение централизаторов полупростых элементов, полученное Картером в [1, 2]. Кроме того, в большинстве конечных простых групп большая нильпотентная подгруппа совпадает с некоторой силовской подгруппой. Поэтому нам потребуются дополнительные сведения о строении силовских подгрупп в конечных простых группах.

Строение силовских подгрупп в симметрических и знакопеременных группах известно достаточно давно, а в конечных группах Шевалле изу-

*)Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП "Интеграция", проект N 274, Российского фонда фундаментальных исследований, проект N 99-01-00550, Международной соросовской программы образования в области точных наук, грант S99-56, и СО РАН, грант для коллективов молодых ученых, постановление Президиума N 83 от 10.03.2000.

чалось рядом авторов (см., например, [3—5]). Кроме того, Кабанов и Кондратьев в своей обзорной работе [6] указали строение и порядки силовских 2-подгрупп во всех конечных простых группах, кроме спорадических. В [7] Зенков и Мазуров доказали, что в каждой конечной простой неабелевой группе для любого простого числа p найдутся две силовские p-подгруппы, имеющие тривиальное пересечение.

Отметим, что порядки и строение больших разрешимых подгрупп в конечных простых и близких к простым группах известны. В [8] Манн изучил строение и порядки больших разрешимых подгрупп в симметрических и линейных группах, а во всех группах лиева типа порядок и строение больших разрешимых подгрупп получил Сегев [9].

Обозначения и определения, используемые в настоящей работе, можно найти в [10—12]. Если G — группа, то запись $H \leq G$ означает, что H является подгруппой группы G, $H \trianglelefteq G$ означает, что H является нормальной подгруппой группы G. Через $|G : H|$ обозначается индекс подгруппы H в группе G, $N_G(H)$ — нормализатор подгруппы H в группе G. Если подгруппа H нормальна в G, то через G/H обозначается фактор-группа группы G по H. Если M — подмножество группы G, то через $\langle M \rangle$ обозначается подгруппа, порожденная множеством M, $|M|$ — мощность множества M (или порядок элемента, если вместо множества стоит один элемент). Через $C_G(M)$ обозначается централизатор множества M в группе G, $C_G(G) = \zeta(G)$ — центр группы G. Сопряжение элемента x с помощью элемента y в группе G записывается как $x^y = y^{-1}xy$. Подгруппа Фиттинга группы G обозначается через $F(G)$, подгруппа Фраттини группы G — через $\Phi(G)$. Если x, y — два элемента группы G, то $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$ — коммутатор элементов x и y, $[G, G] = G'$ — коммутант группы G. Период группы G обозначается $\exp(G)$. Пусть $A \times B$ — прямое произведение групп A и B, $A * B$ — центральное произведение групп A и B.

Пусть π — некоторое подмножество множества простых чисел. Тогда для конечной группы G через $O_\pi(G)$ обозначается наибольшая нормальная подгруппа группы G, порядок которой делится только на числа из π, $O^\pi(G)$ — нормальная подгруппа, порожденная элементами, порядок которых не делится на простые числа из π. Под большой нильпотентной подгруппой конечной группы G всегда понимается нильпотентная подгруппа наибольшего порядка.

Если φ — гомоморфизм группы G, g — элемент группы G, то G^φ и g^φ — образы группы G и элемента g относительно гомоморфизма φ. Если φ — некоторый автоморфизм группы G, то через G_φ обозначается множество неподвижных точек автоморфизма φ.

Обозначения, связанные с конечными группами лиева типа, выбраны так же, как в [11]. Под группой Шевалле, если не оговорено противное, понимается как универсальная группа Шевалле, так и любая ее фактор-группа по подгруппе из центра. При изучении групп Шевалле $GF(q)$ будет обозначать поле порядка q, p — его характеристику, $GF(q)^*$ — мультипликативную группу поля $GF(q)$. Группу Шевалле, соответствующую корневой системе Φ над полем $GF(q)$, обозначим $\Phi(q)$. Группу Вейля, соответствующую корневой системе Φ, обозначим $W(\Phi)$. Скрученные группы обозначим символами ${}^2A_n(q^2)$, ${}^2D_n(q^2)$, ${}^2E_n(q^2)$, ${}^3D_4(q^3)$, ${}^2B_2(q)$, ${}^2G_2(q)$ и ${}^2F_2(q)$. Пусть Φ^+ — множество положительных корней корневой системы Φ, $\Delta = \{r_1, \dots, r_k\}$ — множество фундаментальных корней, причем нумерация выбирается как в [11, (3.4)]. Элемент x из группы Шевалле $\Phi(q)$ называется полупростым, если его порядок взаимно прост с p, и унипотентным, если его порядок является степенью p. Аналогично, полупростая и унипотентная подгруппы группы $\Phi(q)$ определяются как подгруппы, порядок которых взаимно прост с p (p'-подгруппы) и является степенью p соответственно. Расширенной диаграммой Дынкина группы Шевалле G называется диаграмма, которая получается после добавления к исходной диаграмме Дынкина корня $-r_0$ (здесь r_0 — корень максимального веса) и присоединения его к остальным вершинам по обычному правилу.

§ 1. Вспомогательные результаты для алгебраических групп

В этом разделе будут приведены необходимые сведения о строении линейных алгебраических групп (в дальнейшем для краткости слово "линейных“ будем опускать), а также получены вспомогательные утверждения, которыми мы воспользуемся для оценки порядков нильпотентных подгрупп. Основные определения и результаты о строении и свойствах алгебраических групп можно найти в [12]. Если G — алгебраическая группа, то через G^0 обозначена компонента единицы группы G. Алгебраическая группа называется полупростой, если ее радикал тривиален, и алгебраическая группа называется редуктивной, если ее унипотентный радикал тривиален (в обоих случаях не предполагается, что алгебраическая группа связна). Хорошо известно (см., например, [12]), что связная полупростая алгебраическая группа — это центральное произведение связных простых алгебраических групп, а связная редуктивная алгебраическая группа G — это произведение тора S и полупростой группы M, причем $S = \zeta(G)^0$, $M = [R, R]$ и группа $S \cap M$ конечна.

