О. Н. Гладкая, Ю. В. Козаченко, Условия равномерной сходимости некоторых случайных рядов,

Матем. заметки, 1979, том 26, выпуск 1, 149–155

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 26, № 1 (1979)

УСЛОВИЯ РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ НЕКОТОРЫХ СЛУЧАЙНЫХ РЯДОВ

О. Н. Гладкая, Ю. В. Козаченко

Пусть $\{\Omega, \mathfrak{B}, \mathsf{P}\}$ — вероятностное пространство. Рассмотрим ряд

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n(\omega) f_n(x), \tag{1}$$

где $\omega \in \Omega$, $\mathsf{M}\xi_n = 0$, $\mathsf{M}\xi_n\xi_m = r_{nm}$; $f_n(x)$, $-\infty < x < \infty$,— функции такие, что $f_n(z)$ как функции комплексной переменной являются целыми трансцендентными функциями экспоненциального типа с показателем λ_n и для которых $\sup\limits_{-\infty<x<\infty} |f_n(x)| = A_n < \infty$. Следуя [1, стр. 182], будем говорить, что $f_n(g) \in B_{\lambda_n}$. Предполагается, что $\lambda_n \to \infty$ при $n \to \infty$ и $\lambda_k \leqslant \lambda_m$ при $k \leqslant m$. Пусть

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} r_{nm} f_n(x) f_m(x) < \infty. \tag{2}$$

Условие (2) обеспечивает сходимость в среднем квадратичном, а значит, и по вероятности ряда (1) для всех x. Пусть

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k f_k(x).$$

ЛЕММА. *Для любой функции* $r(x) \in B_\sigma$, $\sigma < \infty$, *такой, что* $\sup\limits_{-\infty<x<\infty} |r(x)| < 1$ и $\int_{-\infty}^{\infty} |r(x)|^2\,\mathrm{d}x < \infty$, *с вероятностью единица выполняются соотношения*

$$\sup_{-\infty<x<\infty} S_n^2(x) r^2(x) \leqslant C(\lambda_n + \sigma) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} [S_n(x) r(x)]^2\,\mathrm{d}x, \tag{3}$$

$$\exp\{\sup_{-\infty<x<\infty} S_n^2(x)\, r^2(x)\} - 1 \leqslant$$

$$\leqslant \tilde{C}(\lambda_n+\sigma)\int_{-\infty}^{\infty} r^2(x)\cdot\exp\{S_n^2(x)/(1-\theta)^2\}\,dx, \qquad (4)$$

где $C>0$, $\tilde{C}>0$, $0<\theta<1$,— *некоторые постоянные.*

Доказательство. Обозначим $R_n(x) = S_n(x)\, r(x)$, $R_n(x) \in B_{\lambda_n+\sigma}$. Пусть $M_n = \sup_{-\infty<x<\infty} |R_n(x)|$. Так как с вероятностью единица $R_n(x)\to 0$, при $x\to\infty$, то существует ω-множество Ω', $\mathsf{P}(\Omega')=1$, что для $\omega\in\Omega'$ найдется точка $-\infty<x_0(\omega)<\infty$ такая, что $|R_n(x_0(\omega))| = M_n$. Пусть, например, для некоторого $\omega\in\Omega'$ $R_n(x_0(\omega))<0$. Тогда по формуле конечных приращений для $x>x_0$ имеем

$$R_n(x_0) - R_n(x) = R_n'(c)(x_0-x),\ x_0<c<x.$$

Так как $M_n = -R_n(x_0)$, то

$$M_n + R_n(x) = R_n'(c)(x-x_0). \qquad (5)$$

По неравенству Бернштейна [1, стр. 183]

$$|R_n'(c)| \leqslant (\lambda_n+\sigma)\, M_n.$$

Тогда для $x_0<x<x_0+\theta(\lambda_n+\sigma)^{-1}$, $0<\theta<1$, из (5) получаем, что

$$M_n \leqslant |R_n(x)|\,(1-\theta)^{-1}.$$

Отсюда

$$\theta(\lambda_n+\sigma)^{-1}\cdot M_n^2 = \int_{x_0}^{x_0+\theta(\lambda_n+\sigma)^{-1}} M_n^2\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_{x_0}^{x_0+\theta(\lambda_n+\sigma)^{-1}} |R_n(x)|^2(1-\theta)^{-2}\,dx \leqslant$$

$$\leqslant (1-\theta)^{-2}\int_{-\infty}^{\infty}|R_n(x)|^2\,dx \qquad (6)$$

и

$$\theta(\lambda_n+\sigma)^{-1}(\exp\{M_n^2\}-1) =$$

$$= \int_{x_0}^{x_0+\theta(\lambda_n+\sigma)^{-1}} (\exp\{M_n^2\}-1)\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_{x_0}^{x_0+\theta(\lambda_n+\sigma)^{-1}} r^2(x)\exp\{S_n^2(x)(1-\theta)^{-2}\}\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} r^2(x)\cdot\exp\{S_n^2(x)(1-\theta)^{-2}\}\,dx. \qquad (7)$$

Если положить $\tilde{C} = \theta^{-1}(1-\theta)^{-2}$, а $\tilde{\tilde{C}} = \theta^{-1}$, то из (6) следует (3), а из (7)—(4).

