

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Я. Гольдин, С. В. Шилькова, Нелинейный метод решения системы разностных уравнений типа стационарной квазидиффузии,
Матем. моделирование, 2004, том 16, номер 1, 97–104

<https://www.mathnet.ru/mm360>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.173

23 апреля 2025 г., 11:32:58



НЕЛИНЕЙНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА СТАЦИОНАРНОЙ КВАЗИДИФФУЗИИ

© В.Я. Гольдин, С.В. Шилькова

Институт математического моделирования РАН, Москва

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 00 –01 – 00205

Предложен новый вариант сведения двумерной разностной задачи к последовательности одномерных. Использование нелинейных преобразований разностных уравнений ускоряет сходимость итераций. Оптимальный выбор итерационного параметра позволяет получить как минимум линейную зависимость числа итераций от размерности сетки по одному направлению. Метод не требует самосопряженности оператора и знания спектра, работает при сильных неоднородностях, в том числе и при наличии пустот.

NONLINEAR METHOD FOR SOLVING THE STATIONARY QUASI-DIFFUSION DIFFERENCE EQUATION

V. Ya. Gol'din, S. V. Shilkova

The two dimensional difference task is reduced to sequence of one dimensional ones by new manner. Nonlinear transformations of difference equations accelerates the iterations convergence. The choice of optimal iterational parameter provides linear dependence of the number of iterations on grid dimension. The self-adjointness of operator and information of its spectrum are not necessary. This method runs with strong heterogeneity and cavities.

Введение

Многие физические задачи, например, теплопроводность, приближения уравнения переноса и т.д., приводят к системам разностных уравнений типа стационарной квазидиффузии. Итерационные методы решения таких задач сходятся медленно. Более быстрые методы [1] применимы только для самосопряженных операторов, но для реальных задач это требование часто не выполняется.

В [2–4] были развиты методы, которые не требуют самосопряженности оператора и знания спектра, но плохо сходятся при больших сетках и сильных неоднородностях. В [5] предложено нелинейное ускорение итераций. Однако и в этом случае итерации недостаточно быстро сходятся при сильных неоднородностях, и метод совсем не работает при наличии пустот. В данной работе предложен новый вариант сведения двумерной задачи к последовательности одномерных и использована идея нелинейного преобразования разностных уравнений [5,6]. В результате получено ускорение итераций, работающее при сильных неоднородностях, в том числе, при наличии пустот.

Метод

Рассмотрим систему уравнений типа стационарной квазидиффузии

$$\operatorname{div} \mathbf{W} + k \cdot U = f, \quad (1)$$

$$k_1 \cdot \mathbf{W} + \operatorname{Div}(\mathbf{D} \cdot U) = 0 \quad (2)$$

с условиями на границе области

$$\mu \cdot (\mathbf{W} \cdot \mathbf{n}) + \tau \cdot U = \sigma, \quad (3)$$

где Div – тензорная дивергенция, \mathbf{D} – тензор диффузии, \mathbf{n} – внешняя нормаль к границе области.

В [3,4] для этой системы строится консервативная разностная схема в неортогональной системе координат. Значения функции определяются в центре ячеек и на серединах ребер, а нормальный поток только на серединах ребер рис.1. В отличие от граничных условий, нормальный поток при расчете считается положительным в направлении, соответствующем росту индекса. В результате получается система пяти разностных уравнений для девяти расчетных величин

$$a_{11}^{i,j} \cdot W_{i+1}^j - a_{12}^{i,j} \cdot W_i^j + b_{11}^{i,j} \cdot W_{j+1}^i - b_{12}^{i,j} \cdot W_j^i + c_1^{i,j} \cdot U^{i,j} = d_1^{i,j}, \quad (4)$$

$$e_2^{i,j} \cdot W_i^j + c_2^{i,j} \cdot U^{i,j} - a_{24}^{i,j} \cdot U_i^j + b_{23}^{i,j} \cdot U_{j+1}^i - b_{24}^{i,j} \cdot U_j^i = d_2^{i,j}, \quad (5)$$

$$e_3^{i,j} \cdot W_{i+1}^j + a_{33}^{i,j} \cdot U_{i+1}^j - c_3^{i,j} \cdot U^{i,j} + b_{33}^{i,j} \cdot U_{j+1}^i - b_{34}^{i,j} \cdot U_j^i = d_3^{i,j}, \quad (6)$$

$$e_4^{i,j} \cdot W_j^i + a_{43}^{i,j} \cdot U_{i+1}^j - a_{44}^{i,j} \cdot U_i^j + c_4^{i,j} \cdot U^{i,j} - b_{44}^{i,j} \cdot U_j^i = d_4^{i,j}, \quad (7)$$

$$e_5^{i,j} \cdot W_{j+1}^i + a_{53}^{i,j} \cdot U_{i+1}^j - a_{54}^{i,j} \cdot U_i^j + b_{53}^{i,j} \cdot U_{j+1}^i - c_5^{i,j} \cdot U^{i,j} = d_5^{i,j} \quad (8)$$