Пусть G — связная редуктивная алгебраическая группа, T — ее максимальный тор (под тором всегда понимается связная диагонализируемая группа), B — подгруппа Бореля, содержащая тор T. Существует такая борелевская подгруппа B^-, что $B \cap B^- = T$. Пусть Φ — корневая система относительно тора T, $\varphi : N_G(T) \to N_G(T)/T = W$ — канонический гомоморфизм на группу Вейля W группы G, X_α — корневые подгруппы относительно тора T (одномерные T-инвариантные унипотентные подгруппы групп B и B^-). Действие группы Вейля W на корневой системе Φ определяется следующим образом (см. [12, 24.1]). Пусть для каждого элемента w из W взят некоторый его представитель n_w из группы G. Тогда группа Вейля действует на корнях корневой системы Φ по правилу $\alpha^w(t) = \alpha(t^{n_w})$ для всех $\alpha \in \Phi$, $t \in T$. Аналогичным образом группа Вейля действует на весах представления π группы G. Хорошо известно, что $B = TU$, где $U = \langle X_\alpha : \alpha \in \Phi^+ \rangle$ — максимальная унипотентная подгруппа группы G, а $B^- = TU^-$, где $U^- = \langle X_\alpha : \alpha \in \Phi^- \rangle$. Если на положительных корнях корневой системы Φ задать порядок, то любой элемент из U единственным образом записывается в виде произведения элементов из корневых подгрупп X_α (взятых в заданном порядке).

Пусть G — связная редуктивная группа. Зафиксируем для каждого элемента ω из группы Вейля W его представителя n_w из группы G. Тогда любой элемент группы G единственным образом представим в виде un_wtv, где $v \in U$, $t \in T$, $u \in U \cap n_wU^-n_w^{-1}$ (см., например, [12, теор. 28.3]). Такое представление элементов группы G называют разложением Брюа. Кроме того, в любой связной редуктивной группе каждый полупростой элемент содержится в некотором максимальном торе, а каждый унипотентный элемент — в некоторой максимальной (и связной) унипотентной подгруппе.

Пусть G — связная простая алгебраическая группа, π — ее некоторое точное рациональное представление, Γ_π — решетка, порожденная весами представления π. Через Γ_{ad} обозначается решетка, порожденная корнями системы Φ, через Γ_{sc} — решетка, порожденная фундаментальными весами. Справедливы следующие включения $\Gamma_{ad} \leq \Gamma_\pi \leq \Gamma_{sc}$.

Известно, что для корневой системы данного типа существует несколько различных простых алгебраических групп, которые называются изогениями. Они различаются строением группы Γ_π и порядком конечного центра. В том случае, когда решетка Γ_π совпадает с Γ_{sc}, говорят, что группа G односвязна, и она обозначается G_{sc}. Если решетка Γ_π совпадает с Γ_{ad}, то говорят, что группа G имеет присоединенный тип, ее обозначают G_{ad}. Любая группа с корневой системой данного типа получается из группы G_{sc} как фактор-группа по подгруппе из центра. Центр группы G_{ad} тривиален, и она проста как абстрактная группа.

Пусть c_i — коэффициент, с которым фундаментальный корень r_i входит в разложение корня r_0. Простые числа, делящие коэффициенты c_i, называются *плохими* простыми числами.

Далее напомним несколько фундаментальных результатов о строении алгебраических групп.

ЛЕММА 1.1 [12, теор. 15.3]. *Пусть G — алгебраическая группа. Тогда для любого $x \in G$ существуют элементы $s, u \in G$ такие, что $x = su = us$, элемент s полупрост (и называется полупростой частью элемента x, в дальнейшем обозначим его через x_s), элемент u унипотентен (и называется унипотентной частью элемента x, в дальнейшем обозна-*

чим его через x_u), *и такие элементы* s, *и единственны.* (*Разложение элемента* x *в виде* $x_s x_u$ *называют разложением Жордана*).

ЛЕММА 1.2 [12, теор. 21.3 и теор. 22.2]. *Пусть* G — *связная алгебраическая группа. Тогда все подгруппы Бореля группы* G *сопряжены. Более того, максимальные торы и максимальные связные унипотентные подгруппы — это в точности максимальные торы и максимальные связные унипотентные подгруппы групп Бореля. Кроме того, все максимальные торы и максимальные связные унипотентные группы сопряжены, и любой полупростой* (*унипотентный*) *элемент лежит в некотором максимальном торе* (*максимальной связной унипотентной подгруппе*).

Теперь напомним, каким образом связаны конечные группы лиева типа и простые алгебраические группы. Пусть G — простая алгебраическая группа, определенная над алгебраически замкнутым полем характеристики $p > 0$, σ — эндоморфизм группы G такой, что множество его неподвижных точек G_σ конечно. Эндоморфизм σ с таким условием в дальнейшем будем называть автоморфизмом Фробениуса, хотя он может и не совпадать с классическим автоморфизмом Фробениуса. Отметим, что σ является автоморфизмом, если группа G рассматривается как абстрактная группа и σ является эндоморфизмом, если G рассматривается как алгебраическая группа. В общем случае σ имеет вид $q\sigma_0$, где $q = p^\alpha$ — возведение в степень q, а σ_0 — графовый автоморфизм порядка 1, 2 или 3. Тогда $O^{p'}(G_\sigma)$ — группа лиева типа над конечным полем характеристики p и любую группу лиева типа (нормальную или скрученную) можно получить аналогичным образом.

Пусть T — максимальный σ-инвариантный тор связной простой алгебраической группы G. В дальнейшем *максимальным тором* группы G_σ (соответственно $O^{p'}(G_\sigma)$) называется группа T_σ (соответственно $T_\sigma \cap O^{p'}(G_\sigma)$).

Докажем вспомогательный результат, который будет использоваться при изучении нильпотентных подгрупп в конечных группах Шевалле.