ТЕОРЕМА 1. *Пусть выполняется условие*

$$\text{A)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} r_{mn}\varphi(\lambda_n)\varphi(\lambda_m) b_{nm} < \infty,$$

где

$$b_{nm} = \int_{-\infty}^{\infty} r^2(x) f_n(x) f_m(x)\,\mathrm{d}x,$$

$\varphi(\lambda) > 0$ — *монотонно неубывающая функция, для которой*

$$\int_C^{\infty} \lambda^{1/2}\,\mathrm{d}(-1/\varphi(\lambda)) < \infty, \qquad C > 0$$

(например, $\varphi(\lambda) = \lambda^{1/2+\varepsilon}$, $\varphi(\lambda) = \lambda^{1/2}\ln^{1+\varepsilon}\lambda$, $\varepsilon > 0, \ldots$). *Тогда*

$$\mathsf{P}\{\sup_{-\infty<x<\infty} |r(x) S_n(x) - r(x) S(x)| > \varepsilon\} \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Доказательство. Обозначим

$$\tilde{R}(x) = r(x)\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k f_k(x)\varphi(\lambda_k),$$

$$\tilde{R}_n(x) = r(x)\cdot\sum_{k=1}^{n}\xi_k f_k(x)\varphi(\lambda_k),$$

$$c_k = \varphi^{-1}(\lambda_k) - \varphi^{-1}(\lambda_{k+1}).$$

Так как

$$R_m(x) - R_r(x) = \sum_{k=r+1}^{m} c_k\tilde{R}_k(x) - \\ - \tilde{R}_r(x)/\varphi(\lambda_{r+1}) + \tilde{R}_m(x)/\varphi(\lambda_{m+1}), \qquad (8)$$

$m > r$, то из (3) следует, что

$$\mathsf{M}(\sup_{-\infty<x<\infty} |R_m(x) - R_r(x)|)^2 \leqslant \\ \leqslant \mathsf{M}\left[\sum_{k=r+1}^{m} c_k(\lambda_k+\sigma)^{1/2}\theta_k + (\lambda_r+\sigma)^{1/2}/\varphi(\lambda_{r+1})\theta_r + \right. \\ \left. + ((\lambda_m+\sigma)^{1/2}/\varphi(\lambda_{m+1}))\theta_m\right]^2,$$

где

$$\theta_l = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{R}_l(x)|^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}.$$

По теореме Фубини и из условия А) получаем, что

$$\mathsf{M}\theta_l^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathsf{M}\,|\,\widetilde{R}_l(x)\,|^2\,\mathrm{d}x =$$

$$= \sum_{k=1}^{l} \sum_{m=1}^{l} r_{km} b_{km} \varphi(\lambda_k)\,\varphi(\lambda_m) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} r_{km} b_{km} \varphi(\lambda_k)\,\varphi(\lambda_m) = C.$$

Отсюда

$$\mathsf{M}\theta_l\theta_k \leqslant (\mathsf{M}\theta_l^2 M\theta_k^2)^{1/2} \leqslant C.$$

Тогда

$$\mathsf{M}\,(\sup_{-\infty<x<\infty} |\,R_m(x) - R_r(x)\,|\,)^2 \leqslant$$

$$\leqslant C \left\{ \left[\sum_{k=r+1}^{m} c_k (\lambda_k + \sigma)^{1/2} \right]^2 + \right.$$

$$+ 2 \sum_{k=r+1}^{m} c_k (\lambda_k + \sigma)^{1/2} \left[\frac{(\lambda_r + \sigma)^{1/2}}{\varphi(\lambda_{r+1})} + \frac{(\lambda_m + \sigma)^{1/2}}{\varphi(\lambda_{m+1})} \right] +$$

$$\left. + \frac{\lambda_r + \sigma}{\varphi^2(\lambda_{r+1})} + \frac{\lambda_m + \sigma}{\varphi^2(\lambda_{m+1})} + \frac{2(\lambda_r + \sigma)(\lambda_m + \sigma)}{\varphi(\lambda_{r+1})\,\varphi(\lambda_{m+1})} \right\} \to 0$$

при m, $r \to \infty$, так как

$$\sum_{k=r+1}^{m} c_k (\lambda_k + \sigma)^{1/2} \leqslant \int_{\lambda_{r+1}}^{\lambda_m} (\lambda + \sigma)^{1/2}\,\mathrm{d}\,(-1/\varphi(\lambda)) \to 0$$

при m, $r \to \infty$ в силу условия А).

