Ю. Ю. Линке, А. И. Саханенко, Асимптотически нормальное оценивание параметра в задаче дробно-линейной регрессии, *Сиб. матем. журн.*, 2000, том 41, номер 1, 150–163

Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2000. Том 41, № 1

УДК 519.23.5

АСИМПТОТИЧЕСКИ НОРМАЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРА В ЗАДАЧЕ ДРОБНО–ЛИНЕЙНОЙ РЕГРЕССИИ

Ю. Ю. Линке, А. И. Саханенко

Аннотация: Рассматривается задача оценивания неизвестного параметра в схеме нелинейной регрессии, когда независимые наблюдения $X_1, X_2, \dots$ представимы в виде

$$X_i = a_i/(1 + b_i\theta) + \sigma_i\xi_i,$$

где значения $a_i > 0$ и $b_i > 0$ предполагаются известными. Построена некоторая двухшаговая процедура, позволяющая найти асимптотически нормальную оценку неизвестного параметра $\theta > 0$ без использования метода наименьших квадратов. Библиогр. 4.

§ 1. Введение

Пусть в результате некоторого эксперимента наблюдается последовательность независимых случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_N$, относительно которых предполагается, что для любого i справедливо представление

$$X_i = \frac{a_i}{1 + b_i\theta} + \sigma_i\xi_i, \tag{1.1}$$

где $\xi_1, \dots, \xi_N$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, удовлетворяющих условию

$$\mathbf{E}\xi_i = 0, \quad \mathbf{D}\xi_i = 1. \tag{1.2}$$

При этом считается, что значения $a_i > 0$ и $b_i > 0$ известны, а значения параметра θ и дисперсий $\mathbf{D}X_i \equiv \sigma_i^2$ неизвестны. Также предполагаются неизвестными и значения случайных величин $\xi_1, \dots, \xi_N$.

В работе исследуется задача оценивания неизвестного параметра $\theta > 0$ по наблюдениям $X_1, \dots, X_N$. Эта задача является частным случаем задачи нелинейной регрессии, которая обычно решается методом наименьших квадратов или его модификациями. Часто при приближенном поиске оценки используются методы линеаризации, наискорейшего спуска и другие (см., например, [1]), реализация которых требует применения вычислительной техники ввиду большого числа итераций.

Однако оказалось, что при решении задачи дробно-линейной регрессии вида (1.1) простая оценка

$$\theta^* = \frac{\sum c_i(a_i - X_i)}{\sum c_i b_i X_i} \tag{1.3}$$

является асимптотически нормальной при достаточно широких предположениях о постоянных $\{c_i\}$. А в случае, когда известна некоторая информация о поведении дисперсий $\{\sigma_i\}$, можно подобрать такие функции $\{\gamma_i(\theta)\}$, что «улучшенная» оценка

$$\theta^{**} = \frac{\sum \gamma_i(\theta^*)(a_i - X_i)}{\sum \gamma_i(\theta^*) b_i X_i} \tag{1.4}$$

будет в некотором смысле асимптотически эффективной.

Построению класса таких двухшаговых оценок и изучению их свойств и посвящена настоящая работа. Основные ее результаты приведены в § 2, в котором для наглядности изложения мы не стремились к наиболее общему виду утверждений. В более общей постановке соответствующие утверждения приведены в § 3 и доказаны в § 4–6.

Отметим, что рассматриваемый в работе метод можно перенести на случай многомерного параметра, когда справедливо представление

$$X_i = \frac{a_i^0 + \sum\limits_{j=1}^{k} a_i^j \theta_j}{1 + \sum\limits_{j=1}^{k} b_i^j \theta_j} + \sigma_i \xi_i. \tag{1.5}$$

В частности, можно построить оценки неизвестных параметров в уравнении Михаэлиса — Ментен, широко используемого в биохимии (см., например, [2]). Эти результаты будут приведены в следующих работах авторов, где уравнение (1.1) будет выступать в качестве единственного частного случая уравнения (1.5), который позволяет проиллюстрировать все идеи предлагаемого метода, не затеняя их громоздкими матричными обозначениями.

Условимся использовать символ $\sum$ без индексов только тогда, когда суммирование ведется по переменной i от 1 до N. Далее все пределы рассматриваются при $N \to \infty$, если только не оговорено противное, и используется обозначение

$$\Phi(x) = (2\pi)^{-1/2} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2}\, dy$$

для функции распределения стандартного нормального закона.

§ 2. Основные результаты

В этом параграфе свойства введенных в (1.3) и (1.4) оценок будем изучать в случае, когда справедливы следующие легко проверяемые условия:

$$\inf_i \min\{a_i, b_i, c_i, \sigma_i\} > 0, \quad \sup_i \max\{a_i, b_i, c_i, \sigma_i\} < \infty. \tag{2.1}$$

Обозначим

$$d^2(\{c_i\}) = d^2_{N,\theta}(\{c_i\}, \{\sigma_i\}) = \frac{\sum c_i^2 (1 + b_i\theta)^2 \sigma_i^2}{\left(\sum c_i a_i b_i (1 + b_i\theta)^{-1}\right)^2}. \tag{2.2}$$

Теорема 1. *Если выполнено условие* (2.1), *то имеет место сходимость*

$$\sup_x \left| \mathbf{P}\left(\frac{\theta^* - \theta}{d(\{c_i\})} < x\right) - \Phi(x) \right| \to 0.$$

Рассмотрим теперь поведение более сложно устроенной оценки θ^{**}, которая введена в (1.4). Всюду далее в работе считаем, что все функции $\{\gamma_i(\theta)\}$ дифференцируемы по θ и что производные $\gamma_i'(\theta)$ удовлетворяют условию

$$\sup_{\theta/2 \le t \le 2\theta} |\gamma_i'(t)| \le K_i(\theta) < \infty. \tag{2.3}$$

Теорема 2. *Пусть выполнено условие* (2.1), *а функции* $\{\gamma_i(\theta)\}$ *таковы, что*

$$\inf_i \gamma_i(\theta) > 0, \quad \sup_i(\gamma_i(\theta) + K_i(\theta)) < \infty.$$

Тогда имеет место сходимость

$$\sup_x \left| \mathbf{P}\left(\frac{\theta^{**} - \theta}{d(\{\gamma_i(\theta)\})} < x \right) - \Phi(x) \right| \to 0,$$

где $d(\{\gamma_i(\theta)\})$ *определяется по формуле* (2.2) *при* $c_i = \gamma_i(\theta)$.

