4. P. Erdös, A. Renyi, Additive properties of random sequences of positive integers, Acta Arithmetica 6 (1960), стр. 83—110.
5. P. Erdös, On a problem of Sidon in additive number theory, Acta Szeged (1954), стр. 255—259.
6. P. Erdös, W. H. J. Fuchs, On a problem of additive number theory, Journ. London Math. Soc. 31 (1956), стр. 67—73.
7. E. Landau, Vorlesungen über Zahlentheorie, т. II.
8. A. Stöhr, Gelöste und ungelöste Fragen über Basen der natärlichen Zahlenreihe, Journ. fur reine und angew. Math. 194 (1955), стр. 40—65 и 111—140.
9. Moser, Acta Arithmetica 6 (1960).

П. Эрдёш (Венгрия)

2. **Е. В. Бет, А. Тарский.** *Равносторонний треугольник — основное понятие геометрии в пространстве.*

В основе каждого дедуктивного построения геометрии лежат некоторые первичные неопределяемые понятия и неопределяемые же отношения между ними; эти понятия и отношения должны удовлетворять системе аксиом, которую можно, если угодно, принять за косвенное определение основных понятий и отношений (см., например, [5], [6]). При этом сами исходные неопределяемые понятия могут выбираться по-разному даже при построении одной и той же геометрической системы, например, обыкновенной геометрии Евклида. Так, в аксиоматике Гильберта [5] основными понятиями являются *точки, прямые* и *плоскости,* а основными отношениями между ними — отношения: *принадлежит* (отношение, связывающее точку и прямую или точку и плоскость), *между* (отношение, связывающее тройку точек, принадлежащих одной прямой) и *конгруентен* [отношение, связывающее два отрезка или два угла [1])]. Популярен также вариант аксиоматики Гильберта (идущий от Шура), в котором вместо отношения «конгруентен» введено новое неопределяемое понятие — *движение*; можно также вместо произвольных движений ограничиться одними *симметриями* плоскости относительно прямой, считая их неопределяемыми понятиями (это впервые было отмечено Виллерсом) и т. д.

После установления в конце прошлого века принципиальной возможности строго дедуктивного построения геометрии на аксиоматической основе, дальнейшая работа в области оснований геометрии сводилась главным образом к попыткам упрощения и усовершенствования существующих систем аксиом. Особое внимание, естественно, привлекал вопрос о возможностях упрощения аксиоматики за счет сокращения списка вводимых аксиом; представляет также интерес и вопрос о возможном уменьшении числа исходных понятий и отношений. Этим последним вопросом много занимался, в частности, известный американский логик А. Тарский, его ученики и сотрудники.

---

[1]) Понятия *отрезок* и *угол* могут быть независимо от понятия «конгруентен» определены через основные понятия и отношения с использованием относящихся к ним аксиом.

При построении евклидовой геометрии естественно принять в качестве единственного неопределяемого понятия *точку*; при этом прямые и плоскости определяются как некоторые геометрические места точек. Хочется одновременно потребовать, чтобы и число неопределяемых отношений между точками было возможно меньшим; лучше всего если удастся обойтись единственным подобным отношением.

Серьезные успехи в этом отношении были достигнуты уже давно. В работе А. Линденбаума и А. Тарского [3], опубликованной в 1936 г., было показано, что одного бинарного отношения между точками (т. е. отношения связывающего две точки) никак не достаточно для полного построения всей геометрии. Что же касается до тернарных отношений (отношений между тремя точками), то одно такое отношение было указано еще в 1908 г. одним из создателей современного аксиоматического метода в геометрии — итальянским математиком М. Пиери [4]: это — отношение $J(A, B, C)$, означающее, что треугольник ABC равнобедренный с вершиной A (может быть вырожденный), т. е. что $AB = AC$.

Приведенное здесь описание отношения $J(A, B, C)$ показывает, ка́к можно определить это отношение при помощи основных понятий и отношений аксиоматики Гильберта. Но замечательно, что и, обратно, *все* основные понятия и отношения гильбертовской аксиоматики можно выразить через понятие *точка* и отношение $J(A, B, C)$; это и доказывает, что одного неопределяемого понятия *точка* и одного тернарного отношения $J(A, B, C)$ достаточно для построения всей евклидовой геометрии. В самом деле, *плоскость* можно определить как совокупность (геометрическое место) точек M, удовлетворяющих отношению $J(M, A, B)$, где A и B — две какие-то фиксированные точки, выбор которых определяет плоскость, а *прямую* — как совокупность точек M таких, что выполняются сразу два отношения $J(M, A, B)$ и $J(M, B, C)$; эти определения снимают также вопрос о каком-то специальном определении отношения *принадлежит*. Далее понятие *между*, которое должно иметь смысл лишь для трех точек A, B, C, принадлежащих одной прямой, можно определить, например, так: «точка B лежит *между* точками A и C, если существуют такие точки M и N, что $J(M, A, B)$ и $J(C, A, M)$, $J(N, B, C)$ и $J(A, C, N)$» (рис. 1). Наконец, два *отрезка* AB и CD мы назовем *конгруентными*, если существуют какие-то точки $M_1, M_2, \ldots, M_k$ такие, что выполняются $J(A, B, M_1)$, $J(M_1, A, M_2)$, $J(M_2, M_1, M_3)$, $\ldots$, $J(M_{k-1}, M_{k-2}, M_k)$, $J(M_k, C, M_{k-1})$, $J(C, D, M_k)$. Аналогично можно определить и *конгруентность углов* [исходя из того, что $\angle ABC$ конгруентен $\angle ACB$, если $J(A, B, C)$].

