Теорема 3. *Пусть дана биортонормированная в* $L_{2,1}(G)$ *пара систем* $\{u_k(r)\}_{k=1}^{\infty}$ *и* $\{v_k(r)\}_{k=1}^{\infty}$, *одна из которых полна в* $L_{2,1}(G)$, *и пусть выполнены следующие условия:*

1) *системы* $\{u_k\}$ *и* $\{v_k\}$ *состоят из собственных и присоединенных функций оператора* (1), *отвечающих наборам* $\{\mu_k^2\}$ *и* $\{\bar{\mu}_k^2\}$,

2) *числа* $\{\mu_k\}$ *удовлетворяют условиям* (6).

Тогда необходимым и достаточным условием безусловной базисности в $L_{2,1}(G)$ *каждой из систем* $\{u_k\}$ *и* $\{v_k\}$ *является существование положительной константы* C *такой, что для любого номера* k

$$\|u_k\|_{L_{2,1}(G)} \cdot \|v_k\|_{L_{2,1}(G)} \leqslant C.$$

Для доказательства теоремы мы развиваем методы работы [1] в применении к вырождающемуся оператору (1).

Автор благодарит чл.-корр. АН СССР В.А. Ильина и В.В. Тихомирова за внимание к настоящей работе.

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Поступило 5 II 1987

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ильин В.А.* – ДАН, 1983, т. 273, № 5, с. 1048–1053. 2. *Жиляев А.И.* В кн.: Программное обеспечение вычислительных комплексов. М.: Изд-во МГУ, 1985, с. 191–195.

УДК 518.83 МАТЕМАТИКА

С.В. МАТВЕЕВ

СЛОЖНОСТЬ ТРЕХМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЙ И ИХ ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ В ПОРЯДКЕ ВОЗРАСТАНИЯ СЛОЖНОСТИ

(Представлено академиком С.П. Новиковым 2 II 1987)

Пусть M – компактное трехмерное многообразие с непустым краем. Полиэдр $P \subset \operatorname{Int} M$ называется спайном многообразия M, если некомпактное многообразие $M - P$ гомеоморфно $\partial M \times (0, 1)$. Спайн P называется почти-специальным, если линк каждой его точки гомеоморфен некоторому подполиэдру полиэдра Δ, где Δ – одномерный остов трехмерного симплекса. Точки, имеющие окрестность типа $\operatorname{Con} \Delta$, называются вершинами спайна P. Известно [1, 2], что любое компактное трехмерное многообразие имеет почти специальный спайн. При этом под спайном замкнутого многообразия M понимается спайн многообразия $M - \operatorname{Int} D$, где D – трехмерный шар в M.

Сложность $d(M)$ многообразия M определяется как число вершин его минимального (в смысле числа вершин) почти специального спайна. Таким образом, возникает отображение $d: \mathcal{M} \to Z_+$ множества $\mathcal{M}$ компактных трехмерных многообразий в полугруппу Z_+ неотрицательных целых чисел с операцией сложения.

Теорема 1. *Для любого целого числа* $k \geqslant 0$ *существует только конечное число различных замкнутых неприводимых трехмерных многообразий сложности* k.

Теорема 2. *Сложность связной суммы любых компактных трехмерных многообразий равна сумме их сложностей.*

Следует отметить, что отображения сложности, удовлетворяющие отдельно свойству конечности (теорема 1) и отдельно свойству аддитивности (теорема 2), были известны ранее. Например, число симплексов в минимальной триангуляции задает отображение сложности со свойством конечности, но без свойства аддитивности, а род Хегора – со свойством аддитивности, но без свойства конечности. Отображение сложности, совмещающее эти свойства, появляется здесь впервые.

Приведем краткую схему доказательства теоремы 1, ограничиваясь для простоты случаем ориентируемых многообразий. Назовем спайн P многообразия M специальным, если: 1) линк каждой его точки гомеоморфен окружности, окружности с диаметром или окружности с тремя радиусами (т.е. полиэдру Δ); 2) каждая компонента связности множества его неособых точек (т.е. точек первого типа) гомеоморфна открытой двумерной клетке. Из теоремы 4 работы [3] следует, что если M неприводимо и отлично от многообразий S^3 и RP^3, то минимальный почти-специальный спайн многообразия M является специальным. Множество особых точек специального спайна P является регулярным графом степени 4. Так как для каждого целого числа $k > 0$ существует только конечное число таких графов с k вершинами, то достаточно доказать конечность числа $n(\Gamma)$ специальных спайнов, имеющих данный граф Γ в качестве множества особых точек. Здесь мы применили теорему Каслера о том, что по своему специальному спайну трехмерное многообразие восстанавливается однозначно [1, 2]. Любой такой специальный спайн получается из k экземпляров полиэдра Con Δ склеиванием по триодам (букетам из трех отрезков с общим концом) по схеме, диктуемой графом Γ, с последующей приклейкой двумерных клеток. Имеющийся здесь произвол заключается только в выборе склеиваний пар триодов, отвечающих ребрам графа Γ. Так как пару триодов можно склеить 6 способами, то $n(\Gamma) \leqslant 6^{2k}$, где $2k$ – число ребер графа Γ.