ЛЕММА 1.3. *Пусть* G — *связная редуктивная линейная алгебра-*

ическая группа над алгебраически замкнутым полем характеристики p, R — ее редуктивная (не обязательно связная) подгруппа максимального ранга, причем $(|R : R^0|, p) = 1$, $s \in R^0$ — некоторый полупростой элемент, T — произвольный максимальный тор в R^0, содержащий элемент s. Тогда группа $C_R(s)$ редуктивна (хотя не обязательно связна). Она порождается тором T вместе с теми корневыми подгруппами U_α, для которых $\alpha(s) = 1$, и теми представителями элементов группы Вейля $n_w \in N_R(T)$, которые коммутируют с s. Компонента единицы $C_R(s)^0$ порождается тором T и теми U_α, для которых $\alpha(s) = 1$. В частности, группа $C_R(s)/C_R(s)^0$ изоморфна некоторой секции группы Вейля для G. Более того, все унипотентные элементы из $C_R(s)$ лежат в $C_R(s)^0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем подгруппу Бореля B группы R^0, содержащую T. Все указанные в лемме порождающие лежат в $C_R(s)$. Докажем, что $C_R(x)$ порождается указанными в лемме элементами. Покажем сначала, что в группе R (которая не обязательно связна) имеет место разложение Брюа. Пусть x — произвольный элемент из R. Тогда B^x — некоторая подгруппа Бореля группы R^0. В силу леммы 1.2 существует такой элемент $s \in R^0$, что $B^x = B^s$. Элемент xs^{-1} нормализует подгруппу B. Тор $T^{xs^{-1}}$ является максимальным тором группы B. Поскольку все максимальные торы в B сопряжены (лемма 1.2), существует элемент g из B такой, что $T^{xs^{-1}} = T^g$. Поэтому можно считать, что xs^{-1} нормализует тор T. Тогда $xs^{-1} = n_w t$ для некоторого $n_w \in N_R(T)$, $t \in T$. Так как t нормализует B и xs^{-1} нормализует B, элемент n_w тоже нормализует B, значит, он нормализует U — максимальную (связную) унипотентную подгруппу группы B. Поскольку s лежит в R^0, для него существует разложение Брюа, т. е. он представим в виде $u_1 n_{w_1} t_1 v_1$, где $u_1 \in U \cap n_{w_1} U^- n_{w_1}^{-1}$, $n_{w_1} \in N_{R^0}(T)$, $t \in T$ и $v_1 \in U$. Значит, элемент x представим в виде $x = n_w t u_1 n_{w_1} t_1 v_1$. Так как элементы t и n_w нормализуют U, элемент x представим в виде $x = u_2 n_{w_2} t_2 v_2$, причем $u_2 \in U \cap n_{w_2} U^- n_{w_2}^{-1}$, $n_{w_2} \in N_R(T)$, $t_2 \in T$ и $v_2 \in U$. Поскольку это разложение Брюа совпадает с разложением Брюа элемента x в группе G, оно единственно.

Если $x \in C_R(s)$, то с помощью разложения Брюа можно записать

$x = un_w tv$, где $v \in U$, $t \in T$, $u \in U \cap n_w U^- n_w^{-1}$. Так как s нормализует U, $N(T)$, U^- и коммутирует с x, единственность разложения влечет, что каждый из u, n_w, v коммутирует с s. Более того, поскольку s нормализует каждую корневую подгруппу U_α, единственность разложения группы U в произведение корневых подгрупп U_α $(\alpha > 0)$ влечет, что $\alpha(s) = 1$, как только u или v содержит нетривиальный множитель из U_α. Таким образом, x лежит в группе, порожденной тором T и теми U_α, n_w, которые перестановочны с s.

Поскольку T и все U_α, где $\alpha(s) = 1$, связны, то подгруппа H, порожденная ими, замкнута, связна и нормальна в $C_R(s)$. Из того, что группа Вейля конечна, следует $|C_R(s) : H| < \infty$. Таким образом, получаем: $H = C_R(s)^0$.

Так как корни группы $C_R(s)$ относительно тора T возникают парами (т. е. если $\alpha(s) = 1$, то и $-\alpha(s) = 1$), группа $C_R(s)$ редуктивна. Действительно, если $C_R(s)$ имеет нетривиальный унипотентный радикал V, то он нормализуется тором T, значит, содержит некоторую корневую подгруппу U_α. Радикал V нормализуется корневой группой $U_{-\alpha}$, что дает неунипотентный элемент в V, получили противоречие.

Поскольку $(|R : R^0|, p) = 1$, все унипотентные элементы из группы R лежат в R^0, поэтому все унипотентные элементы из $C_R(s)$ лежат в $C_{R^0}(s)$. Тот факт, что в связной редуктивной группе R^0 любой унипотентный элемент из $C_{R^0}(s)$ лежит в $C_{R^0}(s)^0$, хорошо известен (см. [13, теор. 2.2]). □

Пусть $x \in G$ — полупростой элемент. Тогда в силу предыдущей леммы $C_G^0(x)$ будет связной редуктивной подгруппой максимального ранга, и $[C_G^0(x), C_G^0(x)]$ — полупростой группой, корневая система которой является аддитивно замкнутой подсистемой корневой системы группы G. Такие подгруппы в дальнейшем назовем *подсистемными*. Поскольку в настоящей работе изучаются конечные группы, особый интерес представляют элементы простого порядка r $(\neq p)$.

ЛЕММА 1.4 [14, 14.1]. *Пусть G — простая связная алгебраическая группа и элемент $x \in G$ имеет простой порядок r $(\neq p)$. Пусть $C' = [C_G^0(x), C_G^0(x)]$ — подсистемная подгруппа. Если Δ — диаграмма*

Дынкина корневой системы группы C', то справедливо одно из следующих утверждений:

1) Δ получается удалением вершин из диаграммы Дынкина группы G;

2) Δ получается из расширенной диаграммы Дынкина группы G удалением одной вершины r_i, где $r = c_i$ — коэффициент корня r_i в разложении самого длинного корня r_0.

В частности, если r не является плохим простым для группы G, то $\dim(\zeta^0(C_G^0(x))) \geqslant 1$.

§ 2. Большие нильпотентные подгруппы

В данном разделе изучаются большие нильпотентные подгруппы в конечных простых группах и группах, близких к простым. Раздел разбит на четыре части. В первой изучаются большие нильпотентные подгруппы в симметрических и знакопеременных группах. Во второй и третьей рассматриваются конечные группы лиева типа, а в четвертой — спорадические группы. В большинстве случаев большая нильпотентная группа совпадает с некоторой силовской подгруппой. Если G — конечная группа, то через $Syl_p(G)$ обозначается множество силовских p-подгрупп группы G. Через $N(G)$ обозначено множество больших нильпотентных подгрупп конечной группы G, через $n(G)$ — порядок произвольного элемента из $N(G)$.