Некоторым недостатком отношения $J(A, B, C)$ является его несимметричный характер: из $J(A, B, C)$ не вытекает $J(B, A, C)$. Сравнительно недавно (в 1956 г.) Е. В. Бет и А. Тарский [1] заметили,

что в *случае геометрии в пространстве* [но не на плоскости!] *можно вместо отношения* $J(A, B, C)$ (несимметричного) *использовать отношение* $E(A, B, C)$ (симметричное), *означающее, что точки* A, B, C (различные или совпадающие) *являются вершинами равностороннего треугольника,* т. е. что $J(A, B, C)$ и $J(B, A, C)$.

Доказательство того, что в геометрии в пространстве отношения $J(A, B, C)$ и $E(A, B, C)$ в определенном смысле «равносильны», чрезвычайно просто. Выше мы уже определили $E(A, B, C)$ через $J(A, B, C)$; определим теперь $J(A, B, C)$ через $E(A, B, C)$, например, следующим образом: $J(A, B, C)$ означает существование таких двух точек M и N, что $E(A, B, M)$, $E(A, M, N)$ и $E(A, N, C)$ (см. рис. 2, где треугольники ABM, AMN, ANC равносторонние). Однако легко видеть, что на плоскости нельзя сопоставить каждому равнобедренному треугольнику ABC подобную цепь равносторонних треугольников ABM, AMN, ANC; таким образом, наше доказательство равносильности отношений $J(A, B, C)$ и $E(A, B, C)$ не сохраняет силу в случае плоскости.

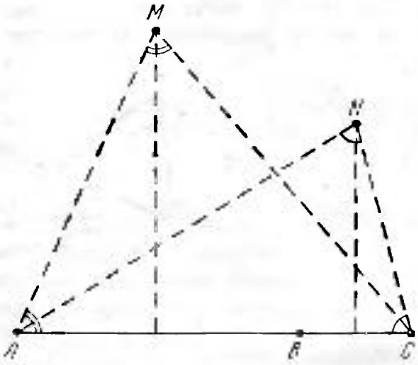

Рис. 1.

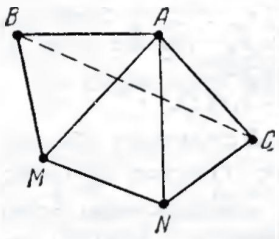

Рис. 2.

Из этого, однако, еще не следует, что никаким другим способом нельзя в геометрии на плоскости определить отношение $J(A, B, C)$ через отношение $E(A, B, C)$. Невозможность этого Е. В. Бет и А. Тарский доказывают довольно тонким построением. А именно, они показывают *существование такого точечного взаимно однозначного преобразования плоскости, которое не является движением* [и, следовательно, не сохраняет евклидову геометрию плоскости; в частности, три точки A, B, C такие, что $J(A, B, C)$, могут перейти при этом в три точки A', B', C', для которых отношение $J(A', B', C')$ не имеет места], *но которое переводит каждый равносторонний треугольник снова в равносторонний,* т. е. сохраняет отношение $E(A, B, C)$.

Описание этого преобразования $A' = f(A)$ в работе [1] существенно неэффективно и опирается на так называемую аксиому

выбора Е. Цермело[1]). А именно: отождествим совокупность точек плоскости с множеством комплексных чисел и выделим из этого множества подмножество A всех комплексных чисел вида $p+q\sqrt{3}$, где p и q — рациональные комплексные числа (т. е. числа вида r_1+ir_2, где r_1, r_2 — рациональные вещественные числа). С помощью аксиомы выбора можно сопоставить множеству A комплексных чисел другое множество B комплексных чисел такое, что *всякое комплексное число z может быть представлено (и притом единственным образом) в виде конечной суммы*

$$z=a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_kb_k,$$

где числа a_1, a_2, ..., a_k принадлежат множеству A, а числа b_1, b_2, ..., b_k — множеству B; при этом множество B заведомо содержит число 1, а также хоть одно отличное от 1 вещественное число r и какое-нибудь невещественное число m (ср. [7]). Пусть теперь преобразование f оставляет на месте все числа a и как-то переставляет числа b; исходя отсюда, уже можно распространить f на все множество комплексных чисел при помощи равенства

