

# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Глазков, В. И. Сахаров, Р. Ф. Талипов,  
Решение задач сверхзвукового обтекания затуп-  
ленных тел вязким газом на основе полных и  
упрощенных уравнений Навье–Стокса,  
*Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*,  
1996, номер 2, 62–69

<https://www.mathnet.ru/vmumm1994>

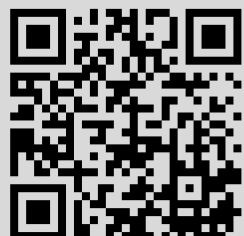
Использование Общероссийского математического портала Math-  
Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользова-  
тельским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.173

28 апреля 2025 г., 12:49:56



$$\text{ма } Q = \frac{2|a|^{2f+2}}{|A|^4} \left\{ 2 \frac{(A \cdot u)^2}{|A|^2} - 1 \right\} (A \cdot n)^2 > 0, \text{ если } 0,5 < \frac{(A \cdot u)^2}{|A|^2} < 1.$$

Можно показать, что эти условия выполняются при достаточно малых  $|A \cdot n| \neq 0$ , зависящих от значения  $f$ . Таким образом, все среды с  $f \neq -1$  являются неустойчивыми.

В случае 7, если векторы  $A$  и  $a$  не коллинеарны, мы предположим, что векторы  $u$  и  $n$  принадлежат плоскости векторов  $A$ ,  $a$ , угол между которыми пусть равен  $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ . Тогда при  $P=0$  форма  $Q$  принимает два значения  $Q = |a|^2 |A|^2 2 \sin \alpha (\sin \alpha \pm 1)$  и, таким образом, знакопеременна. Случай  $\alpha=0$  всегда приводит к  $P=0$  и  $Q \geq 0$ , однако отвечает частному виду деформированного состояния. Среда в целом неустойчива.

5. В заключение отметим, что учет сжимаемости приводит к дополнительной зависимости внутренней энергии  $U$  от  $\det(\hat{g}_{qi})$  и расширению множества допустимых пар векторов  $u$ ,  $n$ ,  $(u \cdot n)^2 \geq 0$ . Однако результаты исследования неустойчивости для рассмотренных выше несжимаемых сред при выборе  $u \cdot n = 0$  остаются справедливыми и в этом случае. Следовательно, устойчивыми могут быть только среды типов 5 и 6 при  $f = -1$ . Здесь все зависит от вида  $U$  как функции инвариантов группы симметрии. Последний случай, например, реализуется в магнитной гидродинамике для сред с идеальной проводимостью электрического тока [5]. С точки зрения физики жидких кристаллов [6] эти случаи отвечают средам, частицы которых состоят из набора либо пластинок с вектором нормали  $a$  (смектики), либо стерженьков с направлением вектора  $A$  (нематики).

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 93-013-17341 и МНФ, проект ND 600.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 1. М., 1984.
2. Голубятников А. Н. Непрерывные группы симметрии жидких кристаллов// Докл. АН СССР. 1978. 240, № 3. 298—301.
3. Годунов С. К. Элементы механики сплошной среды. М., 1978.
4. Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М., 1975.
5. Куликовский А. Г., Любимов Г. А. Магнитная гидродинамика. М., 1962.
6. Кац Е. И., Лебедев В. В. Динамика жидких кристаллов. М., 1988.

Поступила в редакцию  
14.03.94

Ю. В. Глазков, В. И. Сахаров, Р. Ф. Талипов

#### РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ СВЕРХЗВУКОВОГО ОБТЕКАНИЯ ЗАТУПЛЕННЫХ ТЕЛ ВЯЗКИМ ГАЗОМ НА ОСНОВЕ ПОЛНЫХ И УПРОЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ—СТОКСА

Применение различных упрощенных моделей уравнений Навье—Стокса (НС) в задачах сверхзвукового обтекания затупленных тел без разрыва граничных условий на поверхности представляет весьма эффективную альтернативу использованию полных уравнений НС.