Применение неравенства Чебышева завершает доказательство.

Следствие. *Пусть в* (1) *случайные величины* ξ_n *некоррелированы. Тогда теорема* 1 *остается справедливой, если условие сходимости ряда в* А) *заменить условием*

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_{nn} \varphi^2(\lambda_n)\,A_n^2 < \infty.$$

ТЕОРЕМА 2. *Пусть в* (1) *случайные величины* ξ_n *имеют совместные гауссовские распределения и выполняется условие*

$$\text{B)} \qquad \sum_{n=1}^{l} \sum_{m=1}^{k} r_{nm} \psi(\lambda_n)\,\psi(\lambda_m)\,f_n(x)\,f_m(x) < K$$

для всех l, k, $-\infty < x < \infty$, *где* $\varphi(\lambda) > 0$ — *монотонно неубывающая функция и*

$$\int_c^{\infty} \ln^{1/2} u\,\mathrm{d}\,(-1/\psi(u)) < \infty, \qquad c > 0$$

(например, $\psi(u) = \ln^{1/2+\varepsilon} u$, $\varepsilon > 0$). Тогда

$$\mathsf{P}\{\sup_{-\infty<x<\infty} |r(x) S_n(x) - r(x) S(x)| > \varepsilon\} \to 0$$

при $n \to \infty$, где $r(x)$ — функция, определенная в условии леммы.

Замечание. Вместо выполнения условия В) можно потребовать, чтобы ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} r_{nm} \psi(\lambda_n) \psi(\lambda_m) f_n(x) f_m(x)$$

сходился равномерно по $-\infty < x < \infty$.

Доказательство. Из (4) следует

$$\overline{M}_n^2/(4K^2) \leqslant$$

$$\leqslant \ln\left((\lambda_n + \sigma) \theta^{-1} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{\overline{S}_n^2(x)/(4K^2)\} r^2(x)\, dx + 1\right), \qquad (9)$$

где

$$\overline{S}_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k f_k(x) \psi(\lambda_k),$$

$$\overline{M}_n = \sup_{-\infty<x<\infty} |\overline{R}_n(x)| = \sup_{-\infty<x<\infty} |r(x) \overline{S}_n(x)|.$$

Из (8), где $\varphi(\lambda)$ заменяем на $\psi(\lambda)$, и (9) получаем

$$\mathsf{M}(\sup_{-\infty<x<\infty} |R_m(x) - R_r(x)|)^2 \leqslant \mathsf{M}\Bigg\{2K \sum_{k=r+1}^{m} \bar{c}_k \cdot$$

$$\cdot \left[\ln\left(\frac{\lambda_k + \sigma}{\theta} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} r^2(x) \exp\left\{\frac{\overline{S}_k^2(x)}{(1-\theta)^2 4K^2}\right\} dx + 1\right)\right]^{1/2} +$$

$$+ (2K/\psi(\lambda_r)) \cdot$$

$$\cdot \left[\ln\left(\frac{\lambda_r + \sigma}{\theta} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} r^2(x) \cdot \exp\left\{\frac{\overline{S}_r^2(x)}{(1-\theta)^2 4K^2}\right\} dx + 1\right)\right]^{1/2} +$$

$$+ (2K/\psi(\lambda_m)) \cdot$$

$$\cdot \left[\ln\left(\frac{\lambda_m + \sigma}{\theta} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} r^2(x) \cdot \exp\left\{\frac{\overline{S}_m^2(x)}{(1-\theta)^2 4K^2}\right\} dx + 1\right)\right]^{1/2} \Bigg\}^2,$$

$$\bar{c}_k = \psi^{-1}(\lambda_k) - \psi^{-1}(\lambda_{k+1}).$$

Далее поступаем так же, как при доказательстве теоремы 1, используя неравенство

$$\mathsf{M}\ln\left(\frac{\lambda_k+\sigma}{\theta}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}r^2(x)\exp\left\{\frac{\overline{S}_k^2(x)}{(1-\theta)^2 4K^2}\right\}\mathrm{d}x+1\right)\leqslant$$
$$\leqslant\ln\left(\frac{\lambda_k+\sigma}{\theta}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}r^2(x)\,\mathsf{M}\exp\left\{\frac{\overline{S}_k^2(x)}{(1-\theta)^2 4K^2}\right\}\mathrm{d}x+1\right)$$