и условия на границе области

$$\bar{\mu}^j \cdot W_{i=1}^j + \bar{\tau}^j \cdot U_{i=1}^j = \bar{\sigma}^j, \quad \bar{\mu}^j \cdot W_{i=NI+1}^j + \bar{\tau}^j \cdot U_{i=NI+1}^j = \bar{\sigma}^j, \quad (9)$$

$$\bar{\mu}^i \cdot W_{j=1}^i + \bar{\tau}^i \cdot U_{j=1}^i = \bar{\sigma}^i, \quad \bar{\mu}^i \cdot W_{j=NI+1}^i + \bar{\tau}^i \cdot U_{j=NI+1}^i = \bar{\sigma}^i, \quad (10)$$

$$i=1, NI; \quad j=1, NJ.$$

Стрелки указывают направление расчета.

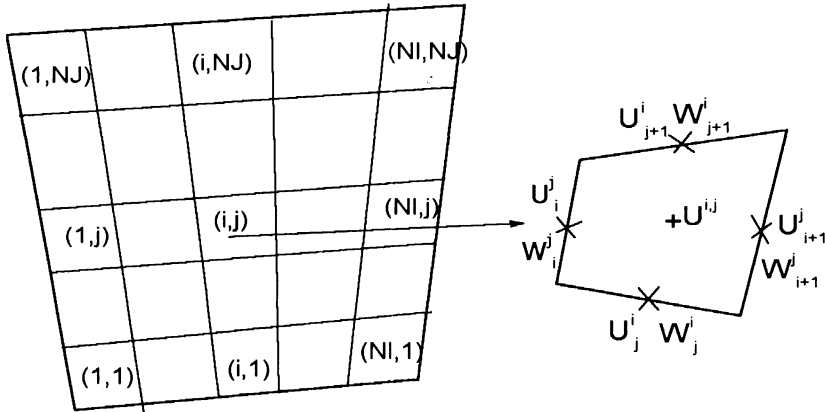


Рис.1. Расчетная область и расчетная ячейка

Форма полученных уравнений не зависит ни от используемой системы координат, ни от расчетной сетки. Вся геометрия задачи заключена в коэффициентах системы, которые зависят от индексов i и j .

В [3,4] для замыкания системы (4)-(8) использовался перенос граничных условий на границы ячейки. В результате возникает нелинейная система уравнений для μ , τ и линейная система для σ . Итерации для σ сходятся медленно. В [3,4] для ускорения сходимости σ использовался метод Люстерника, однако это ускорение недостаточно. В [5] построен нелинейный метод ускорения, приведший к заметным улучшениям, однако, и он не позволяет считать задачи с пустотами.

В данной работе для замыкания системы в явном виде используются значения функции в соседних ячейках.

Рассмотрим j -й слой расчетной сетки. Определим для каждой расчетной ячейки (i,j) три вектора:

$$\mathbf{C}_1^{i,j} = (-c_4^{i,j}, a_{44}^{i,j}, -a_{43}^{i,j}), \quad \mathbf{C}_2^{i,j} = (c_5^{i,j}, a_{54}^{i,j}, -a_{53}^{i,j}), \quad \mathbf{U}^{i,j} = (U^{i,j}, U_i^j, U_{i+1}^j).$$

Из уравнения (7) для ячейки (i,j) и уравнения (8) для ячейки $(i,j-1)$ с предыдущего слоя можно получить выражение для потока и функции на границе ячейки:

$$W_j^i = G^{i,j} \cdot [b_{53}^{i,j-1} \cdot (\mathbf{C}_1^{i,j}, \mathbf{U}^{i,j}) + b_{44}^{i,j} \cdot (\mathbf{C}_2^{i,j-1}, \mathbf{U}^{i,j-1}) + b_{53}^{i,j-1} \cdot d_4^{i,j} + b_{44}^{i,j} \cdot d_5^{i,j-1}], \quad (11)$$

$$U_j^i = G^{i,j} \cdot [-e_5^{i,j-1} \cdot (\mathbf{C}_1^{i,j}, \mathbf{U}^{i,j}) + e_4^{i,j} \cdot (\mathbf{C}_2^{i,j-1}, \mathbf{U}^{i,j-1}) - e_5^{i,j-1} \cdot d_4^{i,j} + e_4^{i,j} \cdot d_5^{i,j-1}], \quad (12)$$