2.1. Большие нильпотентные подгруппы симметрических и знакопеременных групп. Пусть G — некоторая подгруппа группы S_n. Тогда множество $\{1, \dots, n\}$ относительно действия группы G разбивается на непересекающиеся подмножества (орбиты), на каждом из которых группа G действует транзитивно. Докажем сначала следующую техническую лемму.

ЛЕММА 2.1. *Пусть N — нильпотентная подгруппа группы S_n и $I_1, I_2, \dots$ — множество орбит центра $\zeta(N)$ группы N на множестве $\{1, \dots, n\}$. Пусть J_1 — набор множеств I_m порядка 1, J_2 — набор мно-*

жеств I_m *порядка* 2 *и т. д. Пусть* $K_1 = \bigcup\limits_{|I_m|=1} I_m$, $K_2 = \bigcup\limits_{|I_m|=2} I_m$ *и т. д. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *группа* $N/\zeta(N)$ *переставляет множества одного порядка и, следовательно,* $N \leq N_1 \times N_2 \times \ldots$, *где* $N_1 \leq S_{K_1}$, $N_2 \leq S_{K_2}$ *и т. д.*;

2) *если* k_i — *количество орбит относительно действия группы* $N/\zeta(N)$ *на множестве* J_i, *то* $|\zeta(N) \cap N_i| = i^{k_i}$;

3) *если* $p_1, \ldots, p_s$ — *все простые числа, на которые делится* i, *то порядок группы* N_i *делится только на простые числа* $p_1, \ldots, p_s$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть σ — элемент из группы N такой, что он переводит некоторый элемент i из множества I_1 в элемент из некоторого множества I_k. Тогда для любого $\tau \in \zeta(N)$ справедливо $i^{\sigma\tau} = i^{\tau\sigma} \in I_k$. Поскольку $\zeta(N)$ на множестве I_1 действует транзитивно, имеем $\{i^\tau : \tau \in \in \zeta(N)\} = I_1$; следовательно, $I_1^\sigma \subseteq I_k$, т. е. $|I_1| \leqslant |I_k|$. С другой стороны, элемент σ^{-1} переводит некоторый элемент множества I_k в элемент i из множества I_1; тогда $I_k^{\sigma^{-1}} \subseteq I_1$, т. е. $|I_k| \leqslant |I_1|$. Объединяя полученные неравенства, имеем $|I_1| = |I_k|$. Значит, п. 1 леммы доказан.

Докажем теперь п. 2. Можно считать, что $K_i = \{1, \ldots, n\}$ и группа $N/\zeta(N)$ действует транзитивно на орбитах (относительно действия центра $\zeta(N)$) множества J_i. Пусть $\{I_1, \ldots, I_k\}$ — множество всех орбит множества J_i относительно действия группы $\zeta(N)$. Тогда порядок каждой из них равен i и $i \cdot k = n$. Пусть $l \in I_1$ — некоторый элемент из орбиты I_1. Рассмотрим стабилизатор $St_{\zeta(N)}(l)$ элемента l в центре $\zeta(N)$ и предположим, что $\tau \in St_{\zeta(N)}(l)$. Пусть $m \in K_i$ — элемент, лежащий в некоторой орбите I_j. Поскольку группа $N/\zeta(N)$ действует транзитивно на орбитах $I_1, \ldots, I_k$, существует элемент $\sigma \in N$ такой, что $I_j^\sigma = I_1$. Далее, группа $\zeta(N)$ действует транзитивно на множестве I_1, поэтому существует элемент $\varphi \in \zeta(N)$ такой, что $(m^\sigma)^\varphi = l$. Тогда $m^\tau = ((l^{\varphi^{-1}})^{\sigma^{-1}})^\tau = ((l^\tau)^{\varphi^{-1}})^{\sigma^{-1}} = m$, следовательно, $\tau = \varepsilon$ и $St_{\zeta(N)}(l) = \{\varepsilon\}$. В силу теоремы Лагранжа выполняется $|\zeta(N)| = |\zeta(N) : St_{\zeta(N)}(l)| \cdot |St_{\zeta(N)}(l)| = i$.

Далее, по определению, $J_i = \{I_k : |I_k| = i\}$. Предположим, что найдется простое число $q \notin \{p_1, \ldots, p_s\}$, которое делит порядок группы N_i. Поскольку N_i — нильпотентная группа, существует центральный элемент

τ порядка q. Поскольку группа N является прямым произведением групп $N_1, N_2, \ldots$, элемент τ лежит в $\zeta(N)$. Из п. 2 следует, что $|\zeta(N) \cap N_i| = i^k$, где $k \geqslant 1$. Тогда τ лежит в $\zeta(N) \cap N_i$, но $|\tau|$ не делит $|\zeta(N) \cap N_i|$; получили противоречие. □

Отметим, что группа N_1, определенная в лемме, тривиальна. Теперь мы можем найти строение больших нильпотентных подгрупп в симметрических и знакопеременных группах.

ТЕОРЕМА 2.1. *Большая нильпотентная подгруппа в знакопеременной группе сопряжена с одной из следующих групп:*

1) $\langle(1,2,3)\rangle$, *если* $n = 3$;

2) $\langle(1,2,3,4,5)\rangle$, *если* $n = 5$;

3) $\langle(1,2,3)\rangle \times \langle(4,5,6)\rangle$, *если* $n = 6$;

4) $Syl_2(A_n)$, *если* $n \neq 2(2k+1)+1$ *для некоторого натурального* k;

5) $Syl_2(A_{n-3}) \times \langle(n-2, n-1, n)\rangle$, *если* $n = 2(2k+1)+1$, $k \geqslant 1$.

Большая нильпотентная подгруппа в симметрической группе сопряжена с одной из следующих групп:

1) $Syl_2(S_n)$, *если* $n \neq 2(2k+1)+1$ *для некоторого натурального* k;

2) $Syl_2(S_{n-3}) \times \langle(n-2, n-1, n)\rangle$, *если* $n = 2(2k+1)+1$ *для некоторого натурального* k.