и то, что можно подобрать такое θ, что

$$\mathsf{M}\exp\left\{\frac{\overline{S}_k^2(x)}{(1-\theta)^2 4K^2}\right\}<c,$$

c — постоянная, не зависящая от x.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть в* (1) *случайные величины* ξ_n *независимы и выполняется условие*

$$\text{C)}\qquad \sum\nolimits_{n=1}^{\infty}A_n^2 r_{nn}\psi^2(\lambda_n)<\infty,$$

где функция $\psi(\lambda)$ *определена в условиия* B). *Тогда* $r(x)\,S_n(x)\to r(x)\,S(x)$ *при* $n\to\infty$ *равномерно по* $-\infty<x<\infty$ *с вероятностью единица.*

Доказательство. Обозначим через $N(x)=\sup\limits_{n\geqslant 1}|S_n(x)|$. Из одной леммы Ханта [2, лемма 1] следует, что найдется такая случайная величина $\varkappa$, $\varkappa>0$, с вероятностью единица, что для всех $t>0$

$$\mathsf{M}\exp\{tN^2(x)\}\,\varkappa<B,$$

где B — некоторая постоянная.

По теореме Фубини

$$\mathsf{M}\varkappa\int_{-\infty}^{\infty}r^2(x)\exp\{tS_n^2(x)\}\,\mathrm{d}x=$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}r^2(x)\,\mathsf{M}\exp\{tS_n^2(x)\}\,\varkappa\,\mathrm{d}x\leqslant$$
$$\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}r^2(x)\,\mathsf{M}\exp\{tN^2(x)\}\,\varkappa\,\mathrm{d}x\leqslant B\int_{-\infty}^{\infty}r^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

Тогда существует конечная с вероятностью единица случайная величина $c(\theta)$, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}r^2(x)\exp\{S_n^2(x)/(1-\theta)^2\}\,\mathrm{d}x\leqslant c(\theta),$$

Отсюда и из (4) следует, что с вероятностью единица

$$\exp\{\sup_{-\infty<x<\infty} S_n^2(x)\, r^2(x)\} - 1 = \exp\{M_n^2\} - 1 \leqslant$$
$$\leqslant \tilde{c}(\theta)(\lambda_n + \sigma), \qquad \tilde{c}(\theta) = \tilde{C}\cdot c(\theta). \quad (10)$$

Из (10) получаем, что

$$\exp\{M_n^2 - 2\ln(\lambda_n + \sigma)\} \leqslant \tilde{c}(\theta)(\lambda_n + \sigma)^{-1} + (\lambda_n + \sigma)^{-2}.$$

Следовательно, при достаточно большом λ_n с вероятностью единица $M_n \leqslant K \ln^{1/2}(\lambda_n + \sigma)$.

Далее, теорема доказывается как теорема 2 в [3], т. е. следует из формулы (8).

Следствие 1. *Пусть выполнено одно из условий* A), B), C) *для функции* $r(x)$ *такой, что* $r(x) > 0$, $-\infty < x < \infty$. *Тогда случайная функция* $S(x)$ *выборочно непрерывна с вероятностью единица для* $-\infty < x < \infty$ (в качестве $r(x)$ можно взять функцию $r(x) = (x - \sin x)/x^3$).

Это следствие очевидно, так как в случае C) имеем равномерную сходимость ряда, а в случаях A) и B) можно выбрать подпоследовательность частичных сумм, сходящуюся равномерно.

Следствие 2. *Пусть выполнено условие* A) *либо условие* B) *для* $r(x) > 0$, $a \leqslant x \leqslant b$. *Тогда* $S_n(x) \to S(x)$ *при* $n \to \infty$ *по вероятности равномерно по* $a \leqslant x \leqslant b$. *Если выполнено условие* C), *то для любых* $a < b$ $S_n(x) \to S(x)$ *при* $n \to \infty$ *равномерно по* $a \leqslant x \leqslant b$ *с вероятностью единица.*

Киевский государственный университет

Поступило 3.VI.1977

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ахиезер Н. И., Лекции по теории аппроксимации, М., «Наука», 1965.

[2] Hunt G. A., Random fourier transforms, Trans. Amer. Math. Soc., 71 (1951), 38—69; русский перевод: Математика, 2, № 6 (1958), 87—114.

[3] Козаченко Ю. В., Локальные свойства сумм некоторых случайных рядов, Матем. заметки, 3, № 3 (1968), 261—269.