Упрощение уравнений НС состоит в пренебрежении локальными эффектами молекулярного переноса в основном (маршевом) направлении потока газа во всей расчетной области, что фактически эквивалентно отбрасыванию вторых производных по маршевой координате  $x$ . Это приводит к удержанию членов порядка  $O(Re^{-1/2})$  и пренебрежению членами порядка  $O(Re^{-1})$ . Получающиеся в результате такого упрощения уравнения называются параболизированными уравнениями Навье—Стокса (ПУНС). Они содержат все члены уравнений Эйлера, все члены уравнений пограничного слоя и описывают структуру ударной волны. Следующая ступень в иерархии упрощений уравнений НС — это модель полного вязкого ударного слоя (ПВУС). Она получается, если дополнительно отбросить вторую производную от нормальной компоненты скорости по поперечному направлению, что приводит к понижению порядка системы дифференциальных уравнений и появлению дополнительного граничного условия, которое определяет положение выделенной головной ударной волны.

Главное преимущество использования ПУНС вместо полных уравнений НС проявляется при решении стационарных задач обтекания в случае, когда можно применять маршевые схемы решения разностных уравнений. Однако в системе ПУНС содержится ряд слагаемых, учитывающих распространение возмущения вверх по потоку, которое осуществляется посредством невязкого механизма через продольную составляющую градиента давления. По этой причине в дозвуковых областях начально-краевая задача для ПУНС является некорректной. Даже слабая эллиптичность системы ПУНС, которая всегда имеется в пристенной области внутри пограничного слоя, требует рассмотрения задачи как краевой, т. е. задания граничного условия для давления вниз по потоку. На этом и основан метод, используемый для решения ПУНС в этой работе (подробно различные способы регуляризации начально-краевой задачи Коши описаны в [1]).

ПУНС, являясь довольно универсальными, пригодны, как следует из асимптотического анализа, для описания безотрывного обтекания во всем диапазоне чисел Маха. Практический опыт показывает, что область применимости ПУНС для получения ряда основных и тепловых характеристик шире формальных пределов, следующих из асимптотических оценок. ПУНС используют для расчета дозвуковых течений [2], областей слабого и сильного взаимодействия при сверх- и транзвуковом обтекании тел [3], отрывных течений и течений с образованием областей с возвратно-циркуляционными зонами [4], а также для расчета внутренних, струйных и следовых течений [5].

В настоящей работе сравниваются решения, получаемые с помощью различных упрощений уравнений НС, с точными в зависимости от изменений чисел Маха и Рейнольдса при сверхзвуковом обтекании тел.

## 1. Постановка задачи о сверхзвуковом стационарном обтекании затупленных тел вязким совершенным газом

Выпишем полную систему стационарных уравнений Навье—Стокса (НС), описывающую движение совершенного однокомпонентного газа в системе координат, связанной с поверхностью обтекаемого тела (координата  $x$  направлена по образующей,  $y$  — по нормали к телу) [1]:

$$\frac{\partial}{\partial x} (r^2 \rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\sqrt{g} \rho v) = 0, \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned}
\rho Du + \rho \frac{\kappa}{H_1} uv + \frac{1}{H_1} \frac{\partial p}{\partial x} &= \\
= \frac{1}{\sqrt{g}} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (r^v \tau_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y} (\sqrt{g} \tau_{xy}) \right] + \frac{\kappa}{H_1} \tau_{xy} - \frac{v \sin \alpha}{r} \tau_{\varphi\varphi}, \\
\rho Dv - \rho \frac{\kappa}{H_1} u^2 + \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{1}{\sqrt{g}} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (r^v \tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y} (\sqrt{g} \tau_{yy}) \right] - \\
- \frac{\kappa}{H_1} \tau_{xx} - \frac{v \cos \alpha}{r} \tau_{\varphi\varphi}, \\
\rho DT - Dp &= \frac{1}{\text{Re}_\infty} \frac{1}{\sqrt{g}} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\mu}{\text{Pr}} \frac{r^v}{H_1} \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\mu \sqrt{g}}{\text{Pr}} \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right] + \\
+ \tau_{xx} e_{xx} + \tau_{yy} e_{yy} + \tau_{\varphi\varphi} e_{\varphi\varphi} + 2\tau_{xy} e_{xy}, \\
\rho &= \frac{\gamma - 1}{\gamma} \rho T, \\
\tau_{xx} &= \frac{2}{H_1} \frac{\mu}{\text{Re}_\infty} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \kappa v - \frac{1}{3\sqrt{g}} \left( \frac{\partial ur^v}{\partial x} + \frac{\partial v \sqrt{g}}{\partial y} \right) \right), \\
\tau_{xy} &= \frac{\mu}{\text{Re}_\infty} \left( \frac{1}{H_1} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\kappa}{H_1} u \right), \\
\tau_{yy} &= 2 \frac{\mu}{\text{Re}_\infty} \left( \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{3\sqrt{g}} \left( \frac{\partial ur^v}{\partial x} + \frac{\partial v \sqrt{g}}{\partial y} \right) \right), \quad \tau_{yy} = \frac{4}{3} \frac{\mu}{\text{Re}_\infty} \frac{\partial v}{\partial y}, \\
\tau_{\varphi\varphi} &= 2 \frac{\mu}{\text{Re}_\infty} \left( \frac{v}{r} (u \sin \alpha + v \cos \alpha) - \frac{1}{3\sqrt{g}} \left( \frac{\partial ur^v}{\partial x} + \frac{\partial v \sqrt{g}}{\partial y} \right) \right), \\
e_{xy} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{H_1} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\kappa}{H_1} u \right), \quad e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \\
e_{xx} &= \frac{1}{H_1} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \kappa v \right), \quad e_{\varphi\varphi} = \frac{v}{r} (u \sin \alpha + v \cos \alpha), \\
\sqrt{g} &= r^v H_1, \quad H_1 = 1 + \kappa y, \quad r = r_\omega + y \cos \alpha, \\
D &= \frac{u}{H_1} \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}, \quad \text{Re}_\infty = \frac{\rho_\infty V_\infty R_0}{\mu_\infty}.
\end{aligned}$$

Искомые функции и координаты, входящие в систему (1.1), обезразмерены следующим образом:  $R_0 x_i$ ,  $V_\infty u_i$ ,  $\rho_\infty \rho$ ,  $\rho_\infty V_\infty^2 \rho$ ,  $T_0 T$  ( $T_0 = V_\infty^2 / c_{p\infty}$ ),  $c_{p\infty} c_p$ ,  $\mu_\infty \mu$ ,  $R_0 r$ ,  $\kappa / R_0$ , где индекс  $\infty$  относится к значениям параметров в набегающем потоке,  $R_0$  — некоторый характерный размер, например радиус кривизны в критической точке.

Система ПУНС получается из (1.1), если отбросить все подчеркнутые сплошной чертой слагаемые, система ПВУС — если отбросить еще и пунктир. Следует отметить, что во втором уравнении системы (1.1) для ПУНС наряду с членами порядка  $O(\text{Re}_\infty^{-1})$  было отброшено слагаемое  $\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x} (r^v \tau_{xy})$ , имеющее порядок  $O(\text{Re}_\infty^{-1/2})$  в ударном слое.

Выписанная система уравнений решалась далее с условиями прилипания; принималось, что температура тела  $T_\omega$  задана или поверхность является адиабатической.

На внешней границе для уравнений НС и ПУНС задавались условия, соответствующие параметрам набегающего потока:

$$y \rightarrow \infty, u \rightarrow \cos \alpha, v \rightarrow -\sin \alpha, T \rightarrow \frac{1}{(\gamma-1)M_\infty^2}, \rho \rightarrow 1,$$

где  $M_\infty$  — число Маха. Для уравнений ПВУС выставлялись обобщенные условия Ренкина—Гюгонио на ударной волне [6].

## 2. Численные методы решения системы упрощенных уравнений Навье—Стокса

Опишем кратко метод (далее метод 1) решения системы ПУНС. Метод состоит из двух чередующихся этапов. На первом каким-либо образом задается продольный градиент давления и начально-краевая задача Коши становится корректной. На втором выполняется маршевый по продольной координате расчет всей системы уравнений.

На первой глобальной итерации (ГИ) продольный градиент давления задается из локально-автомодельного приближения уравнений НС [7]. На последующих он вычисляется центральными разностями по результатам предыдущей ГИ.