В отношении теоремы 2 отметим, что неравенство $d(M_1 \neq M_2) \leqslant d(M_1) + d(M_2)$ очевидно. Доказательство обратного неравенства весьма нетривиально и опирается на теорию Хакена поверхностей, нормальных по отношению к данному разбиению многообразия на ручки [4].

Приведенные в доказательстве теоремы 1 соображения позволяют предложить алгоритм перечисления замкнутых ориентируемых неприводимых трехмерных многообразий, сложность которых не превосходит данного числа k. Сначала для каждого числа $n \leqslant k$ нужно перечислить все регулярные графы степени 4 с n вершинами. Затем для каждого такого графа Γ нужно перечислить все сконструированные на нем трехмерные многообразия (т.е. многообразия, имеющие специальные спайны с гомеоморфными графу Γ множествами особых точек) и отбросить все неориентируемые, незамкнутые и приводимые многообразия.

Указанный алгоритм реализован на ЭВМ. При этом разработан ряд приемов, позволяющих перебирать только ориентируемые многообразия и автоматически отбрасывать незамкнутые многообразия, приводимые многообразия и большинство многообразий с не минимальными специальными спайнами (т.е. большинство дубликатов). Перечислим некоторые из них. Пусть специальный спайн P замкнутого ориентируемого многообразия M сконструирован на графе Γ с n вершинами. Тогда:

а) число двумерных клеток спайна P обязано равняться $n+1$;

б) если граничная кривая одной из двумерных клеток спайна P проходит по одному из ребер графа Γ два раза в противоположных направлениях, то спайн P не минимален;

в) если граничная кривая одной из двумерных клеток спайна P имеет длину

не более 3, т.е. проходит не более чем по 3 вершинам и по каждой из них не более одного раза, то спайн P не минимален;

г) если граничные кривые двух двумерных клеток спайна P имеют длину 4, проходят по одному ребру графа Г и не имеют других общих точек, то спайн P не минимален.

Индентификация выданных машиной многообразий проводилась вручную. Приведем результаты перечисления, выполненного для многообразий сложности не более 6.

Теорема 3. *Число $N(d)$ замкнутых ориентируемых неприводимых трехмерных многообразий сложности $d \leqslant 6$ задается таблицей*

d	0	1	2	3	4	5	6
$N(d)$	3	2	4	7	14	31	74

Прокомментируем результаты расчета и ручной идентификации подробнее.

1. Многообразия сложности 0 таковы: трехмерная сфера S^3, трехмерное проективное пространство RP^3, линзовое пространство с параметрами (3.1). Приводимое многообразие $S^2 \times S^1$ также имеет сложность 0.

2. Все замкнутые ориентируемые многообразия сложности $d \leqslant 6$ лежат в рассмотренном А.Т. Фоменко [5] классе (H) изоэнергетических поверхностей интегрируемых гамильтоновых систем, совпадающем с классом многообразий, изученным Вальдхаузеном [6].

3. Все замкнутые ориентируемые неприводимые многообразия сложности $d \leqslant 5$ имеют эллиптическую структуру, т.е. представляются в виде фактор-пространств сферы S^3 по линейным действиям конечных групп. При этом в списке многообразий сложности $d \leqslant 6$ присутствуют представители всех четырех серий эллиптических многообразий (см. [7]). В частности, многообразия S^3/P_{24}, S^3/P_{48}, S^3/P_{120} имеют сложности 4, 5, 5 соответственно, многообразие S^3/Q_{4k} – сложность k, $2 \leqslant k \leqslant 6$, многообразие $S^3/D_{8(2n+1)}$ – сложность $n+3$, $1 \leqslant n \leqslant 3$. Сложности многообразий S^3/P'_{72} и S^3/P'_{216} равны 5 и 6 соответственно. Присутствуют также фактор-пространства сферы S^3 по действиям прямых произведений упомянутых групп на циклические. Самое простое из них (многообразие $S^3/Q_8 \times Z_3$) имеет сложность 4.

4. Все плоские замкнутые ориентируемые трехмерные многообразия имеют сложность 6 и сконструированы на одномерном остове октаэдра. На нем же сконструированы несколько многообразий, имеющих геометрическую структуру по образцу Nil.

