распределениям процесса q^k. Скорость сходимости, например, одномерных распределений может быть оценена с помощью неравенства

$$P(q^{0(M)}\neq q^0)\leqslant 1-P(\bigcup_{i=-(c+M)}^{0} A_i).$$

Доказательство этих теорем основано на том, что число требований как в исходной, так и в усеченной системе мажорируется числом требований в системе $G/G/\infty$, управляемой последовательностью $(\tau_n^e, T_n)_{n\in Z}$, и использует метод обновлений А. А. Боровкова [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фалин Г. И. Расчет вероятностных характеристик многолинейной системы с повторными вызовами//Вестн. Моск. ун-та. Вычисл. матем. и киберн. 1983. № 1. 35—41.
2. Kelly F. Reversibility and stochastic networks. N. Y., 1979.
3. Штойян Д. Качественные свойства и оценки стохастических моделей. М., 1979.
4. Фалин Г. И. Повторные вызовы в структурно-сложных системах//Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1980. № 6. 55—61.
5. Боровков А. А. Асимптотические методы в теории массового обслуживания. М., 1980.

Поступила в редакцию 20.02.85

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1987, № 2

УДК 519.21

Ю. К. Беляев, А. А. Замятин

МНОЖИТЕЛЬНАЯ ОЦЕНКА ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛИТЕЛЬНОСТИ ЖИЗНИ ЧАСТИЦЫ В ПРОЦЕССЕ БЕЛЛМАНА—ХАРРИСА

Ветвящийся процесс Беллмана—Харриса [1, 2] определяется функцией распределения $F(x)$, $F(0)=0$, длительности жизни частицы и распределением вероятностей $\{p_n, n\geqslant 0\}$ числа потомков одной частицы. Длительности жизни и численность потомства различных частиц независимы. Цель настоящей работы — непараметрическая оценка неизвестной функции распределения $F(x)$ по m независимым наблюдениям ветвящегося процесса. При этом j-е наблюдение проводится до момента времени T_j, $T_j\leqslant T_0<\infty$, $j\geqslant 1$. Распределение вероятностей $\{p_n, n\geqslant 0\}$ считается мешающим параметром.

Ниже используются следующие обозначения: $\mathcal{E}$ — знак математического ожидания, $a\wedge b=\min(a, b)$, $1(A)$ — индикатор события A, $D[0, v]$ — пространство Скорохода [3], $\xrightarrow{p}$ — сходимость по вероятности, $\xrightarrow{\mathcal{D}}$ — слабая сходимость в пространстве $D[0,v]$, $b_m(u)=\sum_{j=1}^{m} 1(T_j\geqslant u)$, $g(x-)=\lim_{h\downarrow 0} g(x-h)$, $g(x+)=\lim_{h\downarrow 0} g(x+h)$, $\Delta g(x)=g(x+)-g(x-)$, $\bar F(x)=1-F(x)$, $u_F=\sup\{x:\bar F(x)>0\}$. В дальнейшем приняты также следующие соглашения: $0/0=0$, $-\ln 0=\infty$, $a+\infty=\infty$.

Наблюдаемые реализации ветвящегося процесса можно описать с помощью независимых маркированных точечных процессов [4]. Занумеруем частицы ветвящегося процесса в порядке их рождения (частицы, родившиеся одновременно, нумеруются в произвольном порядке). Пусть t_{ij}, $i \geqslant 0$, $j \geqslant 1$, — момент рождения i-й частицы в j-м наблюдении. Начальный момент времени считается моментом рождения частицы: $t_{0j}=0$. Каждому моменту t_{ij} сопоставим метку ξ_{ij} — длительность жизни i-й частицы. Обозначим через $\Phi_j(t)$ число частиц в j-м наблюдении, родившихся за время t. Если ветвящийся процесс вырождается, т. е. если $\lim\limits_{t\to\infty} \Phi_j(t) = \Phi_j(\infty) < \infty$ с положительной вероятностью, то полагаем $t_{ij}=\infty$ при $i \geqslant \Phi_j(\infty)$.

В дальнейшем мы будем использовать следующее утверждение: если $a_r = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^r p_n < \infty$, то $H_r(t) = \mathscr{E}\Phi_j^r(t) < \infty$ при всех $t \geqslant 0$ [1].