Во всех группах большая нильпотентная подгруппа единственна с точностью до сопряжения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что утверждение теоремы неверно и n — минимальное натуральное число, дающее контрпример к утверждению теоремы. Пусть P — подгруппа группы S_n, строение которой совпадает со строением нильпотентной подгруппы, указанной в лемме, и пусть $N \in N(S_n)$ — некоторая большая нильпотентная подгруппа, не сопряженная с P.

Относительно действия $\zeta(N)$ множество $\{1, \ldots, n\}$ разбивается на орбиты. Возможны следующие два случая.

1. Среди орбит центра $\zeta(N)$ имеются подмножества разного порядка. Тогда по лемме 2.1 группа $N(S_n)$ является подгруппой в прямом произведении групп $N_1 \leq S_{n_1}$ и $N_2 \leq S_{n_2}$, причем $n_1 + n_2 = n$. Поскольку

n — минимальное натуральное число, для которого не выполняется утверждение теоремы, группы из $N(S_{n_1})$ и $N(S_{n_2})$ имеют такое строение, как указано в лемме.

Пусть $n_1 \neq 2(2k+1)+1$, тогда $|N_1| \leqslant |S|$, где $S \in Syl_2(S_{n_1})$. В зависимости от того, представимо число n_2 в виде $2(2k+1)+1$ или нет, получаем следующие оценки: $|N_2| \leqslant 3|S_1|$ либо $|N_2| \leqslant |S_2|$, где $S_1 \in Syl_2(S_{n_2-3})$ и $S_2 \in Syl_2(S_{n_2})$. В первом варианте имеем $|N| \leqslant |N_1| \cdot |N_2| \leqslant |Syl_2(S_{n_1})| \cdot 3|Syl_2(S_{n_2-3})| \leqslant 3|Syl_2(S_{n-3})| \leqslant |P|$, причем равенство может достигаться лишь тогда, когда $N_1 \in Syl_2(S_{n_1})$, $N_2 = S_1 \times \langle(k_1, k_2, k_3)\rangle$, т. е. тогда, когда с точностью до сопряжения выполняется равенство $N = P$. Поскольку n — минимальное число, дающее контрпример, такое невозможно. Аналогично рассматривается ситуация, когда $N_2 \in Syl_2(S_{n_2})$.

Пусть $n_1 = 2(2k_1 + 1) + 1$, $n_2 = 2(2k_2 + 1) + 1$. Тогда $|N(G)| \leqslant \leqslant 3|S_3| \cdot 3|S_1| < |Syl_2(S_n)| = |P|$, где $S_3 \in Syl_2(S_{n_1-3})$; получили противоречие. Таким образом, первый случай, когда среди орбит существуют подмножества разного порядка, невозможен.

2. Пусть все орбиты относительно действия группы $\zeta(N)$ имеют одинаковый порядок k. Пусть $I_1, \ldots, I_{n/k}$ — все орбиты множества $\{1, \ldots, n\}$ относительно действия группы $\zeta(N)$. Если действие группы $N/\zeta(N)$ на множестве орбит $I_1, \ldots, I_{n/k}$ не является транзитивным, группа N представляет собой подгруппу прямого произведения групп N_1 и N_2, каждая из которых является нильпотентной подгруппой в симметрической группе меньшей степени. Так же как и в первом случае, можно доказать, что N не будет контрпримером.

Пусть группа N на орбитах $I_1, \ldots, I_{n/k}$ действует транзитивно. В силу леммы 2.1(2) порядок центра $\zeta(N)$ равен k, группу $N/\zeta(N)$ можно рассматривать как нильпотентную подгруппу группы $S_{n/k}$, поэтому $|N| \leqslant \leqslant k \cdot |N_3|$, где $N_3 \in N(S_{n/k})$. Нетрудно проверить, что $|N| \leqslant |Syl_2(S_n)|$, кроме $n = k = 3$. Теорема для симметрических групп доказана.

Рассмотрим теперь знакопеременные группы. Пусть n — минимальное натуральное число, при котором существует контрпример к утверждению теоремы, и пусть $N \in N(A_n)$ — этот контрпример. Через R обознача-

Таблица 1

Группа G	$n(G)$	Строение
A_3	3	$\langle(1,2,3)\rangle$
A_5	5	$\langle(1,2,3,4,5)\rangle$
A_6	9	$\langle(1,2,3)\rangle \times \langle(4,5,6)\rangle$
A_n, $n \neq 2(2k+1)+1$	$\frac{1}{2}2^{[n/2]+[n/2^2]+\dots}$	S, где $S \in Syl_2(A_n)$
A_n, $n = 2(2k+1)+1$	$\frac{3}{2}2^{[(n-3)/2]+[(n-3)/2^2]+\dots}$	$S \times \langle(n-2, n-1, n)\rangle$, где $S \in Syl_2(A_{n-3})$
S_n, $n \neq 2(k+1)+1$	$2^{[n/2]+[n/2^2]+\dots}$	S, где $S \in Syl_2(S_n)$
S_n, $n = 2(2k+1)+1$	$3 \cdot 2^{[(n-3)/2]+[(n-3)/2^2]+\dots}$	$S \times \langle(n-2, n-1, n)\rangle$, где $S \in Syl_2(S_{n-3})$

ется нильпотентная подгруппа группы A_n, которая совпадает с большей нильпотентной группой, указанной в теореме. Как и в случае симметрических групп, возможны два случая.

1. Действие группы $N/\zeta(N)$ на множестве орбит центра $\zeta(N)$ не является транзитивным. Тогда либо группа N содержится в прямом произведении нильпотентных групп N_1 и N_2, каждая из которых является нильпотентной подгруппой в знакопеременной группе меньшей размерности, либо она лежит в прямом произведении двух нильпотентных групп N_1 и N_2, каждая из которых является нильпотентной подгруппой в симметрической группе меньшей размерности, но не совпадает с этим прямым произведением. Нетрудно проверить, используя известные порядки больших нильпотентных подгрупп в симметрических группах, что в этом случае N не является контрпримером.