Замечание 1. Ясно, что точность оценок θ^* и θ^{**} определяется коэффициентами $d^2(\{c_i\})$ и $d^2(\{\gamma_i(\theta)\})$. Поэтому естественным образом возникает задача минимизации этих коэффициентов. Нетрудно проверить, что при любом $C > 0$ справедливы равенства

$$d^2_{\mathrm{opt}} \equiv \inf_{\{c_i\}} d^2(\{c_i\}) = \inf_{\{\gamma_i(\theta)\}} d^2(\{\gamma_i(\theta)\}) = d^2(\{\gamma_{\mathrm{opt},i}(\theta,\sigma_i)\}),$$

где

$$\gamma_{\mathrm{opt},i}(\theta,\sigma_i) = C\frac{a_i b_i}{(1+b_i\theta)^3\sigma_i^2}. \tag{2.4}$$

Подчеркнем, что в качестве C в (2.7) можно брать любой положительный параметр, который не зависит от i.

Замечание 2. Предположим, что независимые случайные величины ξ_i имеют стандартное нормальное распределение. Тогда величины X_i нормально распределены со средним $U_i(\theta) = a_i/(1+b_i\theta)$ и дисперсией σ_i^2. Пусть дисперсии σ_i^2 не зависят от параметра θ. В этом случае

$$I_N(\theta) = \sum \frac{(U_i'(\theta))^2}{\sigma_i^2} = \sum \frac{a_i^2 b_i^2}{\sigma_i^2(1+b_i\theta)^4}, \tag{2.5}$$

где $I_N(\theta)$ — информация Фишера для выборки $X_1, \ldots, X_N$. Подставляя оптимальные значения $\gamma_i(\theta) = \gamma_{\mathrm{opt},i}(\theta,\sigma_i)$ из замечания 1 в коэффициент асимптотической дисперсии и используя (2.5), получаем

$$d^2_{\mathrm{opt}} = 1/I_N(\theta). \tag{2.6}$$

Соотношение (2.6) показывает, что по аналогии с неравенством Рао — Крамера следует ожидать неулучшаемости в некотором смысле оценки θ^{**}, когда $\gamma_i(\theta)$ выбраны оптимальным образом.

Пример 1. Пусть

$$\sigma_i^2 = w_{oi}(1+b_i\theta)^{-3}\sigma^2,$$

где коэффициент $w_{oi} > 0$ предполагается известным, а параметр $\sigma > 0$ может быть неизвестным. Тогда согласно замечанию 1 к теореме 1 можно выбрать оптимальные константы c_i, полагая $c_i = a_i b_i / w_{oi}$.

Замечание 3. Используя замечание 1, нетрудно проверить, что рассмотренный в примере 1 случай единственный, когда оптимальные значения c_i являются константами, а не функциями от θ и σ_i.

Пример 2. Пусть

$$\sigma_i^2 = \sigma^2 w_i(\theta),$$

где $w_i(\theta)$ — известные функции, а параметр $\sigma > 0$ может быть неизвестным. Нетрудно убедиться, что в этом случае мы можем положить

$$\gamma_{\mathrm{opt},i}(\theta, \sigma_i) = \gamma_{\mathrm{opt},i}(\theta) \equiv \frac{a_i b_i}{(1 + b_i\theta)^3 w_i(\theta)}.$$

Пусть теперь выполнены все условия теоремы 2 при

$$\gamma_i(\theta) = \gamma_{\mathrm{opt},i}(\theta), \quad c_i = \gamma_{\mathrm{opt},i}(\theta_0), \tag{2.7}$$

где θ_0 — некоторое фиксированное значение параметра θ. Тогда имеет место сходимость теоремы 2, причем $d^2(\{\gamma_i(\theta)\}) = d^2_{\mathrm{opt}}$.

Таким образом, в случае, разобранном в примере 2, можно рекомендовать использовать оценки θ^* и θ^{**} при c_i и $\gamma_i(\theta)$ из (2.7). При этом оценка θ^{**}, получаемая на втором шаге, будет асимптотически нормальной с асимптотической дисперсией d^2_{opt}.

Пример 3. Пусть $\sigma_i^2 = \sigma^2$, где $\sigma > 0$ — неизвестный параметр. По аналогии с примером 2 в этом случае можно рекомендовать использовать оценки θ^* и θ^{**} при $c_i = a_i b_i$ и $\gamma_i(\theta) = \gamma_{\mathrm{opt},i}(\theta) \equiv a_i b_i/(1 + b_i\theta)^3$.

Замечание 4. Если неизвестен точный вид дисперсий σ_i, то мы не сможем найти $\gamma_{\mathrm{opt},i}(\theta, \sigma_i)$ и построить оценку θ^{**} при $\gamma_i(\theta) = \gamma_{\mathrm{opt},i}(\theta, \sigma_i)$. В этом случае можно порекомендовать взять в качестве $\gamma_i(\theta)$ функции, относительно которых можно предполагать, что они «не очень сильно отличаются» от неизвестных нам функций $\gamma_{\mathrm{opt},i}(\theta, \sigma_i)$.

Замечание 5. Нетрудно проверить, что

$$1 \le \frac{d^2(\{\gamma_i(\theta)\})}{d^2_{\mathrm{opt}}} \le \frac{\sup\limits_{i \le N}(\gamma_i(\theta)/\gamma_{\mathrm{opt},i}(\theta, \sigma_i))}{\inf\limits_{i \le N}(\gamma_i(\theta)/\gamma_{\mathrm{opt},i}(\theta, \sigma_i))}, \tag{2.8}$$

т. е. чем «лучше» выбранные функции $\gamma_i(\theta)$ приближают функции $\gamma_{\mathrm{opt},i}(\theta, \sigma_i)$, тем меньше асимптотическая дисперсия соответствующей оценки отличается от d^2_{opt}. Неравенство (2.8) можно интерпретировать как некоторое свойство устойчивости оценок θ^{**} как функционалов, зависящих от функций $\gamma_i(\theta)$.