Допустим, что наблюдаются реализации независимых случайных элементов $X_j = (\eta_{ij}, \varkappa_{ij}, i=0, \ldots, \Phi_j(T_j)-1)$, $j=1, \ldots, m$, где $\eta_{ij} = \xi_{ij} \wedge (T_j - t_{ij})$, $\varkappa_{ij} = 1(\xi_{ij} \leqslant T_j - t_{ij})$. Если $\varkappa_{ij}=0$ ($\varkappa_{ij}=1$), то будем говорить, что реализация случайной величины ξ_{ij} цензурирована (нецензурирована).

Отметим, что эмпирическая функция распределения, построенная по нецензурированным реализациям случайных величин ξ_{ij}, не будет состоятельной оценкой при $m \to \infty$. Поэтому возникает вопрос об использовании других оценок.

Введем случайные процессы

$$N_j(u) = \sum_{i=0}^{\infty} 1(t_{ij} \leqslant T_j - u)\, 1(\xi_{ij} \geqslant u), \tag{1}$$

$$D_j(u) = \sum_{i=0}^{\infty} 1(t_{ij} \leqslant T_j)\, 1(\xi_{ij} \leqslant u \wedge (T_j - t_{ij})). \tag{2}$$

Число частиц (в j-м наблюдении), возраст которых не менее u, равно $N_j(u)$; число частиц (в j-м наблюдении), длительность жизни которых наблюдается полностью и не превосходит u, равно $D_j(u)$. Траектории случайных процессов $N_j(u)$, $D_j(u)$ являются ступенчатыми функциями. При этом траектории $N_j(u)$ не возрастают и непрерывны слева, а траектории $D_j(u)$ не убывают и непрерывны справа. Обозначим $K_j(u) = \mathscr{E} N_j(u)$, $A_j(u) = \mathscr{E} D_j(u)$. Положим

$$N_{m\cdot}(u) = \sum_{j=1}^{m} N_j(u), \quad D_{m\cdot}(u) = \sum_{j=1}^{m} D_j(u).$$

В качестве оценки для $\bar{F}(u)$ рассмотрим

$$\hat{\bar{F}}_m(u) = \prod_{x \leqslant u} \left(1 - \frac{J_m(x)\Delta D_{m\cdot}(x)}{N_{m\cdot}(x)}\right), \tag{3}$$

где $J_m(u) = 1(N_{m\cdot}(u) > 0)$. Оценка (3) называется множительной [5]. Отметим, что множительная оценка как функция аргумента u определяет ступенчатую функцию распределения, возможно несобственную. Можно показать, что (3) является обобщенной оценкой максимального правдоподобия [5].

В дальнейшем функция распределения $F(x)$ предполагается непрерывной.

Л е м м а 1. *Если* $a_1<\infty$, *то*

$$K_j(u)=1(T_j\geqslant u)\overline{F}(u)H_1(T_j-u),\quad A_j(u)=\int_0^u K_j(x)\frac{dF(x)}{\overline{F}(x)}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $T_j\geqslant u$. Используя выражения (1), (2), получаем

$$K_j(u)=\sum_{i=0}^{\infty}\mathscr{E}(1(t_{ij}\leqslant T_j-u)1(\xi_{ij}\geqslant u))=\overline{F}(u)\mathscr{E}\sum_{i=0}^{\infty}1(t_{ij}\leqslant T_j-u)=$$

$$=\overline{F}(u)H_1(T_j-u),$$

$$A_j(u)=\sum_{i=0}^{\infty}\mathscr{E}(1(t_{ij}\leqslant T_j)1(\xi_{ij}\leqslant u\wedge(T_j-t_{ij})))=$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}\mathscr{E}(1(t_{ij}\leqslant T_j)P(\xi_{ij}\leqslant u\wedge(T_j-t_{ij}))|t_{ij}),$$

таким образом

$$A_j(u)=\mathscr{E}\sum_{i=0}^{\infty}1(t_{ij}\leqslant T_j)F(u\wedge(T_j-t_{ij})).\tag{4}$$

Применяя теорему Кэмпбелла [4] и интегрируя по частям, находим

$$A_j(u)=\int_0^{T_j}dH_1(x)F(u\wedge(T_j-x))=\int_0^u H_1(T_j-x)dF(x)=\int_0^u K_j(x)\frac{dF(x)}{\overline{F}(x)}.$$

При $T_j<u$ $N_j(u)\equiv 0$ и, следовательно, $K_j(u)\equiv 0$. □

Зададим случайные процессы

$$M_j(u)=D_j(u)-\int_0^u N_j(x)\frac{dF(x)}{\overline{F}(x)}\tag{5}$$

при всех $u\geqslant 0$, таких, что $\overline{F}(u)>0$. Отметим, что случайный процесс $M_j(u)$ не является мартингалом [6].