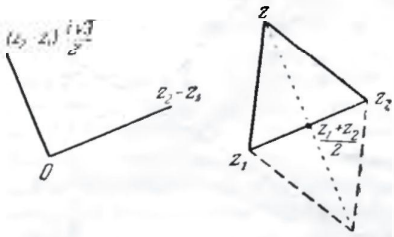

Рис. 3.

$$f(z)=a_1f(b_1)+a_2f(b_2)+\ldots+a_kf(b_k).$$

В таком случае, если какие-либо числа z, z_1, z_2, ..., z_k были связаны соотношением $z=a_1z_1+a_2z_2+\ldots+a_kz_k$ (где все числа a_i принадлежат множеству A), то, очевидно, также

$$f(z)=a_1f(z_1)+a_2f(z_2)+\ldots+a_kf(z_i).$$

Определим теперь преобразование f множества B следующим образом: $f(b)=b$, *если число b отлично от r и от m*; $f(m)=r$, $f(r)=m$.

Тем самым мы приходим к определенному преобразованию всего множества комплексных чисел, т. е. всей плоскости. Нетрудно видеть, что это преобразование переводит любые три точки (три комплексных числа) z, z_1, z_2, являющиеся вершинами равностороннего треугольника, снова в вершины равностороннего треугольника — это следует из того, что, как легко проверить, наши три точки являются вершинами равностороннего треугольника тогда и только тогда, когда (рис. 3) $z=\frac{z_1+z_2}{2}\pm(z_2-z_1)\,i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$, т. е. $z=z_1\alpha+z_2\beta i$ или $z=z_1\beta+z_2\alpha i$, где числа $\alpha=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ и $\beta=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ принадлежат

[1]) Об аксиоме Цермело см., например, П. С. Александров, Введение в общую теорию множеств и функций, М.— Л., 1948.

множеству A. Еще проще убедиться в том, что найдется равнобедренный треугольник, который наше преобразование переводит в неравнобедренный треугольник. Это вытекает, например, из существования такой точки z, что $J(z, 0, 1)$ и $J(z, 0, m)$, и отсутствия такой точки $f(z)$, для которой $J(f(z), f(0), f(1))$ и $J(f(z), f(0), f(m))$ или иначе $J(f(z), 0, 1)$ и $J(f(z), 0, r)$ (рис. 4).

Рис. 4.

Это рассуждение и доказывает, что отношение $E(A, B, C)$ недостаточно для построения геометрии на плоскости; в частности, посредством него невозможно определить отношение $J(A, B, C)$. Вообще, *отношение* $E(A, B, C)$ *достаточно для обоснования евклидовой геометрии при числе измерений* $n \geqslant 3$, подобно тому как *отношение Пиери* $J(A, B, C)$ *может быть положено в основу евклидовой геометрии при любом числе измерений* $n \geqslant 2$. (А. Линдебаум указал, что этого отношения недостаточно для обоснования евклидовой геометрии на прямой.)

Укажем еще, что в том же журнале, где напечатана статья Е. В. Бета и А. Тарского, опубликована также тесно связанная с ней работа другого американского логика — Д. Скотта [2], в которой построено *симметричное тернарное отношение между точками, которое может быть положено в основу евклидовой геометрии при любом числе измерений* $n \geqslant 2$ (т. е. пригодно и в случае плоскости) — это есть отношение $R(A, B, C)$, означающее, что (различные) точки A, B, C являются вершинами прямоугольного треугольника (т. е. что $AB^2 + AC^2 = BC^2$ или $AB^2 + BC^2 = AC^2$ или $AC^2 + BC^2 = AB^2$).

Литература

1. E. W. Beth, A. Tarski, Equilaterality as the only primitive notion of Euclidean geometry, Proc. Konikl. nederl. akad. Wetensch. A. **59**, № 4, стр. 462—467; Indagationes math. **18**, № 4 (1956), стр. 462—467.
2. D. Scott, Symmetric primitive of Euclidean geometry, там же, стр. 456—461.
3. A. Lindebaum, A. Tarski, Über die Beschränkheit der Ausdrucksmittel deductive Theorien, Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquims **7** (1936), стр. 15—22.
4. M. Pieri, La geometrie elementare institute sulla nozioni dil «puto» e «sfera», Memorie dil Mathematica e di Fisica delle Societa Italiana della Schieze, Ser. 3. **15** (1908), стр. 345—450.
5. Д. Гильберт, Основания геометрии, М.— Л., 1948.
6. П. К. Рашевский, Геометрия и ее аксиоматика, «Математическое просвещение», вып. 5 (1960), стр. 73—98.
7. Ю. М. Гайдук, Принцип полной математической индукции, его эквиваленты и обобщения, Математика в школе, 1950, № 2, стр. 1 — 20.

И. М. Яглом