При построении доверительных интервалов и при проверке гипотез нам было бы удобнее иметь аналоги теорем 1 и 2, в которых вместо параметров $d(\{c_i\})$ и $d(\{\gamma_i(\theta)\})$ участвовали бы некоторые их оценки. Приведем утверждения, обладающие этими свойствами. Положим

$$\begin{gathered} \beta_i^* = (1 + b_i\theta^*)X_i - a_i, d^* = \Bigl(\sum c_i^2 \beta_i^{*2}\Bigr)^{1/2} \Big/ \sum c_i b_i X_i, \\ d^{**} = \Bigl(\sum \gamma_i^2(\theta^*)\Bigr)\beta_i^{*2})^{1/2} \Big/ \sum \gamma_i(\theta^*) b_i X_i. \end{gathered} \tag{2.9}$$

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда*

$$\sup_x |\mathbf{P}((\theta^* - \theta)/d^* < x) - \Phi(x)| \to 0.$$

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы* 2. *Тогда*

$$\sup_x |\mathbf{P}((\theta^{**} - \theta)/d^{**} < x) - \Phi(x)| \to 0.$$

§ 3. Некоторые обобщения

Далее мы будем рассматривать более общую задачу, когда $a_i = a_i^{(N)}$, $b_i = b_i^{(N)}$, $\sigma_i = \sigma_i^N$ и $X_i = X_i^{(N)}$, где верхний индекс подчеркивает возможность зависимости величин от числа наблюдений N. Однако, чтобы не загромождать обозначения, мы индекс (N) у величин a_i, b_i, σ_i и X_i будем везде опускать.

Нам потребуются следующие обозначения:

$$\alpha_i = a_i b_i/(1+b_i\theta), \quad \beta_i = (1+b_i\theta)\sigma_i, \quad \gamma_i = \gamma_i(\theta), \quad K_i = K_i(\theta), \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned} A_c &= \sum c_i\alpha_i, \quad B_c^2 = \sum c_i^2\beta_i^2, \quad d_c = \frac{B_c}{A_c}, \\ A_\gamma &= \sum \gamma_i\alpha_i, \quad B_\gamma^2 = \sum \gamma_i^2\beta_i^; \quad d_\gamma = \frac{B_\gamma}{A_\gamma}, \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\hat{d}_c = B_c\Big/\sum c_i b_i X_i, \quad \hat{d}_\gamma = B_\gamma\Big/\sum \gamma_i b_i X_i. \tag{3.3}$$

Нетрудно понять, что в этом случае $d_c = d(\{c_i\})$, $d_\gamma = d(\{\gamma_i\})$.

Теорема 5. *Пусть выполнено условие*

$$\max_{k\le N} c_k^2\beta_k^2\Big/B_c^2 \to 0. \tag{3.4}$$

Тогда

$$\sup_x |\mathbf{P}((\theta^* - \theta)/\hat{d}_c < x) - \Phi(x)| \to 0.$$

Теорема 6. *Пусть выполнены условие* (3.4) *и условие*

$$\sum c_i^2 b_i^2\sigma_i^2/A_c^2 \to 0. \tag{3.5}$$

Тогда имеет имеет место сходимость теоремы 1.

Теорема 7. *Пусть выполнены условия* (3.4), (3.5) *и*

$$\sum c_i^2\alpha_i^2/A_c^2 \to 0. \tag{3.6}$$

Тогда имеет место сходимость теоремы 4.

Нетрудно понять, что теоремы 1 и 3 немедленно следуют из теорем 6 и 7.

Приступим к изучению оценки θ^{**}. При исследовании свойств этой оценки мы всегда будем предполагать выполненными следующие условия:

$$d_c \to 0, \tag{3.7}$$

$$\max_{k\le N} \gamma_k^2\beta_k^2/B_\gamma^2 \to 0, \tag{3.8}$$

$$d_c^2\Big(\sum \beta_i^2 K_i^2\Big)/B_\gamma^2 \to 0. \tag{3.9}$$

Теорема 8. *Пусть выполнены условия* (3.7)–(3.9). *Тогда*

$$\sup_x |\mathbf{P}((\theta^* - \theta)/\hat{d}_\gamma < x) - \Phi(x)| \to 0.$$

Теорема 9. *Пусть выполнены условия теоремы* 8 *и, кроме того,*

$$\sum \gamma_i^2 b_i^2 \sigma_i^2 / A_\gamma^2 \to 0, \tag{3.10}$$

$$d_c^2 \Big(\sum b_i^2 \sigma_i^2 K_i^2 \Big) / A_\gamma^2 \to 0, \tag{3.11}$$

$$d_c \Big(\sum \alpha_i K_i \Big) / A_\gamma \to 0. \tag{3.12}$$

Тогда справедливы все утверждения теоремы 2.

Теорема 10. *Пусть выполнены условия теоремы* 8 *и, кроме того,*

$$d_c^4 \sum K_i^2 \big(\alpha_i^2 + b_i^2 \sigma_i^2\big) / B_\gamma^2 \to 0, \tag{3.13}$$

$$d_c^2 \sum \gamma_i^2 \big(\alpha_i^2 + b_i^2 \sigma_i^2\big) / B_\gamma^2 \to 0. \tag{3.14}$$

Тогда справедливо утверждение теоремы 4.

Нетрудно проверить, что теоремы 2 и 4 являются частными случаями теорем 9 и 10.

Замечание 6. При изучении оценки θ^{**}, которая строится на втором шаге, существенно используется предположение о состоятельности оценки θ^*, построенной на первом шаге. Как видно из представления (3.18) и определения (3.2), эта состоятельность гарантируется условием (3.7). Отметим, что предположение (3.7) существенно, так как без него оценка θ^* может удовлетворять предположениям теоремы 1, но не быть состоятельной. Действительно, пусть $a_i = c_i = \sigma_i = 1$, $b_i = 1/i^{1-\varepsilon}$ при $0 < \varepsilon < 1/2$. Нетрудно проверить, что в этом случае

$$A_c \sim \sum b_i \sim N^\varepsilon / \varepsilon \to \infty, \quad d_c^2 \sim N / A_c^2 \sim \varepsilon^2 N^{1-2\varepsilon} \to \infty.$$

Но в то же время выполнены все условия теоремы 1, поскольку

$$\sum c_i^2 b_i^2 \sigma_i^2 = \sum i^{2\varepsilon - 2} < \infty,$$

$$\max_{k \le N} c_k^2 \beta_k^2 = (1+\theta)^2 < \infty, \quad \sum c_i^2 \beta_i^2 \sim N \to \infty.$$

Замечание 7. Приведем соображения, позволяющие угадать имеющие простой вид оценки (1.3) и (1.4). Перепишем (1.1) в виде

$$(1 + b_i \theta) X_i = a_i + \beta_i \xi_i. \tag{3.15}$$

Домножив равенство (3.15) на c_i и просуммировав по i, получим следующее полезное тождество:

$$\sum c_i X_i + \theta \sum c_i b_i X_i = \sum c_i a_i + \sum c_i \beta_i \xi_i. \tag{3.16}$$

Мы вправе предполагать, что взвешенная сумма погрешностей ошибок ξ_i, являющаяся последним слагаемым в тождестве (3.16), мала по сравнению с остальными суммами положительных слагаемых. Поэтому в (3.16) естественно отбросить последнее слагаемое, подставив в измененное равенство вместо неизвестного параметра θ оценку θ^*. Решая уравнение

$$\sum c_i X_i + \theta^* \sum c_i b_i X_i = \sum c_i a_i, \tag{3.17}$$

находим представление (1.3) для оценки θ^*.

