МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 38, № 1 (1985)

СИММЕТРИЧЕСКИ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ ФУНКЦИИ С СОВЕРШЕННЫМ МНОЖЕСТВОМ ТОЧЕК НЕДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ

С. П. Пономарев

Функция $f\colon]a, b[\to \mathbf{R}$ называется симметрически дифференцируемой в точке $x \in]a, b[$, если существует конечный предел

$$\lim_{h\to 0} (f(x+h) - f(x-h))/2h = f_s'(x).$$

В 1935 г. Хаусдорф [1] поставил задачу: является ли множество точек разрыва всюду симметрически непрерывной функции (это означает, что $f(x+h) - f(x-h) \to 0$ при $h \to 0$ для всех $x \in]a, b[$) не более чем счетным?

В 1971 г. Прайс [2] дал отрицательный ответ на этот вопрос. В этой связи возникает аналогичная задача: какова мощность множества точек недифференцируемости непрерывной и всюду симметрически дифференцируемой функции? Известно, что это множество имеет меру нуль [3] и первую категорию [4]. Целью данной заметки является доказательство следующего утверждения.

ТЕОРЕМА. *Существует непрерывная, всюду симметрически дифференцируемая функция* $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, *обладающая свойствами*:

1) f *не дифференцируема в точках некоторого совершенного множества* P;

2) f *непрерывно дифференцируема в* $\mathbf{R} \setminus P$;

3) f *не является функцией класса* ACG_* *на* P.

Для сравнения отметим, что не существует всюду симметрически непрерывной функции с совершенным множеством точек разрыва [5].

© Издательство «Наука».
Главная редакция
физико-математической литературы.
«Математические заметки», 1985

Доказательство теоремы состоит в построении примера. Предварительно рассмотрим несколько вспомогательных утверждений.

ЛЕММА 1. *Пусть* φ: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ — *непрерывная периодическая функция (с периодом* T*), удовлетворяющая условиям:*

а) $\exists x_0\ \forall h > 0 : \varphi(x_0 + h) = \varphi(x_0 - h)$;

б) $\exists \eta > 0\ \forall x \in [x_0 - \eta, x_0 + \eta]$: $\varphi(x) = 0$. *Тогда существует* $\delta > 0$ *такое, что для всех целых* k, *всех* $h > 0$ *и всех* $x \in \Delta_k = [x_0 + kT - \delta, x_0 + kT + \delta]$ *выполняется неравенство*

$$|\varphi(x + h) - \varphi(x - h)| \leqslant 2h.$$

Доказательство. Учитывая периодичность φ и замену переменной $x' = x - x_0$, заключаем, что утверждение достаточно доказать для $x_0 = 0$, $k = 0$. Допустим, что в этом случае утверждение леммы неверно. Тогда существуют две последовательности: $\{x_n\}$, $x_n \to 0$, и $\{h_n\}$, $h_n > 0$, такие, что

$$\forall n: |\varphi(x_n + h_n) - \varphi(x_n - h_n)| > 2h_n. \qquad (1)$$

Из (1) и ограниченности φ вытекает ограниченность $\{h_n\}$ сверху, а так как $x_n \to 0$, то из (1) и условия б) следует, что $\{h_n\}$ ограничена снизу некоторым положительным числом. Не уменьшая общности, можно считать (выбирая, если нужно, подпоследовательность), что $\{h_n\}$ сходится: $h_n \to h_0 > 0$. Тогда, переходя к пределу в (1) и учитывая условие а), получаем противоречие:

$$0 = |\varphi(h_0) - \varphi(-h_0)| \geqslant 2h_0 > 0,$$

что и завершает доказательство леммы. В дальнейшем мы всегда считаем, что $\delta \leqslant \eta$.

Пусть g: $\mathbf{R} \to [0, 1]$ — какая-нибудь фиксированная функция класса C^1, удовлетворяющая условиям:

1) $g(x) = 0$, если $x \notin]0, 1[$,

2) $g(x) = 1$, если $x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$.

Существование таких функций хорошо известно.