В силу леммы 1 $\mathscr{E}M_j(u)=0$ при всех рассматриваемых значениях u. Покажем, что $M_j(u)$ — процесс с некоррелированными приращениями.

Л е м м а 2. *Если* $a_2<\infty$, *то*

$$\mathscr{E}M_j(u_1)M_j(u_2)=A_j(u_1)\wedge A_j(u_2).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем случайные процессы

$$\Psi_{ij}(u)=1(\xi_{ij}\leqslant u)-\int_0^u 1(\xi_{ij}\geqslant x)\frac{dF(x)}{\overline{F}(x)}.\tag{6}$$

В соответствии с выражениями (1), (2), (6) имеем

$$M_j(u)=\sum_{i=0}^{\infty}1(t_{ij}\leqslant T_j)\Psi_{ij}(u\wedge(T_j-t_{ij})).$$

Следовательно, $M_j(u_1)M_j(u_2)=J_1+J_2$, где

$$J_1=\sum_{i=0}^{\infty} 1(t_{ij}\leqslant T_j)\,\Psi_{ij}(u_1\wedge(T_j-t_{ij}))\,\Psi_{ij}(u_2\wedge(T_j-t_{ij})),$$

$$J_2=\sum_{i_1\neq i_2}^{\infty} 1(t_{i_1j}\leqslant T_j)\,1(t_{i_2j}\leqslant T_j)\,\Psi_{i_1j}(u_1\wedge(T_j-t_{i_1j}))\,\Psi_{i_2j}(u_2\wedge(T_j-t_{i_2j})).$$

Непосредственные вычисления показывают, что

$$\mathscr{E}\Psi_{ij}(u)=0,\ \mathscr{E}\Psi_{ij}(u_1)\Psi_{ij}(u_2)=F(u_1)\wedge F(u_2).$$

Предположим для определенности, что $u_1\leqslant u_2$. Так как случайная величина ξ_{ij} не зависит от случайных величин t_{nj}, $n\leqslant i$, то

$$\mathscr{E}(\Psi_{ij}(u_1\wedge(T_j-t_{ij}))\,\Psi_{ij}(u_2\wedge(T_j-t_{ij}))\,|\,t_{ij})=F(u_1\wedge(T_j-t_{ij})),$$

$$\mathscr{E}(\Psi_{i_1j}(u_1\wedge(T_j-t_{i_1j}))\,\Psi_{i_2j}(u_2\wedge(T_j-t_{i_2j}))\,|\,t_{i_1j},t_{i_2j})=$$
$$=\mathscr{E}(\Psi_{i_1j}(u_1\wedge(T_j-t_{i_1j}))\,|\,t_{i_1j},t_{i_2j})\,\mathscr{E}(\Psi_{i_2j}(u_2\wedge(T_j-t_{i_2j}))\,|\,t_{i_1j},t_{i_2j})=0.$$

Используя эти соотношения, находим

$$\mathscr{E}J_2=\sum_{i_1\neq i_2}^{\infty}\mathscr{E}(1(t_{i_1j}\leqslant T_j)\,1(t_{i_2j}\leqslant T_j))\,\Psi_{i_1j}(u_1\wedge(T_j-t_{i_1j}))\,\Psi_{i_2j}(u_2\wedge(T_j-t_{i_2j}))=$$
$$=\sum_{i_1\neq i_2}^{\infty}\mathscr{E}(1(t_{i_1j}\leqslant T_j)\,1(t_{i_2j}\leqslant T_j))\,\mathscr{E}(\Psi_{i_1j}(u_1\wedge(T_j-t_{i_1j}))\times$$
$$\times\,\Psi_{i_2j}(u_2\wedge(T_j-t_{i_2j}))\,|\,t_{i_1j},t_{i_2j})=0,$$

$$\mathscr{E}J_1=\sum_{i=0}^{\infty}\mathscr{E}(1(t_{ij}\leqslant T_j)\,\Psi_{ij}(u_1\wedge(T_j-t_{ij}))\,\Psi_{ij}(u_2\wedge(T_j-t_{ij})))=$$
$$=\sum_{i=0}^{\infty}\mathscr{E}(1(t_{ij}\leqslant T_j))\,\mathscr{E}(\Psi_{ij}(u_1\wedge(T_j-t_{ij}))\,\Psi_{ij}(u_2\wedge(T_j-t_{ij}))\,|\,t_{ij})=$$
$$=\mathscr{E}\sum_{i=0}^{\infty}1(t_{ij}\leqslant T_j)\,F(u_1\wedge(T_j-t_{ij})).$$