2. Группа $N/\zeta(N)$ на множестве орбит действует транзитивно. Пусть порядок каждой из орбит равен k. Тогда, в силу леммы 2.1, $|\zeta(N)| = k$ и группу $N/\zeta(N)$ можно рассматривать как нильпотентную подгруппу группы $S_{n/k}$. Нетрудно проверить, что при $n \geqslant 7$ справедливо неравенство $k|N_4| \leqslant (1/2)|S| \leqslant |R|$, где $N_4 \in N(A_{n/k})$ и $S \in Syl_2(S_n)$. □

2.2. Общее строение нильпотентных подгрупп в простых алгебраических группах. Покажем, что имеет место

ЛЕММА 2.2. *Пусть N — замкнутая нильпотентная подгруппа связной простой алгебраической группы G. Тогда существует редуктивная подгруппа R группы G максимального ранга, содержащая группу N. Пусть W_1 — группа Вейля группы R^0. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $N = N_s \times N_u$, т. е. группа N представима в виде прямого произведения своих подгрупп, состоящих из полупростых и унипотентных элементов;

2) $N_u \leq R^0$ и $\zeta(N_s) \cap R^0 \leq \zeta(R^0)$;

3) если $N_0 = N \cap R^0$, то N/N_0 изоморфно вкладывается в группу $N_W(W_1)/W_1$.

Если группа N состоит из σ-неподвижных элементов относительно некоторого автоморфизма Фробениуса σ, то группа R является σ-инвариантной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть N — некоторая замкнутая нильпотентная подгруппа связной простой алгебраической группы, определенной над алгебраическим замыканием поля $GF(q)$. Тогда группа N состоит из элементов конечного порядка и в силу [10, теор. 12.1.1] представима в виде прямого произведения своих p-подгрупп. В частности, группа N представима в виде $N_s \times N_u$ — прямого произведения своих полупростой и унипотентной частей соответственно.

Если группа N_s нетривиальна, то ее центр также нетривиален. Ясно, что $\zeta(N_s) = (\zeta(N))_s$. Пусть x — некоторый элемент из $\zeta(N_s)$. Тогда $N \subseteq C_G(x)$, причем $N_u \subseteq R^0$. Обозначим через R группу $C_G(x)$. В силу леммы 1.3, R является редуктивной подгруппой группы G максимально-

Таблица 2

Тип системы Φ	Строение групп $N(W(\Phi))$	Оценка для $n(W(\Phi))$
A_n	см. табл. 1	2^{n+1}
B_n и C_n	лежат в $Syl_2(W)$	2^{2n}
D_n	лежат в $Syl_2(W)$	2^{2n-1}

го ранга. Предположим, что существует элемент s из $\zeta(N_s) \cap R^0$, который не лежит в $\zeta(R^0)$. Рассмотрим группу $C_R(s)$. Ясно, что $N \leq C_R(s)$ и $N_u \leq R^0$. Кроме того, $C_R(s)$ — редуктивная подгруппа группы G максимального ранга. Поскольку размерность группы R на каждом шаге понижается, данный процесс конечен (размерность группы G конечна). Повторяя указанный выше процесс, получим редуктивную подгруппу R группы G максимального ранга, содержащую N. Если N состоит из неподвижных точек относительно некоторого автоморфизма Фробениуса σ, то группа R будет σ-инвариантной. Значит, п. 1 и 2 леммы доказаны.

Докажем п. 3. Имеем $N/N_0 = NR^0/N_0R^0 \leq R/R^0$. Из доказательства леммы 1.3 следует, что любой элемент из R представим в виде nx, где $n \in N_R(T)$ для некоторого максимального тора T группы R^0 и $x \in R^0$. Поскольку R^0 нормальна в R, группа $N_R(T)/T$ содержится в группе $N_W(W_1)$. Отсюда получаем, что $R/R^0 \cong N_R(T)/N_{R^0}(T) \leq N_W(W_1)/W_1$. □

ЗАМЕЧАНИЕ. Из леммы 2.2 следует, что группа $N_0/\zeta(N_0)$ является нильпотентной подгруппой в прямом произведении простых алгебраических групп меньшей размерности — группе $R^0/\zeta(R^0)$. Таким образом, данная лемма обобщает результат [15] о строении полупростых нильпотентных подгрупп в обобщенных линейных группах над конечными полями.

Поскольку строение связных редуктивных подгрупп R группы G

максимального ранга, а также подгрупп R_σ известно (см. [1, 2, 16]), нам для исследования нильпотентных подгрупп в конечных группах лиева типа осталось найти порядки больших нильпотентных подгрупп в группах Вейля. Группы Вейля для типов B_n, C_n и D_n являются сплетением 2-группы и симметрической группы S_n. Используя информацию, полученную ранее о строении нильпотентных подгрупп в симметрических группах, можно сделать вывод, что большая нильпотентная подгруппа в группе Вейля для этих типов — это в точности силовская 2-группа. В табл. 2 указаны оценки порядков больших нильпотентных подгрупп в группах Вейля для всех классических групп и их строение.

2.3. Большие нильпотентные подгруппы конечных групп лиева типа. В этой части мы применяем общие свойства нильпотентных подгрупп, полученные ранее, к конечным группам лиева типа. В частности, докажем, что большая нильпотентная подгруппа в большинстве случаев совпадает с максимальной унипотентной подгруппой. Большие нильпотентные подгруппы в конечных группах Шевалле находятся однотипно, поэтому в качестве примера будет рассмотрена группа $A_n(q)$.

Пусть N — некоторая нильпотентная подгруппа группы $A_n(q)$, покажем, что ее порядок не превосходит порядка наибольшей нильпотентной группы, указанного в табл. 3. Можно считать, что центр группы $A_n(q)$ тривиален. Тогда в силу леммы 2.2 группа N содержится в некоторой собственной редуктивной подгруппе максимального ранга связной простой алгебраической группы типа A_n.