При маршевом расчете используются схемы Петухова (при расчете в поперечном направлении) четвертого порядка точности [8] и Чудова (в продольном) второго порядка точности [9]. Система решается скалярными прогонками в порядке написания уравнений. После задания приведенной функции тока уравнение неразрывности удовлетворяется тождественно, функция тока находится из уравнения импульсов в проекции на  $x$ , плотность — из уравнения импульсов в проекции на  $y$ , температура — из уравнения энергии, давление — из уравнения состояния.

Методические расчеты по исследованию сходимости глобальных итераций были проведены ранее [1].

Численное решение уравнений ПВУС при обтекании наветренной поверхности сферы осуществляется также методом ГИ (далее метод 2), который отличается от предыдущего тем, что дополнительно уточняются форма и местоположение головной ударной волны [6]. Уравнения ПВУС решаются в переменных Дородницына, обеспечивающих дополнительное сгущение узлов расчетной сетки в области больших градиентов. Предварительно система уравнений разбивается на параболическую и гиперболическую подсистемы, которые аппроксимируются с использованием схем [8] и [9] и решаются последовательно с применением метода векторной двухдиагональной прогонки.

## 3. Численный метод решения уравнений Навье—Стокса

В настоящей работе реализованы два неявных численных алгоритма решения уравнений Навье—Стокса, которые являются обобщением разностных схем, представленных в [10, 11].

При численном интегрировании система уравнений (1.1) записывается с нестационарными членами в произвольной криволинейной системе координат с сохранением дивергентной формы, с разделением всех членов уравнений на «вязкие» и «невязкие». Вводится дискретизация по времени и пространственным переменным и осуществляется линеаризация по временной координате. Система разностных уравнений записывается относительно приращений независимых переменных.

В неявной части разностного оператора используются направленные разности по координатам в соответствии со знаком собственных значений матриц Якоби, что позволяет получить систему разностных уравнений, обладающих свойством диагонального преобладания.

В одном из применяемых численных методов (назовем его методом 3А) разностная схема записывается в факторизованном по координатным направлениям виде [10]. «Вязкие» слагаемые в неявном операторе учитываются простейшим образом — добавлением к матрицам Якоби конвективных слагаемых некоторой специальной скалярной матрицы. Обращение неявных операторов здесь реализуется скалярными прогонками.

Во втором [11] (метод 3Б) система разностных уравнений записывается в виде, удобном для применения итерационного процесса Гаусса—Зейделя по линиям  $x = \text{const}$ , а неявный оператор обращается матричными трехточечными прогонками. Учет «вязких» членов в левой части разностного оператора осуществляется добавлением к матрицам Якоби специальной матрицы, учитывающей зависимость «вязких» членов только от производных.

Все пространственные производные в «вязких» членах аппроксимируются с помощью центральных разностей со вторым порядком точности.

При построении консервативной разностной схемы «невязкие» члены в правой части разностного оператора определяются через векторы потоков на границах ячеек. При вычислении векторов потоков применяется схема С. К. Годунова повышенной точности. В ее основе лежат процедура распада произвольного разрыва и кусочно-параболическое распределение параметров по ячейкам разностной сетки, удовлетворяющее условиям монотонности (TVD-схема). Для получения стационарного решения применяется принцип установления по времени.

#### 4. Результаты расчетов

Рассматривалось сверхзвуковое обтекание сферы потоком вязкого совершенного газа ( $\gamma=1.4$ ) при различных числах Маха ( $M_\infty=2-10$ ) и Рейнольдса ( $Re_\infty=100-10\,000$ ). Расчеты выполнены на следующих сетках: для метода 1 использовалась сетка из  $16 \times 31$  узлов в направлениях  $x$  и  $y$  соответственно; для метода 2 —  $16 \times 20-40$  узлов; 3 —  $20-60 \times 40-80$ .

Результаты расчетов представлены в виде распределений параметров течения (в зависимости от расстояния  $y$ ) по нормали к поверхности сферы для значений угловой координаты  $s=90^\circ$ , что соответствует  $x=\pi/2$ . Сплошная кривая обозначает решение уравнений НС, пунктирная — ПУНС, сплошная с маркером — ПВУС. Отметим, что для всех рассмотренных в работе параметров обтекания решения уравнений НС, полученные методами 3А и 3Б, близки и представлены в работе единой кривой.