По формуле (4) получаем, что $\mathscr{E}J_1=A_j(u_1)$. Поэтому

$$\mathscr{E}M_j(u_1)M_j(u_2)=\mathscr{E}J_1+\mathscr{E}J_2=A_j(u_1)=A_j(u_1)\wedge A_j(u_2).\ \square$$

Положим

$$M_{m\cdot}(u)=\sum_{j=1}^{m}M_j(u),\ K_{m\cdot}(u)=\sum_{j=1}^{m}K_j(u).$$

Непосредственно из выражения (5) вытекает, что траектории процесса $M_j(u)$ имеют ограниченную вариацию. Зададим случайный процесс

$$S_m(u)=\int_0^u\frac{dM_{m\cdot}(x)}{K_{m\cdot}(x)}\tag{7}$$

при всех $u\geqslant 0$, таких, что $K_{m\cdot}(u)>0$. Здесь и ниже стохастический интеграл понимается как интеграл Лебега—Стилтьеса вдоль каждой траектории.

Из леммы 2 следует, что $S_m(u)$ — процесс с некоррелированными приращениями. При этом

$$\mathscr{E} S_m^2(u) = \int_0^u \frac{dF(x)}{K_{m\cdot}(x)\overline{F}(x)}. \tag{8}$$

Установим состоятельность ($m \to \infty$) множительной оценки. Для этого нам понадобится следующий вспомогательный результат, приводимый без доказательства.

Л е м м а 3. *Если* $a_1 < \infty$, *то при* $m \to \infty$

$$\sup_{[0,u]} \left| \frac{N_{m\cdot}(x) - K_{m\cdot}(x)}{K_{m\cdot}(x)} \right| \xrightarrow{p} 0$$

для всех $u \geqslant 0$, *удовлетворяющих условию* $b_m(u) \geqslant cm$ *при достаточно больших* m.

Т е о р е м а 1. *Если* $a_2 < \infty$, *то при* $m \to \infty$

$$\sup_{[0,v]} |\hat{\overline{F}}_m(u) - \overline{F}(u)| \xrightarrow{p} 0 \tag{9}$$

для всех $v > 0$, *удовлетворяющих условию* $b_m(v) \geqslant cm$ *при достаточно больших* m.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что при $u < u_F \wedge v$

$$\hat{\overline{F}}_m(u) \xrightarrow{p} \overline{F}(u), \quad m \to \infty. \tag{10}$$

Обозначим $I_m(u) = -\ln \hat{\overline{F}}_m(u)$. Так как почти все траектории процесса $D_{m\cdot}(u)$ возрастают только скачками величины единица, то

$$I_m(u) = -\sum_{x \leqslant u} \ln \left(1 - \frac{J_m(x)\Delta D_{m\cdot}(x)}{N_{m\cdot}(x)}\right) = -\int_0^u \ln \left(1 - \frac{J_m(x)}{N_{m\cdot}(x)}\right) dD_{m\cdot}(x).$$

Введем обозначения:

$$\Lambda_m^*(u) = \int_0^u (1 - J_m(x)) \frac{dF(x)}{\overline{F}(x)}, \quad S_m^*(u) = \int_0^u \frac{1 - J_m(x)}{K_{m\cdot}(x)} dM_{m\cdot}(x),$$

$$\Lambda(u) = -\ln \overline{F}(u) = \int_0^u \frac{dF(x)}{\overline{F}(x)}, \quad R_m(u) = \int_0^u J_m(x) \frac{N_{m\cdot}(x) - K_{m\cdot}(x)}{N_{m\cdot}(x) K_{m\cdot}(x)} dM_{m\cdot}(x),$$

$$Q_m(u) = \int_0^u \left(\ln \left(1 - \frac{J_m(x)}{N_{m\cdot}(x)}\right) + \frac{J_m(x)}{N_{m\cdot}(x)}\right) dD_{m\cdot}(x).$$

Справедливо следующее тождество:

$$I_m(u) - \Lambda(u) = S_m(u) - S_m^*(u) - \Lambda_m^*(u) - R_m(u) - Q_m(u), \tag{11}$$

где $S_m(u)$ определяется формулой (7).