Рассмотрим периодическую функцию класса C^1

$$\varphi(x) = \max(\sin^3 2\pi x, 0),$$

и для всякого отрезка $\Delta = [a, b]$ и $x \in \mathbf{R}$ положим

$$\varphi_\Delta(x) = |\Delta|^2 \varphi\left(\frac{(2n+3)(x - a')}{2|\Delta'|}\right) g\left(\frac{x - a}{|\Delta|}\right),$$

где $|\cdot|$ — мера Лебега,

$$\Delta' = [a', b'], \quad a' = a + \frac{|\Delta|}{3}, \quad b' = b - \frac{|\Delta|}{3},$$

$$n = [9\,|\Delta|^{-2}] + 1, \ [\cdot] \text{ — целая часть.}$$

Замечание 1. Очевидно, φ_Δ на Δ' совпадает с периодической функцией

$$|\Delta|^2 \varphi\left(\frac{(2n+3)(x-a')}{2|\Delta'|}\right).$$

При этом отрезок Δ' разбивается на $2n+3$ отрезка I_i равной длины (мы их нумеруем в естественном порядке), так что φ_Δ тождественно обращается в нуль на I_{2i}, $i = 1, \ldots, n+1$, положительна внутри I_{2i-1}, $i = 1, \ldots, n+2$, и в центре I_{2i-1} имеет максимум, равный $|\Delta|^2$.

ЛЕММА 2. *Свойства* φ_Δ:

Л2.1. *В отрезке* Δ' *расположено* $n+1$ *отрезков* $\Delta_i \subset I_{2i}$ *равной длины, таких, что для всякого* $i = 1, \ldots, n+1$:

$$\forall x \in \Delta_i \forall h > 0 : |\varphi_\Delta(x+h) - \varphi_\Delta(x-h)| \leqslant 2\,|\Delta|\,(|\Delta| + M)\,h,$$

где $M = \sup|g'|$, $n = [9\,|\Delta|^{-2}] + 1$.

Л2.2. *Расстояние между любыми отрезками* Δ_i, Δ_j *не меньше*

$$\lambda = |\Delta_1| = \ldots = |\Delta_{n+1}|.$$

Л2.3. $\forall x \in \Delta_i \exists x' \in I_{2i+1} : \varphi_\Delta(x') - \varphi_\Delta(x) \geqslant 36 \cdot |\Delta|^{-1}(x' - x)$.

Л2.4. $\lambda \leqslant |\Delta|^3/54$.

Доказательство. Легко проверить, что функция

$$\tilde{\varphi}(x) = \varphi\left(\frac{(2n+3)(x-a')}{2|\Delta'|}\right)$$

удовлетворяет условиям леммы 1. Поэтому существует $n+1$ отрезков $\Delta_i \subset I_{2i} \subset \Delta'$, $n = [9\,|\Delta|^{-2}] + 1$, для каждого из которых справедливо утверждение

$$\forall x \in \Delta_i \forall h > 0 : |\tilde{\varphi}(x+h) - \tilde{\varphi}(x-h)| \leqslant 2h.$$

Отсюда следует, если положить $\tilde{g}(x) = g((x-a)/|\Delta|)$, что для всякого $x \in \Delta_i$ и всякого $h > 0$

$$
\begin{aligned}
&|\varphi_\Delta(x+h) - \varphi_\Delta(x-h)| \leqslant \\
&\quad \leqslant |\Delta|^2 (|\tilde{\varphi}(x+h) - \tilde{\varphi}(x-h)|\, \tilde{g}(x+h) + \\
&\qquad |\tilde{g}(x+h) - \tilde{g}(x-h)|\, \tilde{\varphi}(x-h)) \leqslant \\
&\quad \leqslant |\Delta|^2 (2h + 2M|\Delta|^{-1}h) = 2|\Delta|(|\Delta| + M)h.
\end{aligned}
$$

Таким образом, свойство Л 2.1 доказано.

Свойство Л2.2 очевидно, так как Δ_i расположены только в отрезках I_{2i}, а все отрезки I_i имеют одинаковую длину.

Свойство Л2.3: пусть $x \in \Delta_i \subset I_{2i}$, а x' — центр отрезка I_{2i+1}; тогда $\varphi_\Delta(x') = |\Delta|^2$, и так как

$$0 < x' - x \leqslant \frac{3|I_i|}{2}, \quad \varphi_\Delta(x) = 0,$$

$$n = [9|\Delta|^{-2}] + 1 > 9|\Delta|^{-2},$$

то

$$
\begin{aligned}
\frac{\varphi_\Delta(x') - \varphi_\Delta(x)}{x' - x} = \frac{|\Delta|^2}{x' - x} \geqslant \frac{2}{3}\frac{|\Delta|^2}{|I_i|} = \\
= 2|\Delta|(2n+3) \geqslant 36|\Delta|^{-1}.
\end{aligned}
$$

Свойство Л2.4: $\lambda \leqslant |I_i| = |\Delta|/(6n+9) \leqslant |\Delta|^3/54$.

Лемма 2 доказана. Будем называть отрезки Δ_i, фигурирующие в лемме 2, s-отрезками функции φ_Δ. В этих отрезках φ_Δ тождественно равна нулю.