Расчет, проведенный для случая  $M_\infty=2$ ,  $Re_\infty=100$ ,  $T_w=0.5$ , показал, что решения уравнений НС и ПУНС хорошо согласуются по всем параметрам течения. На рис. 1 представлены распределения давления  $p$ , температуры  $T$  и продольной составляющей вектора скорости  $u$ . Незначительное отличие в решениях наблюдается в структуре головной ударной волны: решение уравнения НС дает более размазанный головной скачок уплотнения. Несмотря на малое число Рейнольдса, хорошо видны (по распределению  $u$ ) пограничный слой около тела и невязкое ядро потока. Расчеты, проведенные для других значений  $T_w$ ,

в том числе и для адиабатической стенки, показали слабое влияние этого параметра на степень различия решений, полученных методами 1 и 3. С увеличением числа Рейнольдса степень совпадения решений уравнений НС и ПУНС увеличивается.

Сравнение решений, полученных методами 1—3 для  $M_\infty=10$ ,  $Re_\infty=100$ ,  $T_w=0,25$ , показано на рис. 2, 3 (кривые 1—3 соответственно). На рис. 2 представлены распределения давления, на рис. 3 — продольной составляющей вектора скорости. Возмущенные области течения, полученные при решении уравнений НС и ПУНС, существенно отличаются. Метод 3 (НС) дает как более обширную область перед телом, так и более «толстый»