Поскольку $P(J_m(u)=0)=P(N_{m\cdot}(u)=0)=\prod_{j=1}^{m} P(N_j(u)=0)\leqslant$ $\leqslant (F(u))^{b_m(u)}\to 0$, $m\to\infty$, и $P(|S_m^*(u)|>0)\leqslant P(J_m(u)=0)$, $P(|\Lambda_m^*(u)|>0)\leqslant$ $\leqslant P(J_m(u)=0)$, то слагаемые $S_m^*(u)$, $\Lambda_m^*(u)$ стремятся к нулю по вероятности.

Из выражения (8) и условия теоремы вытекает, что при $m\to\infty$ $\mathcal{E}S_m^2(u)\leqslant Cb_m^{-1}(u)\to 0$, где C — константа, зависящая от u. Применяя неравенство Чебышева, получаем $S_m(u)\xrightarrow{p} 0$, $m\to\infty$.

Так как полная вариация процесса $M_{m\cdot}(u)$ на отрезке $[0, u]$ не превосходит $N_{m\cdot}(0)(1+\Lambda(u))$, то для слагаемого $R_m(u)$ справедлива следующая оценка:

$$|R_m(u)|\leqslant \sup_{[0,u]}\left|\frac{N_{m\cdot}(x)-K_{m\cdot}(x)}{K_{m\cdot}(x)}\right|\frac{N_{m\cdot}(0)(1+\Lambda(u))}{N_{m\cdot}(u)}. \qquad (12)$$

При выполнении условия $b_m(u)\geqslant cm$ можно показать, что для любого $\varepsilon>0$ существует константа C_ε, такая, что $P(N_{m\cdot}(0)/N_{m\cdot}(u)>C_\varepsilon)<\varepsilon$ при достаточно больших m. Поэтому в силу леммы 3 выражение в правой части неравенства (12) стремится к нулю по вероятности.

Несложные оценки показывают, что слагаемое $Q_m(u)$ также стремится к нулю по вероятности. Таким образом, предельное соотношение (10) доказано для $u<u_F\wedge v$.

Если $u\geqslant u_F$, то $\overline{F}(u)=0$, $\hat{\overline{F}}_m(u)=\hat{\overline{F}}_m(u_F)$. Для любого $\varepsilon>0$ можно подобрать $u<u_F$ так, что $\overline{F}(u)<\varepsilon$, и так как $\hat{\overline{F}}_m(u_F)\leqslant\hat{\overline{F}}_m(u)$, то $P(\hat{\overline{F}}_m(u_F)>\varepsilon)\leqslant P(\hat{\overline{F}}_m(u)>\varepsilon-\overline{F}(u)+\overline{F}(u))\leqslant P(|\hat{\overline{F}}_m(u)-\overline{F}(u)|>\varepsilon-$ $-\overline{F}(u))\to 0$. Следовательно, $\hat{\overline{F}}_m(u_F)\xrightarrow{p} 0$ и предельное соотношение (10) выполнено при всех $0\leqslant u\leqslant v$. Отсюда вытекает предельное соотношение (9), поскольку траектории случайного процесса $\hat{\overline{F}}_m(u)$ не возрастают. □

Изучим теперь асимптотическое поведение нормированных отклонений множительной оценки от истинной функции распределения. Допустим, что все $T_j=T_0$. В этом случае процессы $N_j(u)$, $j\geqslant 1$, так же как и $D_j(u)$, $M_j(u)$, одинаково распределены. Поэтому $K_{m\cdot}(u)=mK(u)$, где $K(u)=K_j(u)$. Обозначим

$$B(u)=\int_0^u \frac{dF(x)}{K(x)\overline{F}(x)}.$$

Пусть $W(\cdot)$ — винеровский процесс [3]. Введем случайный элемент пространства $D[0, v]$

$$Z_m(u)=\sqrt{m}\,\frac{\hat{\overline{F}}_m(u)-\overline{F}(u)}{\overline{F}(u)}.$$

Теорема 2. *Если $a_4<\infty$, то при $m\to\infty$*

$$Z_m(u)\xrightarrow{\mathscr{D}} W(B(u))$$

на любом конечном отрезке $[0, v]$, таком, что $K(v)>0$.