Далее, вычитая (3.16) из (3.17) и используя (1.1), получаем

$$\theta^* - \theta = \frac{-\sum c_i(1+b_i\theta)\sigma_i\xi_i}{\sum c_i b_i X_i} = \frac{-\sum c_i\beta_i\xi_i}{\sum c_i\alpha_i + \sum c_i b_i\sigma_i\xi_i}. \tag{3.18}$$

Представление (3.18) является ключевым при изучении свойств оценки θ^*.

Отметим, что по аналогии с (3.18) для оценки θ^{**} справедливо представление

$$\theta^{**} - \theta = \frac{\sum \gamma_i(\theta^*)\beta_i\xi_i}{\sum \gamma_i(\theta^*) b_i X_i}. \tag{3.19}$$

Замечание 8. Всюду в работе θ — это неизвестный параметр. Кроме того, неизвестными параметрами могут быть также и величины $\{\sigma_i\}$. Таким образом, большинство условий во всех утверждениях работы — это ограничения на величины, содержащие неизвестные параметры. Понятно, что в случае практического применения этих утверждений мы должны проверять выполнение условий *при всех возможных значениях всех неизвестных параметров* (так же, как это делается, например, в [3]).

§ 4. Доказательства свойств оценки θ^*

Доказательство теоремы 5. Положим

$$\beta_{i,N} = c_i\beta_i/B_c, \quad \beta(N) = \max_{k\le N}\beta_{k,N}. \tag{4.1}$$

В этом случае из (3.18) и (3.3) вытекает представление

$$(\theta^* - \theta)/\hat{d}_c = -\sum \beta_{i,N}\xi_i. \tag{4.2}$$

Лемма 1. *Если выполнено условие* (3.4), *то*

$$\sup_x \Big|\mathbf{P}\Big(-\sum \beta_{i,N}\xi_i < x\Big) - \Phi(x)\Big| \to 0.$$

Доказательство. Это утверждение является частным случаем центральной предельной теоремы для схемы серий. Поэтому достаточно (см. [4, гл. 8, теорема 5]) проверить выполнение условия

$$D_2 \equiv \sum \mathbf{E}\min\{(\beta_{i,N}\xi_i)^2, |\beta_{i,N}\xi_i|^3\} \to 0. \tag{4.3}$$

В силу определения (4.1) величины $\beta(N)$ имеем

$$D_2 \le \sum \beta_{i,N}^2 \mathbf{E}\min\big\{\xi_i^2, \beta(N)|\xi_i|^3\big\} = \mathbf{E}\min\big\{\xi_1^2, \beta(N)|\xi_1|^3\big\}. \tag{4.4}$$

В (4.4) использовался тот факт, что $\sum \beta_{i,N}^2 = 1$ ввиду определения (4.1). Теперь, чтобы извлечь (4.3) из (4.4), достаточно заметить, что $\beta(N) \to 0$, так как по определению $\beta(N)$ совпадает с левой частью условия (3.4).

Утверждение теоремы 5 немедленно вытекает из представления (4.2) и леммы 1.

Приступим к доказательству теоремы 6. Воспользуемся представлением

$$\frac{\theta^* - \theta}{d_c} = \frac{-\sum \beta_{i,N}\xi_i}{1 + \sum c_i b_i\sigma_i\xi_i/A_c}, \tag{4.5}$$

получаемым из (2.2) и (3.18).

Лемма 2. *Если выполнено условие* 3.5, *то* $\sum c_i b_i \sigma_i \xi_i / A_c \xrightarrow{p} 0$.

Это утверждение следует из неравенства Чебышева, поскольку

$$\mathbf{E}\Big(\sum c_i b_i \sigma_i \xi_i / A_c\Big) = 0,$$

а дисперсия этого выражения совпадает с левой частью в условии (3.5).

Заключение теоремы 6 немедленно вытекает из представления (4.5), леммы 2 и теоремы 5.

Приступим теперь к доказательству теоремы 7. Докажем сначала два вспомогательных утверждения.

Лемма 3. *Пусть выполнено условие* (3.4). *Тогда*

$$\sum c_i^2 \beta_i^2 \xi_i^2 \Big/ \sum c_i^2 \beta_i^2 \xrightarrow{p} 1. \tag{4.6}$$

Доказательство. С учетом обозначений (4.1) утверждение леммы можно переписать в виде

$$\sum \beta_{i,N}^2 \big(\xi_i^2 - 1\big) \xrightarrow{p} 0, \quad \mathbf{E}\big(\xi_i^2 - 1\big) = 0. \tag{4.7}$$

Но сходимость в (4.7) является частным случаем закона больших чисел для схемы серий (см. [4, гл. 8, теорема 3]). Поэтому для справедливости (4.7) достаточно показать выполнение условия

$$D_1 \equiv \sum \mathbf{E} \min\big\{\beta_{i,N}^4 \big(\xi_i^2 - 1\big)^2; \big|\beta_{i,N}^2 \big(\xi_i^2 - 1\big)\big|\big\} \to 0. \tag{4.8}$$

Имеем

$$D_1 \le \sum \beta_{i,N}^2 \mathbf{E} \min\big\{\beta^2(N)\big(\xi_i^2 - 1\big)^2; \big|\xi_i^2 - 1\big|\big\} = \mathbf{E} \min\big\{\beta^2(N)\big(\xi_1^2 - 1\big)^2; \big|\xi_1^2 - 1\big|\big\}. \tag{4.9}$$

При выводе (4.9) использовался тот факт, что $\sum \beta_{i,N}^2 = 1$ ввиду (4.1). Далее, поскольку $\beta(N) \to 0$ в силу (3.4), из (4.9) вытекает (4.8), что и доказывает требуемое утверждение (4.7).