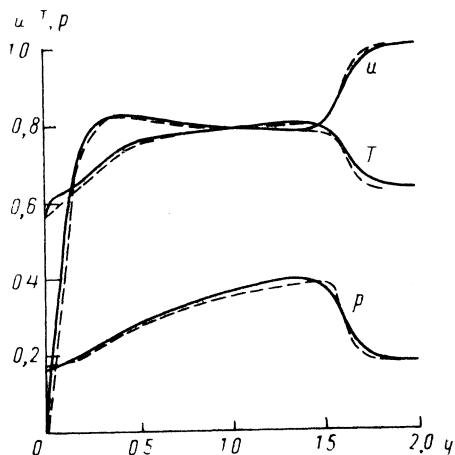


Рис. 1

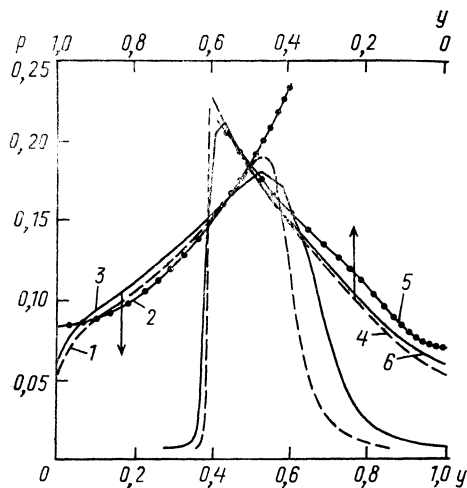


Рис. 2

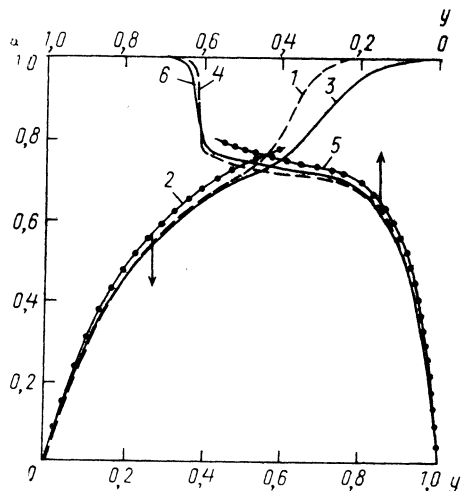


Рис. 3

скачок. Вязкость проявляется во всей области течения, и нет ярко выраженного пограничного слоя около тела. При увеличении числа Рейнольдса (число Маха не меняется) решения уравнений НС и ПУНС сближаются. На рис. 2, 3 кривые 4 и 6 демонстрируют совпадение решений, полученных методами 1 и 3 для  $M_\infty=10$ ,  $Re_\infty=1000$ ,  $T_w=0,25$ . Решение уравнений ПУНС (метод 2) для любого числа Рейнольдса дает более узкий ударный слой. Давление же на поверхности сферы и в области скачка завышено по сравнению с решением уравнений НС и ПУНС (кривые 2, 5 на рис. 2, 3). Отличия особенно существенны при малых числах Рейнольдса. Заметим, что тепловые потоки к сфере и напряжение трения на ее поверхности слабо зависят от принятой модели уравнений. На рис. 4 представлены распределения тепловых потоков  $q$  и трения  $\tau$  вдоль поверхности сферы для всех моделей в случаях:  $M_\infty=10$ ,  $Re_\infty=100$ ,  $T_w=0,25$  (кривые 1),  $M_\infty=2$ ,  $Re_\infty=100$ ,  $T_w=0,5$  (кривые 2),  $M_\infty=10$ ,  $Re_\infty=1000$ ,  $T_w=0,25$  (кривые 3).

Для анализа численных решений, полученных при интегрировании уравнений НС и ПУНС, вычислим те члены в уравнениях НС, которые были отброшены при выводе ПУНС.

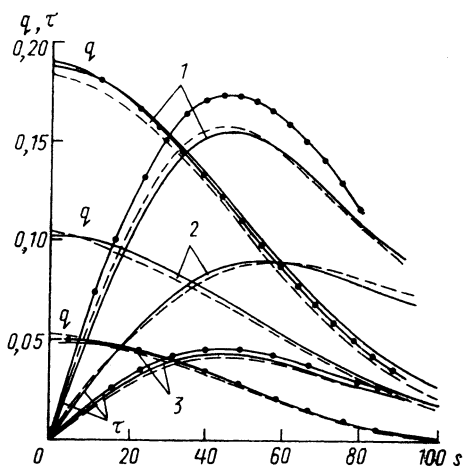


Рис. 4

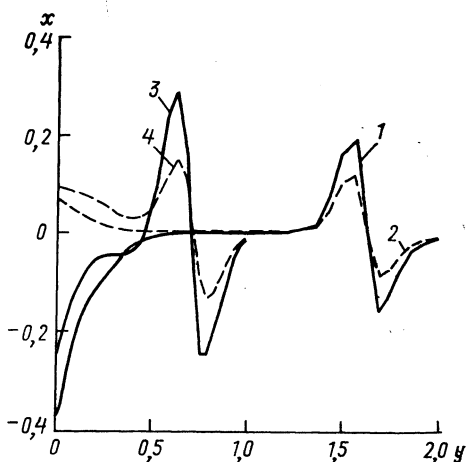


Рис. 5

На рис. 5 кривая 1 изображает распределение вязких членов в уравнениях импульсов в направлении  $x$  (2-е уравнение системы (1.1)) в зависимости от нормальной координаты  $y$ , кривая 2 — отброшенные члены этого же уравнения для  $M_\infty=2$ ,  $Re_\infty=100$ ,  $T_w=0,25$ ,  $s=90^\circ$ . Кривыми 3 и 4 представлены аналогичные распределения для  $M_\infty=10$ ,  $Re_\infty=100$ ,  $T_w=0,25$ . Наибольших значений отброшенные из уравнений НС члены достигают в области скачка и у поверхности тела. Если в первом случае отброшенные величины существенны лишь для этих областей, то во втором — для всей возмущенной области течения. Отметим, что в невязком ядре потока в случае  $M_\infty=2$  вязкие слагаемые вообще несущественны.

С увеличением числа Рейнольдса наибольшие отличия в рассмотренных величинах локализируются в узких зонах около тела и головного скачка и не влияют в целом на решения.

Если определить локальное число Рейнольдса по значениям скорости, вязкости и плотности потока в данной точке, а в качестве характерного масштаба длины принять размер возмущенной области в направлении нормали к поверхности тела, то для  $M_\infty=2$  оно окажется в 2,5 раза больше, чем для  $M_\infty=10$ .