Рассмотрим теперь две последовательности: последовательность $\{D_k\}$ конечных семейств попарно не пересекающихся отрезков и последовательность $\{\Phi_k\}$ конечных семейств функций типа φ_Δ, удовлетворяющие условиям:

(A) Семейство D_1 по определению состоит из всех s-отрезков Δ_{i_1}, $i_1 = 1, \ldots, n_1$, функции φ_{Δ_0}, $\Delta_0 = [0, 1]$, а семейство Φ_1 состоит из функций $\varphi_{\Delta_{i_1}}$, $i_1 = 1, \ldots, n_1$.

(B) Для каждого $k > 1$ семейство

$$D_k = \{\Delta_{i_1 \ldots i_k} : 1 \leqslant i_1 \leqslant n_1, \ldots, 1 \leqslant i_k \leqslant n_k\}$$

состоит из всех s-отрезков равной длины функций семейства

$$\Phi_{k-1} = \{\varphi_{\Delta_{i_1 \ldots i_{k-1}}} : 1 \leqslant i_1 \leqslant n_1, \ldots, 1 \leqslant i_{k-1} \leqslant n_{k-1}\},$$

так что при этом $\Delta_{i_1 \ldots i_k}$ — s-отрезок функции $\varphi_{\Delta_{i_1 \ldots i_{k-1}}}$, а семейство Φ_k состоит из всех функций $\varphi_{\Delta_{i_1 \ldots i_k}}$. Отметим,

что из условий (A), (B) вытекает очевидное построение последовательностей $\{D_k\}$, $\{\Phi_k\}$ по индукции.

Поскольку все отрезки семейства D_k имеют одинаковую длину, то обозначим ее через λ_k. В дальнейшем для краткости положим

$$\varphi_{i_1\ldots i_k} = \varphi_{\Delta_{i_1\ldots i_k}}.$$

ЛЕММА 3. *Свойства D_k и Φ_k:*

Л3.1. $\Delta_{i_1\ldots i_k} \subset \Delta_{i_1\ldots i_{k-1}}$.

Л3.2. $\lambda_k \leqslant \lambda_{k-1}^3/54$.

Л3.3. *Для расстояния между любыми двумя отрезками семейства D_k выполняется неравенство*

$$\operatorname{dist}(\Delta_{i_1\ldots i_k}, \Delta_{j_1\ldots j_k}) \geqslant \lambda_k.$$

Л3.4. $\sup \varphi_{i_1\ldots i_k} = \lambda_k^2$.

Л3.5. $\operatorname{supp} \varphi_{i_1\ldots i_k} \subset \Delta_{i_1\ldots i_k}$, *причем носители любых двух функций из одного или из различных семейств Φ_k не пересекаются.*

Доказательство является очевидным следствием утверждений леммы 2, свойств (A), (B) и замечания к определению φ_Δ.

Замечание 2. Из Л3.2 легко следует, что $\lambda_k \leqslant 54^{-k}$. Поэтому $n_k = [9\lambda_{k-1}^{-2}] + 2 \to \infty$ при $k \to \infty$. Из свойств $\{D_k\}$ вытекает, что множество

$$P = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{\substack{1 \leqslant i_1 \leqslant n_1 \\ \cdots \\ 1 \leqslant i_k \leqslant n_k}} \Delta_{i_1\ldots i_k}$$

не пусто и совершенно. Для всякой точки $x \in P$ существует (единственная) последовательность $\{i_k'\}$ такая, что

$$\{x\} = !\bigcap_{k=1}^{\infty} \Delta_{i_1'\ldots i_k'}. \qquad (*)$$

В дальнейшем $(*)$ будет неоднократно использоваться.

ЛЕММА 4. *Для всех функций $\varphi_{i_1\ldots i_m}$, всех $x \in P$ и всех $h > 0$ справедливо неравенство*

$$|\varphi_{i_1\ldots i_m}(x+h) - \varphi_{i_1\ldots i_m}(x-h)| \leqslant 4M\lambda_m h. \qquad (2)$$

Доказательство. Пусть $x \in P$ и выполнено $(*)$. Возможны два случая.