Обозначим

$$\delta^* = \Big(\sum c_i^2 \beta_i^{*2}\Big)^{1/2} - \Big(\sum c_i^2 \beta_i^2 \xi_i^2\Big)^{1/2}, \quad \delta_c = \Big(\sum c_i^2 \beta_i^2 \xi_i^2\Big)^{1/2} - \Big(\sum c_i^2 \beta_i^2\Big)^{1/2}. \tag{4.10}$$

Лемма 4. *При выполнении условий теоремы* 7

$$\delta_c / B_c \xrightarrow{p} 0, \quad \delta^* / B_c \xrightarrow{p} 0.$$

Доказательство. Поскольку первое из утверждений леммы следует из леммы 3, достаточно доказать второе. Заметим, что

$$\beta_i^* - \beta_i \xi_i = (1 + b_i \theta^*) X_i - a_i - (1 + b_i \theta) \sigma_i \xi_i = (\theta^* - \theta) b_i X_i.$$

Далее, корень из суммы квадратов обладает всеми свойствами нормы, следовательно,

$$|\delta^*| \le \Big(\sum c_i^2 (\beta_i^* - \beta_i \xi_i)^2\Big)^{1/2} = |\theta^* - \theta| \delta_{0c},$$

где $\delta_{0c} = \big(\sum c_i^2 b_i^2 X_i^2\big)^{1/2}$. Поэтому

$$\frac{|\delta^*|}{B_c} \le \frac{|\theta^* - \theta|}{d_c} \frac{\delta_{0c}}{A_c}. \tag{4.11}$$

Поскольку $\mathbf{E}\delta_{0c}^2 = \sum c_i^2\alpha_i^2 + \sum c_i^2 b_i^2\sigma_i^2$, в силу условий (3.5) и (3.6) второй сомножитель в (4.11) сходится по вероятности к нулю. Используя этот факт и асимптотическую нормальность оценки θ^*, из (4.11) нетрудно извлечь второе утверждение леммы.

Завершим доказательство теоремы 7. Применяя представление (3.18) и обозначения (3.2), (4.1) и (4.10), получаем

$$\frac{\theta^* - \theta}{d^*} = \frac{-\sum c_i\beta_i\xi_i}{\left(\sum c_i^2\beta_i^{*2}\right)^{1/2}} = \frac{-\sum \beta_{i,N}\xi_i}{1 + \delta^*/B_c + \delta_c/B_c}. \tag{4.12}$$

Теорема 7 теперь немедленно следует из (4.12) и лемм 1 и 4.

§ 5. Доказательство теоремы 8

Зафиксируем $\theta > 0$ и сохраним обозначения, введенные ранее. Положим

$$q_i = -c_i\sigma_i/A_c, \quad r_i = c_i b_i\sigma_i/A_c, \quad Z_1 = -\sum q_i\xi_i, \quad Z_2 = \sum r_i\xi_i. \tag{5.1}$$

Тогда в силу формулы (3.18)

$$\theta^* = (\theta + Z_1)/(1 + Z_2). \tag{5.2}$$

Введем в рассмотрение случайную величину

$$\tilde\theta = \min\{2\theta, \theta + Z_1\}/\max\{1/2, 1 + Z_2\}. \tag{5.3}$$

Лемма 5. *Если выполнено условие* (3.7), *то*

$$\mathbf{P}(\tilde\theta \neq \theta^*) \to 0.$$

Доказательство. Поскольку $\mathbf{E}Z_1 = \mathbf{E}Z_2 = 0$ ввиду (1.2) и (5.1), то

$$\mathbf{E}(Z_1)^2 = \sum c_i^2\sigma_i^2/A_c^2 \le B_c^2/A_c^2 = d_c^2 \to 0, \tag{5.4}$$

$$\mathbf{E}(Z_2)^2 = \sum c_i^2 b_i^2\sigma_i^2/A_c^2 \le B_c^2/A_c^2\theta^2 = d_c^2/\theta^2 \to 0 \tag{5.5}$$

в силу (3.7). Отсюда, в частности, получаем, что $Z_1 \xrightarrow{p} 0$ и $Z_2 \xrightarrow{p} 0$. Таким образом, для завершения доказательства леммы 5 нам осталось сравнить определения (5.2) и (5.3) и заметить, что

$$\mathbf{P}(\tilde\theta \neq \theta^*) \le \mathbf{P}(Z_2 < -1/2) + \mathbf{P}(Z_1 > \theta) \to 0.$$

Положим

$$\tilde\gamma_i = \gamma_i(\tilde\theta), \quad Z_3 = \sum(\tilde\gamma_i - \gamma_i)\beta_i\xi_i, \quad \tilde d_\gamma = B_\gamma\Big/\sum \tilde\gamma_i b_i X_i, \tag{5.6}$$

$$\tilde\theta^{**} = \sum \tilde\gamma_i(a_i - X_i)\Big/\sum \tilde\gamma_i b_i X_i. \tag{5.7}$$

Из (1.4), (5.6), (5.7) и леммы 5 немедленно следует, что

$$\mathbf{P}(\tilde\theta^{**} \neq \theta^{**}) \to 0, \quad \mathbf{P}(\tilde d_\gamma \neq \hat d_\gamma) \to 0. \tag{5.8}$$

Используя (1.4), (3.19) и обозначения (5.6), (5.7), получаем

$$(\tilde\theta^{**} - \theta)/\tilde d_\gamma = -\sum \tilde\gamma_i\beta_i\xi_i/B_\gamma = -\sum \gamma_i\beta_i\xi_i/B_\gamma + Z_3/B_\gamma. \tag{5.9}$$

Формула (5.9) будет играть центральную роль в доказательстве теоремы 8. Нам также потребуются обозначения

$$\tilde\theta_j = \frac{\min\{2\theta, \theta + \sum\limits_{i\neq j} q_i\xi_i\}}{\max\{1/2, 1 + \sum\limits_{i\neq j} r_i\xi_i\}}, \quad \tilde\theta_{jk} = \frac{\min\{2\theta, \theta + \sum\limits_{i\neq j,k} q_i\xi_i\}}{\max\{1/2, 1 + \sum\limits_{i\neq j,k} r_i\xi_i\}}.$$

Лемма 6. *При каждом j величина $\tilde\theta_j$ не зависит от ξ_j и*

$$|\tilde\theta_j-\tilde\theta|\le \widetilde K_j|\xi_j| \quad \text{при} \quad \widetilde K_j=8(|q_j|+\theta r_j)=8c_j\beta_j/A_c.$$

Доказательство. Независимость следует из определения $\tilde\theta_j$. Далее, фиксируем число j и все величины ξ_i при $i\ne j$. Положим

$$q=\theta+\sum_{i\ne j}q_i\xi_i,\quad r=1+\sum_{i\ne j}r_i\xi_i,$$
$$f_1(\xi_j)=\min\{2\theta,q+q_j\xi_j\},\quad f_2(\xi_j)=\max\{1/2,1+r+r_j\xi_j\}.$$