Анализ величин отброшенных членов из уравнений НС и локальных чисел Рейнольдса позволяет сделать вывод, что при фиксированном (малом) числе  $Re_\infty$  увеличение числа Маха приводит к уменьшению отхода головного скачка от тела, что в свою очередь ведет к уменьшению локального числа Рейнольдса. Вязкость становится существенной во всей возмущенной области течения, а отброшенные члены в уравнениях НС имеют один порядок с оставшимися, следствием чего и является несовпадение численных решений уравнений НС и ПУНС.

Сравнительный анализ численных решений уравнений НС, ПУНС и ПВУС, проведенный в настоящей работе, позволяет сделать следующие выводы:



при числах Рейнольдса  $\geq 500$  решения, полученные с помощью всех моделей, близки между собой;

при числах Рейнольдса  $\sim 100$  степень близости решений уравнений НС и ПУНС зависит от числа Маха, причем при уменьшении числа Маха отличий становится меньше. Решения уравнений ПВУС при малых числах  $Re$  дают существенно отличные от решений уравнений НС и ПУНС результаты;

при всех рассмотренных числах Рейнольдса и Маха значения теплового потока и напряжения трения на сфере слабо зависят от принятой модели уравнений.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Глазков Ю. В., Тирский Г. А., Щербак В. Г. Метод решения параболизированных уравнений Навье—Стокса с использованием итераций по градиенту давления. Препринт Ин-та механики МГУ. № 3913. М., 1990.
2. Pratar V. S., Spalding D. B. Fluid flow and heat transfer in three-dimensional duct flows//Int. J. Heat and Mass Transfer. 1976. 19, N 11. 1183—1188.
3. Barnett M., Davis R. T. Calculation of supersonic flows with strong viscous-inviscid interaction//AIAA J. 1986. 24, N 12. 1949—1955.
4. Davis R. T., Barnett M., Rakich J. V. The calculation of supersonic viscous flows using the parabolized Navier—Stokes equations//Comput. and Fluids. 1986. 14, N 3. 197—224.
5. Krawczyk W. J., Harris T. B. Parabolized Navier—Stokes analysis of two-dimensional scramjet inlet flow fields//AIAA Paper. 1987. N 1899.
6. Васильевский С. А., Тирский Г. А., Утюжников С. В. Численный метод решения уравнений вязкого ударного слоя//Докл. АН СССР. 1986. 290, № 5. 1058—1061.
7. Као Н. С. Hypersonic viscous flow near the stagnation streamline of a blunt body//AIAA J. 1964. 2, N 11. 1896—1906.
8. Петухов И. В. Численный расчет двумерных течений в пограничном слое//Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы. М., 1964. 304—325.
9. Чудов Л. А. Разностный метод для расчетов в пограничном слое, обладающий свойством сильной стабилизации высокочастотных возмущений//Некоторые применения метода сеток в газовой динамике. Вып. 1. М., 1971. 196—210.
10. Иванов М. Я., Крупа В. Г., Нигматуллин Р. З. Неявная схема С. К. Годунова повышенной точности для интегрирования уравнений Навье—Стокса//Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1989. 29, № 6. 888—901.
11. Полянский В. А., Сахаров В. И., Панкратьева И. Л. Расчет вязких течений сжимаемого газа на основе монотонных схем повышенного порядка аппроксимации. Препринт Ин-та механики МГУ. № 4189. М., 1992.

Поступила в редакцию  
06.04.94

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1996. № 2

УДК 531.01

А. Ю. Зайцев, Д. В. Трещев

#### ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ТРАЕКТОРИЙ В ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМАХ, ЗАВИСЯЩИХ ОТ ПАРАМЕТРА, ПРИ СТОЛКНОВЕНИИ МУЛЬТИПЛИКАТОРОВ В ТОЧКЕ — 1

Теория потери устойчивости стационарных и периодических режимов в динамических системах, зависящих от параметров, берет начало в работах Пуанкаре [1]. Андронов [2] уточнил и развил теорию Пуанкаре, а также ввел понятия мягкой и жесткой потери устойчивости. Оказалось, что в гамильтоновых системах могут происходить анало-