Напомним сначала о том, какое строение имеют редуктивные подгруппы максимального ранга в простой связной алгебраической группе типа A_n и как устроены их неподвижные точки относительно автоморфизма Фробениуса σ (см. [2]). Предположим, что группа G имеет тип A_n. Эндоморфизм σ группы G индуцирует эндоморфизм группы характеров X тора T, также называемый σ, который имеет вид $\sigma = q\sigma_0$, где q — степень числа p и σ_0 — изометрия группы X. Изометрия σ_0 имеет порядок 1 или 2 в зависимости от того, будет ли группа G_σ нормальной или скрученной. Группа X содержит множество Φ корней, и Φ удобно задать в виде $\Phi = \{e_i - e_j : i \neq j, i, j \in \{0, 1 \ldots, n\}\}$, где $e_0, e_1, \ldots, e_n$ образуют ортонормированный базис $(n+1)$-мерного евклидова пространства. Группа Вейля W действует на этом пространстве, переставляя базисные элементы в соответствии с симметрической группой S_{n+1}. Изометрия σ_0 действует на корнях либо тождественно, либо как элемент порядка 2.

Корневая система любой σ-инвариантной редуктивной подгруппы группы G эквивалентна относительно W системе Φ_1 следующего типа. Пусть $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ — разбиение числа $n+1$, и пусть $I_1, I_2, \ldots$ — непересекающиеся подмножества множества $\{0, 1, \ldots, n\}$ с условием $|I_1| = \lambda_1$, $|I_2| = \lambda_2$, ... Пусть $\Phi_1 = \{e_i - e_j \in \Phi : i, j \in I_\alpha$ для некоторого $\alpha\}$. Тогда Φ_1 — подсистема системы Φ типа $A_{\lambda_1 - 1} \times A_{\lambda_2 - 1} \times \ldots$, и она будет σ-инвариантной при условии, что, когда σ_0 имеет порядок 2, Φ_1 неподвижна относительно линейного преобразования, определенного правилом $e_i \to -e_{n-i}$.

ЛЕММА 2.3 [2, предл. 7]. *Пусть G — группа типа A_l и пусть эндоморфизм σ таков, что G_σ — группа нормального типа. Пусть G_1 — редуктивная подгруппа максимального ранга в G, соответствующая разбиению λ числа $l+1$. Пусть G_1^g — это σ-инвариантная подгруппа группы G, получаемая скручиванием группы G_1 посредством элемента $w \in W$, определенного правилом $\pi(g^\sigma g^{-1}) = w$. Предположим, w отображается в τ относительно гомоморфизма $N_W(W_1) \to \mathrm{Aut}_W(\Delta_1)$. Пусть n_i — количество частей разбиения λ, равных i, тогда $\mathrm{Aut}_W(\Delta_1) \cong S_{n_2} \times S_{n_3} \times \ldots$. Предположим, что τ дает разбиения $\mu^{(2)}, \mu^{(3)}, \ldots$ чисел $n_2, n_3, \ldots$, соответственно. Тогда простые компоненты полупростой группы $(M^g)_\sigma$ имеют тип $A_{i-1}(q^{\mu_j^{(i)}})$ в точности с одной компонентой для каждого $i = 2, 3, \ldots$ и каждой части $\mu_j^{(i)}$ разбиения $\mu^{(i)}$.*

Порядок полупростой части $(S^g)_\sigma$ группы $(G_1^g)_\sigma$ задается формулой

$$(q-1)|(S^g)_\sigma| = \prod_{i,j} (q^{\mu_j^{(i)}} - 1).$$

Поскольку центр группы $A_n(q)$ предполагается тривиальным, порядок централизатора, указанный в лемме 2.3, необходимо умножить на дробь $1/(n+1, q-1)$. Действительно, в том случае, когда G не является односвязной группой, конечная группа $O^{p'}(G_\sigma)$ не совпадает с G_σ, поэтому порядок централизатора меньше указанного в лемме. В этом случае $G_\sigma = \hat{H}O^{p'}(G_\sigma)$, причем $|\hat{H} : H| = d_1/d$. Здесь $\hat{H}$ — максимальный тор группы G_σ, H — максимальный тор группы $O^{p'}(G_\sigma)$, d_1 — порядок центра группы $O^{p'}(G_\sigma)$, d — порядок центра группы $(G_{sc})_\sigma$. Поэтому для того, чтобы получить порядок централизатора в группе $O^{p'}(G_\sigma)$, необходимо порядок централизатора, указанный в лемме, умножить на d_1/d. Действительно, централизатор любого полупростого элемента содержит некоторый максимальный тор группы Шевалле, и поэтому $(C_G(s)^0)_\sigma = \hat{H}C_{O^{p'}(G_\sigma)}(s)$. Значит, $|(C_G(s)^0)_\sigma : C_{O^{p'}(G_\sigma)}(s)| = d_1/d$, следовательно, $|C_{O^{p'}(G_\sigma)}(s)| = (d_1/d)|(C_G(s)^0)_\sigma|$. Таким образом, порядок централизатора следует умножить на (d_1/d), а в нашем случае $d_1 = 1$ и $d = (n+1, q-1)$.

В силу леммы 2.3 существует подгруппа N_0 группы N, лежащая в некоторой σ-инвариантной связной редуктивной подгруппе R группы G максимального ранга. Кроме того, $|N : N_0| \leqslant 2^{n+1}$ (см. табл. 2). Поскольку мы предполагаем, что центр группы $A_n(q)$ тривиален, группа R является собственной подгруппой группы G. Таким образом, группа N_0 представима в виде центрального произведения нильпотентных подгрупп из групп меньшей размерности и группы, которая является подгруппой неподвижных точек некоторого тора. Поэтому порядок группы N оценивается следующим образом:

$$\begin{gathered}(q-1)|N| \leqslant \\ n(S_{n+1})\frac{1}{(n+1,q-1)}\prod_{i,j}(q^{\mu_j^{(i)}}-1)\prod_{i,j}(i,q^{\mu_j^{(i)}}-1)n(A_{i-1}(q^{\mu_j^{(i)}})).\end{gathered} \tag{1}$$

Здесь в качестве $A_{i-1}(q^{\mu_j^{(i)}})$ рассматривается группа с тривиальным центром. Используя индукцию по лиеву рангу группы, можно показать, что справедливы неравенства

$$(q^k-1)(i,q^k-1)n(A_{i-1}(q^k)) \leqslant (q-1)(ik,q-1)n(A_{ik-1}(q)), \tag{2}$$

$$\begin{gathered}(q-1)(i,q-1)n(A_{i-1}(q))(q-1)(k,q-1)n(A_{k-1}(q)) \leqslant \\ (q-1)(ik,q-1)n(A_{ik-1}(q).\end{gathered} \tag{3}$$