В этих обозначениях $\tilde\theta=f_1(\xi_j)/f_2(\xi_j)$, $\tilde\theta_j=f_1(0)/f_2(0)$. Поэтому

$$\tilde\theta-\tilde\theta_j=\frac{f_1(\xi_j)-f_1(0)}{f_2(\xi_j)}+f_1(0)\frac{f_2(0)-f_2(\xi_j)}{f_2(\xi_j)f_2(0)}. \tag{5.10}$$

Ясно, что

$$|f_1(\xi_j)-f_1(0)|\le|q_j||\xi_j|,\quad |f_2(\xi_j)-f_2(0)|\le r_j|\xi_j|,\quad |f_1(\cdot)|\le 2\theta,\quad |f_2(\cdot)|\ge 1/2.$$

Подставляя эти соотношения в (5.10), получаем

$$|\tilde\theta-\tilde\theta_j|\le\frac{|q_j||\xi_j|}{1/2}+2\theta\frac{r_j|\xi_j|}{1/4}\le 8(|q_j|+\theta r_j)|\xi_j|.$$

Лемма 7. *При всех $j\ne k$ величина $\tilde\theta_{jk}$ не зависит от ξ_j и ξ_k и*

$$|\tilde\theta_{jk}-\tilde\theta_k|\le\widetilde K_j|\xi_j|.$$

Доказательство леммы повторяет доказательство леммы 6, если в последнем положить величину ξ_k тождественно равной нулю.

Лемма 8. *Справедливо неравенство*

$$\mathbf{E}|\tilde\theta-\theta|^2\le 16d_c^2.$$

Доказательство. По аналогии с выводом леммы 6 положим

$$f_1(Z_1)=\min\{2\theta,\theta+Z_1\},\quad f_2(Z_2)=\max\{1/2,1+Z_2\}.$$

Ясно, что $f_1(0)=\theta$, $f_2(0)=1$, $|f_2(Z_2)|\ge 1/2$ и

$$|f_1(Z_1)-f_1(0)|\le|Z_1|,\quad |f_2(Z_2)-f_2(0)|\le|Z_2|.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}|\tilde\theta-\theta|=\left|\frac{f_1(Z_1)}{f_2(Z_2)}-\frac{f_1(0)}{f_2(0)}\right|&=\left|\frac{f_1(Z_1)-f_1(0)}{f_2(Z_2)}+f_1(0)\frac{f_2(0)-f_2(Z_2)}{f_2(Z_2)f_2(0)}\right|\\&\le\frac{|Z_1|}{1/2}+\theta\frac{|Z_2|}{1/2}=2|Z_1|+2\theta|Z_2|.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\mathbf{E}|\tilde\theta-\theta|^2\le 2\mathbf{E}(2|Z_1|)^2+2\mathbf{E}(2\theta|Z_2|)^2.$$

Подставляя в последнее неравенство оценки из (5.4) и (5.5), получим требуемое утверждение леммы.

Лемма 9. *При всех* i
$$\mathbf{E}|\tilde{\theta}_i - \theta|^2 \le 16 d_c^2.$$

Доказательство леммы полностью повторяет вывод леммы 8, если в нем считать величину ξ_i тождественно равной нулю.

Положим $\tilde{\gamma}_{ii} = \gamma_i(\tilde{\theta}_i)$.

Лемма 10. *Справедливо неравенство*
$$\Delta_1 \equiv \mathbf{E}\Big|\sum \beta_i(\tilde{\gamma}_i - \tilde{\gamma}_{ii})\xi_i\Big| \le 8 d_c \Big(\sum \beta_i^2 K_i^2\Big)^{1/2}.$$

Доказательство. В силу условия (2.3) и леммы 6
$$|\tilde{\gamma}_i - \tilde{\gamma}_{ii}| \le K_i |\tilde{\theta} - \tilde{\theta}_i| \le K_i \widetilde{K}_i |\xi_i|.$$
Следовательно,
$$\Delta_1 \le \mathbf{E}\sum \beta_i K_i \widetilde{K}_i \xi_i^2 = \sum \beta_i K_i \widetilde{K}_i. \tag{5.11}$$
Далее, используя определение постоянных $\{\widetilde{K}_i\}$, имеем
$$\Big(\sum \beta_i K_i \widetilde{K}_i\Big)^2 \le \sum \beta_i^2 K_i^2 \sum \widetilde{K}_i^2 = (8 d_c)^2 \sum \beta_i^2 K_i^2. \tag{5.12}$$
Из неравенств (5.11) и (5.12) вытекает требуемое утверждение леммы 10.

Лемма 11. *Имеет место неравенство*
$$\Delta_2 \equiv \mathbf{E}\Big(\sum \beta_i(\tilde{\gamma}_{ii} - \gamma_i)\xi_i\Big)^2 \le 80 d_c^2 \Big(\sum \beta_i^2 K_i^2\Big).$$

Доказательство. Пусть $\delta_{ii} = \tilde{\gamma}_{ii} - \gamma_i$. Ясно, что δ_{ii} не зависит от ξ_i. Поэтому
$$\begin{aligned}\mathbf{E}\Big(\sum \beta_i \delta_{ii}\xi_i\Big)^2 &= \sum \beta_i^2 \mathbf{E}\delta_{ii}^2 \xi_i^2 + \sum_{i\ne j} \beta_i\beta_j \mathbf{E}\delta_{ii}\xi_i\delta_{jj}\xi_j \\ &= \sum \beta_i^2 \mathbf{E}\delta_{ii}^2 + \sum_{i\ne j} \beta_i\beta_j \mathbf{E}\delta_{ii}\xi_i\delta_{jj}\xi_j. \end{aligned}\tag{5.13}$$
Используя условие (2.3) и лемму 9, получаем
$$\sum \beta_i^2 \mathbf{E}\delta_{ii}^2 \le \sum \beta_i^2 \mathbf{E} K_i^2 |\tilde{\theta}_i - \theta|^2 \le 16 d_c^2 \Big(\sum \beta_i^2 K_i^2\Big). \tag{5.14}$$