Доказательство. Обозначим $\Gamma_m(u) = -I_m(u) + \Lambda(u)$. По формуле Тэйлора имеем

$$Z_m(u) = \sqrt{m}\,(e^{\Gamma_m(u)} - 1) = \sqrt{m}\,(\Gamma_m(u) + \Gamma_m(u)\,\alpha(\Gamma_m(u))),$$

где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to 0$. Для доказательства теоремы достаточно установить, что

$$\sqrt{m}\,\Gamma_m(u) \xrightarrow{\mathcal{D}} W(B(u)), \quad m \to \infty.$$

Обозначим

$$L_j(u) = \int_0^u \frac{dM_j(x)}{K(x)}.$$

В соответствии с (7) имеем

$$S_m(u) = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\int_0^u \frac{dM_j(x)}{K(x)} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} L_j(u).$$

Из лемм 1, 2 следует, что $\mathcal{E}L_j(u) = 0$, $L_j(u)$ — процесс с некоррелированными приращениями и $\mathcal{E}L_j^2(u) = B(u)$.

В силу центральной предельной теоремы [7] конечномерные распределения процесса $\sqrt{m}\,S_m(u)$ сходятся слабо к конечномерным распределениям процесса $W(B(u))$. Доказательство плотности семейства распределений процессов $\sqrt{m}\,S_m(u)$ основывается на следующей лемме, приводимой без доказательства.

Лемма 4. *Если $a_4 < \infty$, то при $u_1 \leqslant u \leqslant u_2 \leqslant v$*

$$\mathcal{E}\,|L_j(u) - L_j(u_1)|^2\,|L_j(u_2) - L_j(u)|^2 \leqslant C\,|F(u_2) - F(u_1)|^{1+\varepsilon},$$

где $\varepsilon > 0$ и C — константа, зависящая от v.

Из леммы 4 находим

$$m^2\mathcal{E}\,|S_m(u) - S_m(u_1)|^2\,|S_m(u_2) - S_m(u)|^2 \leqslant C\,|F(u_2) - F(u_1)|^{1+\varepsilon}$$

при $\varepsilon > 0$ и $u_1 \leqslant u \leqslant u_2 \leqslant v$. Поэтому в силу теоремы 15.6 [3]

$$\sqrt{m}\,S_m(u) \xrightarrow{\mathcal{D}} W(B(u)), \quad m \to \infty.$$

Можно показать также, что остальные слагаемые в правой части тождества (11) имеют порядок меньше, чем $m^{-1/2}$, т. е.

$$\sqrt{m}\,S_m^*(u),\ \sqrt{m}\,\Lambda_m^*(u),\ \sqrt{m}\,R_m(u),\ \sqrt{m}\,Q_m(u) \xrightarrow{\mathcal{D}} 0. \ \square$$

Пусть $W^0(u) = W(u) - uW(1)$, $0 \leqslant u \leqslant 1$, — броуновский мост.

Теорема 3. *Если выполнены условия теоремы 2, то при $m \to \infty$*

$$\frac{Z_m(u)}{1 + B(u)} \xrightarrow{\mathcal{D}} W^0\left(\frac{B(u)}{1 + B(u)}\right)$$

на любом конечном отрезке $[0, v]$, *таком, что* $K(v) > 0$.

Этот результат вытекает из теоремы 2, поскольку случайный элемент $W(B(u))/(1 + B(u))$ распределен так же, как и $W^0(B(u)/(1 + B(u)))$.

В заключение отметим, что при $m \to \infty$ статистика

$$\widehat{B}_m(u) = \int_0^u \frac{m dD_{m\cdot}(x)}{N^2_{m\cdot}(x)}$$

является равномерно состоятельной оценкой $B(u)$. Этот факт позволяет строить асимптотические доверительные оценки для $\bar{F}(u)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Севастьянов Б. А. Ветвящиеся процессы. М., 1971.
2. Харрис Т. Е. Теория ветвящихся случайных процессов. М., 1966.
3. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. М., 1977.
4. Франкен П., Кёниг Д., Арндт У., Шмидт Ф. Очереди и точечные процессы. Киев, 1984.
5. Беляев Ю. К. Множительные оценки вероятности безотказной работы//Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1985. № 4.
6. Беляев Ю. К. Непараметрические методы в задачах обработки результатов испытаний и эксплуатации. М., 1984.
7. Лоэв М. Теория вероятностей. М., 1962.

Поступила в редакцию
22.05.85