1) Пусть $(i_1', \ldots, i_m') \neq (i_1, \ldots, i_m)$. Тогда для любого $h > 0$ выполняются неравенства

$$\varphi_{i_1 \ldots i_m}(x + h) \leqslant \lambda_m h, \tag{3}$$

$$\varphi_{i_1 \ldots i_m}(x - h) \leqslant \lambda_m h. \tag{4}$$

Докажем, например, (3). Фиксируем $h > 0$ и предположим, что $\varphi_{i_1 \ldots i_m}(x + h) > 0$. Тогда $x + h \in \Delta_{i_1 \ldots i_m}$ по свойству Л3.5, а так как $x \in \Delta_{i_1' \ldots i_m'}$, то в силу Л3.4 имеем

$$\varphi_{i_1 \ldots i_m}(x + h) \leqslant \lambda_m^2 \leqslant \lambda_m h,$$

поскольку (см. Л3.3)

$$\lambda_m \leqslant \operatorname{dist}(\Delta_{i_1' \ldots i_m'}, \Delta_{i_1 \ldots i_m}) \leqslant h.$$

Аналогично доказывается (4). Из (3) и (4) следует (2), если заметить, что $M = \sup |g'| \geqslant 1$.

2) Пусть $(i_1', \ldots, i_m') = (i_1, \ldots, i_m)$, т. е. $i_k' = i_k$, $k = 1, \ldots, m$. Тогда $x \in \Delta_{i_1' \ldots i_{m+1}'} \subset \Delta_{i_1' \ldots i_m'} = \Delta_{i_1 \ldots i_m}$, т. е. x содержится в s-отрезке функции $\varphi_{i_1 \ldots i_m}$. Поэтому в силу Л2.1 для любого $h > 0$

$$|\varphi_{i_1 \ldots i_m}(x + h) - \varphi_{i_1 \ldots i_m}(x - h)| \leqslant$$
$$\leqslant 2\,|\Delta_{i_1 \ldots i_m}|\,(|\Delta_{i_1 \ldots i_m}| + M)\,h \leqslant 4M\lambda_m h.$$

Лемма 4 доказана.

Доказательство теоремы. Покажем, что для функции

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\substack{1 \leqslant i_1 \leqslant n_1 \\ \cdots\cdots \\ 1 \leqslant i_k \leqslant n_k}} \varphi_{i_1 \ldots i_k}$$

выполняются все утверждения теоремы. Прежде всего заметим, что f непрерывна на $\mathbf{R}$, так как указанный выше ряд сходится равномерно на $\mathbf{R}$ ввиду оценки $\lambda_k \leqslant 54^{-k}$, вытекающей из Л3.2, и свойств Л3.4, Л3.5.

I. Пусть $x \notin P$. Тогда x не содержится ни в одном отрезке некоторого семейства D_m. Поэтому, в силу Л3.1, Л3.5, существует окрестность точки x, не пересекающаяся с носителями всех функций семейств Φ_k, $k \geqslant m$. Следова-

тельно, в этой окрестности f совпадает с функцией класса C^1

$$\sum_{k=1}^{m-1} \sum_{\substack{1 \leqslant i_1 \leqslant n_1 \\ \cdots \\ i \leqslant i_k \leqslant n_k}} \varphi_{i_1 \ldots i_k},$$

откуда вытекает утверждение 2) теоремы.

II. Покажем, что симметрическая производная f_s' равна нулю в каждой точке $x \in P$. Пусть $x \in P$ и выполняется (*). Фиксируем $\varepsilon > 0$. Так как $\lambda_k \to 0$, то существует m такое, что

$$4M\lambda_m < \varepsilon. \tag{5}$$

Из (*) следует, что

$$x \in \Delta_{i_1' \ldots i_{m+1}'} \subset \Delta_{i_1' \ldots i_m'},$$

т. е. x находится в средней трети отрезка $\Delta_{i_1' \ldots i_m'}$. Поэтому положим $\delta = \lambda_m/3$, и пусть $0 < h < \delta$. Поскольку все функции семейств Φ_k, $k = 1, \ldots, m-1$, обращаются в нуль в $\Delta_{i_1' \ldots i_m'}$, а $x \pm h \in \Delta_{i_1' \ldots i_m'}$, то, учитывая Л3.5, заключаем, что существуют функции

$$\varphi_{i_1 \ldots i_p}, \quad \varphi_{j_1 \ldots j_q}$$

такие, что $p, q \geqslant m$ и

$$f(x+h) - f(x-h) = \varphi_{i_1 \ldots i_p}(x+h) - \varphi_{j_1 \ldots j_q}(x-h). \tag{6}$$

Рассмотрим сперва случай $f(x+h) > 0$, $f(x-h) > 0$. Если $(i_1, \ldots, i_p) = (j_1, \ldots, j_q)$, т. е. $p = q$ и $i_k = j_k$, $k = 1, \ldots, p$, то (6) имеет вид

$$f(x+h) - f(x-h) = \varphi_{i_1 \ldots i_p}(x+h) - \varphi_{i_1 \ldots i_p}(x-h). \tag{7}$$