Обозначим $\tilde{\gamma}_{iij} = \gamma_i(\tilde{\theta}_{ij})$, $\delta_{iij} = \tilde{\gamma}_{iij} - \gamma_i$, $\tilde{\delta}_{iij} = \tilde{\gamma}_{ii} - \tilde{\gamma}_{iij}$. Тогда
$$\delta_{ii} = \delta_{iij} + \tilde{\delta}_{iij}, \tag{5.15}$$
причем $\tilde{\delta}_{iij}$ не зависит от ξ_i и по лемме 7 и условию (2.3)
$$|\tilde{\delta}_{iij}| \le K_i |\tilde{\theta}_i - \tilde{\theta}_{ij}| \le K_i \widetilde{K}_j |\xi_j|.$$
Подставляя выражение (5.15) во второе слагаемое из (5.13), получаем
$$\begin{aligned}\sum_{i\ne j} \beta_i\beta_j \mathbf{E}\delta_{ii}\xi_i\delta_{jj}\xi_j &= \sum_{i\ne j} \beta_i\beta_j \mathbf{E}(\delta_{iij} + \tilde{\delta}_{iij})\xi_i(\delta_{jji} + \tilde{\delta}_{jji})\xi_j \\ &= \sum_{i\ne j} \beta_i\beta_j \mathbf{E}\delta_{iij}\delta_{jji}\xi_i\xi_j + \sum_{i\ne j} \beta_i\beta_j \mathbf{E}\delta_{iij}\tilde{\delta}_{jji}\xi_i\xi_j \\ &+ \sum_{i\ne j} \beta_i\beta_j \mathbf{E}\delta_{jji}\tilde{\delta}_{iij}\xi_i\xi_j + \sum_{i\ne j} \beta_i\beta_j \mathbf{E}\tilde{\delta}_{iij}\tilde{\delta}_{jji}\xi_i\xi_j \\ &\le 0 + 0 + 0 + \sum_{i\ne j} \beta_i\beta_j \mathbf{E} K_i \widetilde{K}_i K_j \widetilde{K}_j \xi_i^2 \xi_j^2 \\ &\le \Big(\sum \beta_i K_i \widetilde{K}_i\Big)^2 \le 64 d_c^2 \Big(\sum \beta_i^2 K_i^2\Big). \end{aligned}\tag{5.16}$$

При выводе последнего соотношения использовано неравенство (5.12).

Требуемое утверждение леммы вытекает из оценок (5.14), (5.16) и равенства (5.13).

Лемма 12. *Справедливо неравенство*

$$\Delta_3 \equiv \mathbf{E}|Z_3| \le 17 d_c \Big(\sum \beta_i^2 K_i^2\Big)^{1/2}.$$

Для доказательства этого утверждения достаточно заметить, что $\Delta_3 \le \Delta_1 + \Delta_2^{1/2}$, и использовать леммы 10 и 11.

Лемма 13. *Если выполнено условие* (3.8), *то*

$$\sup_x \Big| \mathbf{P}\Big(-\sum \gamma_i \beta_i \xi_i / B_\gamma < x\Big) - \Phi(x)\Big| \to 0. \tag{5.17}$$

Чтобы получить эту сходимость, достаточно повторить вывод леммы 2 при $\beta_{i,N} = -\gamma_i \beta_i / B_\gamma$.

Завершим доказательство теоремы 8. Из леммы 12 и условия (3.9) следует, что

$$Z_3 / B_\gamma \xrightarrow{p} 0. \tag{5.18}$$

Заключение теоремы 8 вытекает теперь из (5.9), (5.18) и леммы 13.

§ 6. Доказательство теорем 9 и 10

Обозначим

$$Z_4 = \sum (\tilde\gamma_i - \gamma_i)\alpha_i, \quad Z_5 = \sum \gamma_i b_i \sigma_i \xi_i, \quad Z_6 = \sum (\tilde\gamma_i - \gamma_i) b_i \sigma_i \xi_i. \tag{6.1}$$

Используя (1.4), (3.19) и обозначения (3.2), (5.6), (5.7), получаем

$$\frac{\tilde\theta^{**} - \theta}{d(\{\gamma_i\})} = \frac{-\sum \tilde\gamma_i \beta_i \xi_i}{\sum \tilde\gamma_i b_i X_i} \cdot \frac{A_\gamma}{B_\gamma} = \frac{-\sum \gamma_i \beta_i \xi_i / B_\gamma + Z_3/B_\gamma}{1 + (Z_4 + Z_5 + Z_6)/A_\gamma}. \tag{6.2}$$

Представление (6.2) будет играть центральную роль в доказательстве теоремы 9.

Лемма 14. *Имеет место оценка*

$$\Delta_6 \equiv \mathbf{E}|Z_6| \le 17 d_c \left(\sum b_i^2 \sigma_i^2 K_i^2\right)^{1/2}.$$

Для вывода этого неравенства достаточно повторить доказательства лемм 10–12, заменив величины β_i на $b_i \sigma_i$.

Лемма 15. *Справедлива оценка*

$$\Delta_4 \equiv \mathbf{E}|Z_4| \le 4 d_c \left(\sum \alpha_i K_i\right).$$

Доказательство. Поскольку $|\tilde\gamma_i - \gamma_i| \le K_i |\tilde\theta - \theta|$ в силу (2.3), используя лемму 8, получаем

$$\mathbf{E}|\tilde\gamma_i - \gamma_i| \le K_i (\mathbf{E}(\tilde\theta - \theta)^2)^{1/2} \le (16)^{1/2} d_c K_i.$$

Подставляя последнее неравенство в определение (6.1) величины Z_4, приходим к утверждению леммы.

Лемма 16. *Имеет место оценка*

$$\Delta_5 \equiv \mathbf{E}|Z_5| \le \Big(\sum \gamma_i^2 b_i^2 \sigma_i^2\Big)^{1/2}.$$

Для доказательства этого неравенства достаточно заметить, что $\mathbf{E}Z_5 = 0$, а $\mathbf{D}Z_5 = \sum \gamma_i^2 b_i^2 \sigma_i^2$ ввиду (1.2) и (6.1).

Завершим доказательство теоремы 9. Из лемм 14–16 и условий (3.10)–(3.12) следует, что $\mathbf{E}|Z_4 + Z_5 + Z_6|/A_\gamma \to 0$, а потому

$$(Z_4 + Z_5 + Z_6)/A_\gamma \xrightarrow{p} 0. \tag{6.3}$$

Заключение теоремы вытекает теперь из представления (6.2), сходимостей (6.3), (5.18) и леммы 13.