Таблица 3

Группа G	Строение групп из $N(G)$	$n(G)$
$A_1(2^n)$	циклическая группа	2^n+1
$A_1(q)$, $q-1=2^n$	лежит в $Syl_2(A_1(q))$	2^n
${}^2A_2(2^2)$	лежит в $Syl_3({}^2A_2(2^2))$	27
${}^2A_2(3^2)$	лежит в$Syl_2({}^2A_2(3^2))$	32
для всех остальных групп G	большая унипотентная группа	

С помощью (2) и (3) правая часть (1) приводится либо к виду

$$(q-1)^2 n(S_{n+1})(n_1, q-1)n(A_{n_1-1}(q))(n_2, q-1)n(A_{n_2-1}(q)), \tag{4}$$

где $n_1 + n_2 = n + 1$, либо к виду

$$(q^2-1)n(S_{n+1})((n+1)/2, q^2-1)n(A_{(n+1)/2-1}(q^2)). \tag{5}$$

Выражения (4) и (5) не превосходят значений, указанных в табл. 3. Остальные конечные группы лиева типа изучаются аналогично.

В табл. 3 указано строение больших унипотентных подгрупп в том случае, когда конечная группа G данного типа имеет тривиальный центр. Для групп с произвольным центром большая нильпотентная подгруппа — это прообраз большой нильпотентной подгруппы в группе с тривиальным центром относительно естественного гомоморфизма.

2.4. Большие нильпотентные подгруппы спорадических групп. При изучении больших нильпотентных подгрупп воспользуемся информацией из [17]. Во всех спорадических группах большая нильпотентная подгруппа — это силовская подгруппа, поэтому рассуждения, с помощью которых находятся большие нильпотентные группы, однотипны. Опишем лишь идею.

Если N — нильпотентная подгруппа группы G, $p_1, \ldots, p_k$ — все простые числа, делящие порядок группы N, то в N существует центральный элемент порядка $p_1 \cdot \ldots \cdot p_k$. Изучение порядков централизаторов таких элементов с помощью [17] показывает, что порядок группы N в этом случае меньше, чем порядок некоторой силовской подгруппы. В качестве следствия легко получается следующая

ТЕОРЕМА 2.2. *Пусть G — неабелева конечная простая группа, N — ее нильпотентная подгруппа. Тогда справедливо неравенство $|N|^2 < < |G|$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В том случае, когда $N(G)$ совпадает с $Syl_p(G)$ для некоторого простого числа p, утверждение теоремы следует из [7, теор. 2]. В случае, когда $G = A_n$, $n = 2(2k+1)+1$ для некоторого натурального k, легко заметить, что $n(G)^2 < 2^{2(n-1)} < |G|$. Если, наконец, группа G совпадает с $A_1(2^n)$, то группа из $N(G)$ абелева и (см. [18]) справедливо неравенство $n(G)^2 < |G|$. □

В заключение автор выражает искреннюю благодарность Мазурову Виктору Даниловичу за полезные консультации и ценные замечания. Автор также благодарен Васильеву Андрею Викторовичу за чтение и обсуждение рукописи, что позволило исправить многие ошибки и неточности первоначального варианта.

ЛИТЕРАТУРА

1. *R. W. Carter*, Centralizers of semisimple elements in finite groups of Lie type Proc. Lond. Math. Soc., III. Ser., **37**, N 3 (1978), 491–507.
2. *R. W. Carter*, Centralizers of semisimple elements in the finite classical groups, Proc. London Math. Soc., III. Ser., **42**, N 1 (1981), 1–41.
3. *R. W. Carter, P. Fong*, The Sylow 2-subgroups of the finite classical groups, J. Algebra, **1**, N 2 (1964), 139–151.
4. *A. J. Weir*, Sylow p-subgroups of the classical groups over finite fields with characteristic prime to p, Proc. Am. Math. Soc., **6**, N 4 (1955), 529–533.

5. *W. J. Wong*, Twisted wreath product and Sylow 2-subgroups of classical simple groups, Math. Z., **97**, N 5 (1967), 406–424.

6. *В. В. Кабанов, А. С. Кондратьев*, Силовские 2-подгруппы конечных групп (обзор), Свердловск, Ин-т мат. и мех. УНЦ АН СССР, 1979.

7. *В. И. Зенков, В. Д. Мазуров*, О пересечении силовских подгрупп в конечных группах, Алгебра и логика, **35**, N 4 (1996), 424–432.

8. *A. Mann*, Soluble subgroups of symmetric and linear groups, Isr. J. Math., **55**, N 2 (1986), 162–172.

9. *Y. Segev*, Ph. D. thesis, The Hebrew Univ., Jerusalem, 1985.

10. *D. J. S. Robinson*, A course in the theory of groups, Springer-Verlag, New York, 1996.

11. *R. W. Carter*, Simple groups of Lie type, London, Wiley, 1972.

12. *Дж. Хамфри*, Линейные алгебраические группы, М., Наука, 1980.

13. *J. E. Humphreys*, Conjugacy classes in semisimple algebraic groups (Math. Surv. Monogr., **43**), Providence, RI, Am. Math. Soc., 1995.

14. *D. Gorenstein, R. Lyons*, The local structure of finite groups of characteristic 2 type (Mem. Am. Math. Soc., **276**), 1983.

15. *Р. Ф. Апатенок, Д. А. Супруненко*, О нильпотентных неприводимых линейных группах над конечным полем, ДАН БССР, **3**, N 12 (1959), 475–478.

16. *D. Deriziotis*, The Brauer complex and its application to the Chevalley groups, Ph. D. thesis, University of Warwick, 1977.

17. *J. H. Conway*, Atlas of finite groups, Oxford, Clarendon Press, 1985.

18. *A. Chermak, A. Delgado*, A measuring argument for finite groups, Proc. Am. Math. Soc., **107**, N 4 (1989), 907–914.

Адрес автора:

Поступило 16 марта 1999 г.
Окончательный вариант 9 декабря 1999 г.

ВДОВИН Евгений Петрович,
РОССИЯ,
630090, г. Новосибирск,
пр. Ак. Коптюга, 4,
Институт математики СО РАН.
e-mail: vdovin@math.nsc.ru