Если же $(i_1, \ldots, i_p) \neq (j_1, \ldots, j_q)$, то (6) можно записать так:

$$f(x+h) - f(x-h) = \varphi_{i_1 \ldots i_p}(x+h) - \varphi_{i_1 \ldots i_p}(x-h) + \\ + \varphi_{j_1 \ldots j_q}(x+h) - \varphi_{j_1 \ldots j_q}(x-h), \tag{8}$$

так как при этом очевидно, что

$$\varphi_{i_1 \ldots i_p}(x-h) = \varphi_{j_1 \ldots j_q}(x+h) = 0.$$

Наконец, если $f(x+h) > 0$, $f(x-h) = 0$ или если $f(x+h) = 0$, $f(x-h) > 0$, то разность (6) представима в виде

$$f(x+h) - f(x-h) = \varphi_{i_1 \ldots i_p}(x+h) - \varphi_{i_1 \ldots i_p}(x-h) \tag{9}$$

или, соответственно,

$$f(x+h) - f(x-h) = \varphi_{j_1 \ldots j_q}(x+h) - \varphi_{j_1 \ldots j_q}(x-h). \tag{10}$$

Теперь, учитывая (6) — (10), мы заключаем на основании леммы 4 и неравенства (5), что при $0 < h < \delta$ выполняется неравенство

$$|f(x+h) - f(x-h)| \leqslant 8M\lambda_m h \leqslant 2\varepsilon h.$$

Следовательно, $f_s'(x) = 0$.

Из п. I, II доказательства вытекает, что f всюду на $\mathbf{R}$ симметрически дифференцируема.

III. Покажем, что f не дифференцируема в точках P. Пусть $x \in P$ и выполняется (*). Полагая в лемме 2

$$\Delta = \Delta_{i_1' \ldots i_k'}, \qquad \Delta_i = \Delta_{i_1' \ldots i_{k+1}'},$$

заключаем на основании Л2.3, что для всякого k в отрезке $\Delta_{i_1' \ldots i_k'}$ найдется точка x_k такая, что

$$f(x_k) - f(x) = \varphi_{i_1' \ldots i_k'}(x_k) - \varphi_{i_1' \ldots i_k'}(x) \geqslant 36\lambda_k^{-1}(x_k - x),$$

откуда и следует утверждение 1) теоремы.

IV. Остается проверить, что f не является функцией класса ACG_* [6] на P. Пусть $x \in P$ и выполняется (*). Из замечания к определению φ_Δ сразу следует, если положить $\Delta = \Delta_{i_1' \ldots i_k'}$, что сумма колебаний функции $\varphi_{i_1' \ldots i_k'}$ на открытых интервалах $\operatorname{Int} I_{2i+1}$, $i = 1, \ldots, n$, $n = [9\lambda_k^{-2}] + 1$, равная $n\lambda_k^2$, больше 9. Но на этих интервалах $\varphi_{i_1' \ldots i_k'}$ совпадает с f, а кроме того,

$$\operatorname{Int} I_{2i+1} \subset \Delta_{i_1' \ldots i_k'} \cap (\mathbf{R} \setminus P).$$

Так как $\lambda_k \to 0$, то отсюда вытекает, что в любой окрестности любой точки $x \in P$ сумма колебаний функции f

на составляющих интервалах дополнения $\mathbf{R} \setminus P$, попадающих в эту окрестность, больше одного и того же положительного числа (в данном случае равного 9).

Таким образом, последнее утверждение теоремы доказано.

Замечание 3. Построенная функция является также примером всюду симметрически дифференцируемой функции, симметрическая производная которой не интегрируема в смысле Данжуа — Перрона.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило 26.06.84

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Hausdorff F. Problème № 62.— Fund. Math., 1935, v. 25, p. 578.
[2] Preiss D. A note on symmetrically continuous functions.— Časopis. Pěst. Mat., 1971, v. 96, № 3, p. 262—264.
[3] Хинчин А. Я. Recherches sur la structure des fonctions mesurables.— Fund. Math., 1927, v. 9, p. 212—279.
[4] Mukhopadhyay S. N. On Schwarz differentiability 2.— Rev. Roumaine Math. Pures Appl., 1964, v. 9, p. 859—862.
[5] Пономарев С. П. К проблеме Хаусдорфа. — Математические заметки, 1973, т. 14, вып. 2, с. 197—200.
[6] Сакс С. Теория интеграла. — М.: ИЛ, 1949.