Перейдем к доказательству теоремы 10. Положим

$$\tilde\beta_i = (1 + b_i\tilde\theta)X_i - a_i, \quad \tilde d^{**} = \Big(\sum \tilde\gamma_i^2 \tilde\beta_i^2\Big)^{1/2} \Big/ \sum \tilde\gamma_i b_i X_i, \tag{6.4}$$

$$\delta = \Big(\sum \tilde\gamma_i^2 \tilde\beta_i^2\Big)^{1/2} - \Big(\sum \gamma_i^2 \beta_i^2 \xi_i^2\Big)^{1/2}, \quad \delta_0 = \Big(\sum \gamma_i^2 \beta_i^2 \xi_i^2\Big)^{1/2} - \Big(\sum \gamma_i^2 \beta_i^2\Big)^{1/2} \tag{6.5}$$

и заметим, что

$$\mathbf{P}(\tilde d^{**} \ne d^{**}) \to 0 \tag{6.6}$$

в силу леммы 5 и определений (2.9), (5.6) и (6.4). Используя представление (3.19) и обозначения (1.4), (5.6), (5.7), (6.4) и (6.5), нетрудно получить формулу

$$\frac{\tilde\theta^{**} - \theta}{\tilde d^{**}} = \frac{-\sum \tilde\gamma_i \beta_i \xi_i}{\big(\sum \tilde\gamma_i^2 \tilde\beta_i^2\big)^{1/2}} = \frac{-\sum \gamma_i \beta_i \xi_i / B_\gamma + Z_3/B_\gamma}{1 + (\delta + \delta_0)/B_\gamma}, \tag{6.7}$$

которая будет ключевой в доказательстве теоремы 10.

Обозначим

$$\delta_{0\beta} = \Big(\sum K_i^2 \beta_i^2 \xi_i^2\Big)^{1/2}, \quad \delta_{0\gamma} = \Big(\sum \gamma_i^2 b_i^2 X_i^2\Big)^{1/2}, \quad \delta_{0K} = \Big(\sum K_i^2 b_i^2 X_i^2\Big)^{1/2}. \tag{6.8}$$

Лемма 17. *Справедливо неравенство*

$$|\delta| \le (\tilde\theta - \theta)^2 \delta_{0K} + |\tilde\theta - \theta|(\delta_{0\gamma} + \delta_{0\beta}).$$

Доказательство. В силу свойств нормы имеем

$$|\delta| \le \Big(\sum (\tilde\gamma_i \tilde\beta_i - \gamma_i \beta_i \xi_i)^2\Big)^{1/2}$$
$$= \Big(\sum ((\tilde\gamma_i - \gamma_i)(\tilde\beta_i - \beta_i\xi_i) + \gamma_i(\tilde\beta_i - \beta_i\xi_i) + \beta_i\xi_i(\tilde\gamma_i - \gamma_i))^2\Big)^{1/2} \le \delta_{\beta\gamma} + \delta_\beta + \delta_\gamma, \tag{6.9}$$

где

$$\delta_{\beta\gamma} = \Big(\sum (\tilde\gamma_i - \gamma_i)^2 (\tilde\beta_i - \beta_i\xi_i)^2\Big)^{1/2},$$

$$\delta_\beta = \Big(\sum \gamma_i^2 (\tilde\beta_i - \beta_i\xi_i)^2\Big)^{1/2}, \quad \delta_\gamma = \Big(\sum (\tilde\gamma_i - \gamma_i)^2 \beta_i^2 \xi_i^2\Big)^{1/2}.$$

Далее, используя тождество

$$\tilde\beta_i - \beta_i\xi_i = (\tilde\theta - \theta)(\alpha_i + b_i\sigma_i\xi_i) = (\tilde\theta - \theta) b_i X_i$$

и неравенство (2.3), легко получить, что

$$\delta_\beta = |\tilde\theta - \theta|\delta_{0\gamma}, \quad \delta_\gamma \le |\tilde\theta - \theta|\delta_{0\beta}, \quad \delta_{\beta\gamma} \le |\tilde\theta - \theta|^2 \delta_{0K}. \tag{6.10}$$

Из (6.9) и (6.10) следует утверждение леммы.

Лемма 18. *Если выполнены условия теоремы* 10, *то* $\delta/B_\gamma \xrightarrow{p} 0$.

Доказательство. Поскольку $(|u|+|v|)^{1/2} \le |u|^{1/2}+|v|^{1/2}$, из неравенства Шварца и леммы 17 получаем, что

$$\mathbf{E}|\delta|^{1/2} \le (\mathbf{E}(\tilde\theta-\theta)^2)^{1/2}\big(\mathbf{E}\delta_{0K}^2\big)^{1/4} + (\mathbf{E}(\tilde\theta-\theta)^2)^{1/4}\big(\big(\mathbf{E}\delta_{0\gamma}^2\big)^{1/4} + \big(\mathbf{E}\delta_{0\beta}^2\big)^{1/4}\big). \quad (6.11)$$

С учетом определений (6.8) из этого соотношения и леммы 8 имеем

$$\mathbf{E}|\delta|^{1/2} \le \big(16d_c^2\big)^{1/2}\Big(\sum K_i^2\big(\alpha_i^2+b_i^2\sigma_i^2\big)\Big)^{1/4} + \big(16d_c^2\big)^{1/4}\Big(\sum \gamma_i^2\big(\alpha_i^2+b_i^2\sigma_i^2\big)\Big)^{1/4} + \big(16d_c^2\big)^{1/4}\Big(\sum K_i^2\beta_i^2\Big)^{1/4}.$$

Разделив полученное выражение на $B_\gamma^{1/2}$ и применив условия (3.13), (3.14), (3.9), нетрудно убедиться, что $\mathbf{E}(\delta/B_\gamma)^{1/2} \to 0$, откуда следует заключение леммы.

Лемма 19. *Если выполнено условие* (3.8), *то* $\delta_0/B_\gamma \xrightarrow{p} 0$.

Для доказательства этого утверждения нужно повторить вывод леммы 3, заменив в нем величины c_i на γ_i.

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы 10. Согласно леммам 12 и 13 распределение числителя в (6.7) сходится к стандартному нормальному. Знаменатель в (6.7) сходится по вероятности к единице в силу лемм 18 и 19. Для завершения доказательства остается заметить, что $\mathbf{P}(\tilde\theta^{**} \ne \theta^{**}) \to 0$ и $\mathbf{P}(\tilde d^{**} \ne d^{**}) \to 0$ ввиду соотношений (5.8), (6.6) и условия (3.7).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дрейпер Н., Смит Г.* Прикладной регрессионный анализ. М.: Статистика, 1973.
2. *Корниш-Боуден Э.* Основы математики для биохимиков. М.: Мир, 1983.
3. *Боровков А. А.* Математическая статистика. М.: Наука, 1984.
4. *Боровков А. А.* Теория вероятностей. М.: Наука, 1986.

Статья поступила 27 июня 1997 г.

г. Новосибирск