5. Сложности тора $S^1 \times S^1 \times S^1$ и многообразия Уайтхеда, получающегося из сферы S^3 перестройкой Дена по зацеплению Уайтхеда с нулевыми оснащениями компонент, равны 6. Это единственные многообразия сложности $d \leqslant 6$, ранги первых групп гомологий которых не меньше 2.

6. Среди многообразий сложности $d \leqslant 6$ имеется ровно одна нетривиальная гомологическая сфера. Она сконструирована на одномерном остове четырех мерного симплекса и гомеоморфна пространству додекаэдра S^3/P_{120}.

7. Если сложность линзового пространства $L_{p,q}$, $p \geqslant 3$, не превосходит 6, то ее можно вычислить по формуле $d(L_{p,q}) = S(p/q) - 3$, где $S(p/q)$ – сумма всех полных частных разложения числа p/q в правильную цепную дробь. Множество особых точек минимального почти-специального спайна такого линзового пространства гомеоморфно "длинной восьмерке", т.е. графу, имеющему две петли, все остальные ребра которого двойные. Известно [3], что все многообразия, сконструированные на "длинной восьмерке", имеют род Хегора не больше 1.

8. Среди многообразий сложности $d \leqslant 6$ нет гиперболических многообразий. Самое простое гиперболическое многообразие имеет сложность $d = 9$.

Для числа $m(d) = \sum_{k=0}^{d} N(k)$ замкнутых ориентируемых неприводимых трехмерных многообразий сложности не больше $d > 0$ справедлива оценка $d \ln 2 \leqslant \leqslant \ln m(d) \leqslant d \ln 14d$. Оценка снизу получается путем подсчета различных линзовых пространств сложности $k \leqslant d$, оценка сверху – сопоставлением оценки числа регулярных графов степени 4 с $k \leqslant d$ вершинами и упомянутой выше оценки числа трехмерных многообразий, сконструированных на данном графе.

Следует отметить, что результаты перечисления полностью согласуются с результатами работ [8–10], где перечисляются многообразия сложности $d \leqslant 2$, сложности $d \leqslant 5$ и гомологические сферы сложности $d \leqslant 5$ соответственно.

Автор благодарен участникам семинара М.М. Постникова и семинара А.Т. Фоменко в МГУ за полезное обсуждение.

Челябинский государственный университет

Поступило 3 II 1987

ЛИТЕРАТУРА

1. *Casler B.G.* – Proc. Amer. Math. Soc., 1965, vol. 16, p. 559–566. 2. *Матвеев С.В.* – Матем. сб., 1973, т. 92 (134), № 2, 282–293. 3. *Матвеев С.В.* – Вестн. МГУ. Математика, механика, 1975, т. 30, № 3, с. 11–20. 4. *Haken W.* – Acta Math., 1961, vol. 105, p. 245–375. 5. *Фоменко А.Т.* – Изв. АН СССР. Сер. матем, 1986, т. 50, №6, с. 1276–1307. 6. *Waldhausen F.* – Invent. Math., 1967, vol. 3, № 4, p. 308–333; vol. 4, № 3, p. 88–117. 7. *Milnor J.* – Amer. J. Math., 1957, vol. 79, p. 623–630. 8. *Ikeda H., Inoue Y.* – Kobe J. Math., 1985, vol. 2, № 2, p. 169–1186. 9. *Матвеев С.В., Савватеев В.В.* — Coll. Math., 1974, vol. 32, № 1, p. 83–97. 10. *Gillman D., Laszlo P.* – Topol. and Appl., 1983, vol. 16, № 1, p. 33–41.

УДК 517.995.8 МАТЕМАТИКА

Т.А. СУРГУЛАДЗЕ

О ПОВЕДЕНИИ ПРИ БОЛЬШИХ ЗНАЧЕНИЯХ ВРЕМЕНИ РЕШЕНИЙ ОДНОМЕРНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

(*Представлено академиком С.П. Новиковым 19 I 1987*)

Цель настоящей статьи – изучение асимптотического поведения при $t \to \infty$ и $|x| < b$ решений следующих задач:

$$(1)\quad \begin{aligned} &u_{tt} - u_{xx} + q(x)u = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbf{R}, \\ &u_{|t=0} = 0, \quad u_{t|t=0} = f(x), \quad x \in \mathbf{R}; \end{aligned}$$

$$(2)\quad \begin{aligned} &u_{tt} - u_{xx} + q(x)u = 0, \quad x \in \mathbf{R}, \quad x > 0, \quad t > 0, \\ &u_{|t=0} = 0, \quad u_{t|t=0} = f(x), \quad x \geqslant 0, \quad x \in \mathbf{R}; \quad u|_{x=0} = 0, \quad t \geqslant 0, \end{aligned}$$

а также аналогичных задач, в которых начальные данные нулевые, а правая часть в уравнении равна $f(x)e^{-i\omega t}$, $\omega > 0$ вещественно. Здесь функция q периодична