где

$$G^{i,j} = (e_4^{i,j} \cdot b_{53}^{i,j-1} + e_5^{i,j-1} \cdot b_{44}^{i,j})^{-1} \quad \text{и} \quad i=1, NI; \quad j=2, NJ.$$

Для пограничных слоев $j=1$ и $j=NJ$ с помощью граничных условий доопределим:

$$b_{53}^{i,0} = \bar{c}^i, \quad e_5^{i,0} = \bar{\mu}^i, \quad (\mathbf{C}_2^{i,0}, \mathbf{U}^{i,0}) = 0, \quad d_5^{i,0} = \bar{\sigma}^i,$$

$$b_{44}^{i, NJ+1} = -\bar{c}^i, \quad e_4^{i, NJ+1} = -\bar{\mu}^i, \quad (\mathbf{C}_1^{i, NJ+1}, \mathbf{U}^{i, NJ+1}) = 0, \quad d_4^{i, NJ+1} = \bar{\sigma}^i,$$

тогда выражения (11) и (12) для потока и функции на границе ячейки будут справедливы при $i=1, NI; j=1, NJ+1$.

Подставим полученные выражения (11) и (12) в уравнения (4)-(6) и получим для j -го слоя систему уравнений:

$$\begin{aligned} & a_{11}^{i,j} \cdot W_{i+1}^j - a_{12}^{i,j} \cdot W_i^j + b_{11}^{i,j} \cdot b_{44}^{i,j+1} \cdot G^{i,j+1} \cdot (\mathbf{C}_2^{i,j}, \mathbf{U}^{i,j}) - \\ & - b_{12}^{i,j} \cdot b_{53}^{i,j-1} \cdot G^{i,j} \cdot (\mathbf{C}_1^{i,j}, \mathbf{U}^{i,j}) + c_1^{i,j} \cdot U^{i,j} = \\ & = d_1^{i,j} - b_{11}^{i,j} \cdot G^{i,j+1} \cdot (b_{53}^{i,j} \cdot d_4^{i,j+1} + b_{44}^{i,j+1} \cdot d_5^{i,j}) + \\ & + b_{12}^{i,j} \cdot G^{i,j} \cdot (b_{53}^{i,j-1} \cdot d_4^{i,j} + b_{44}^{i,j} \cdot d_5^{i,j-1}) - \\ & - b_{11}^{i,j} \cdot b_{53}^{i,j} \cdot G^{i,j+1} \cdot (\mathbf{C}_1^{i,j+1}, \mathbf{U}^{i,j+1}) + b_{12}^{i,j} \cdot b_{44}^{i,j} \cdot G^{i,j} \cdot (\mathbf{C}_2^{i,j-1}, \mathbf{U}^{i,j-1}), \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} & e_2^{i,j} \cdot W_i^j + c_2^{i,j} \cdot U^{i,j} - a_{24}^{i,j} \cdot U_i^j + b_{23}^{i,j} \cdot e_4^{i,j+1} \cdot G^{i,j+1} \cdot (\mathbf{C}_2^{i,j}, \mathbf{U}^{i,j}) + \\ & + b_{24}^{i,j} \cdot e_5^{i,j-1} \cdot G^{i,j} \cdot (\mathbf{C}_1^{i,j}, \mathbf{U}^{i,j}) = \\ & = d_2^{i,j} - b_{23}^{i,j} \cdot G^{i,j+1} \cdot (-e_5^{i,j} \cdot d_4^{i,j+1} + e_4^{i,j+1} \cdot d_5^{i,j}) + \\ & + b_{24}^{i,j} \cdot G^{i,j} \cdot (-e_5^{i,j-1} \cdot d_4^{i,j} + e_4^{i,j} \cdot d_5^{i,j-1}) + \\ & + b_{23}^{i,j} \cdot e_5^{i,j} \cdot G^{i,j+1} \cdot (\mathbf{C}_1^{i,j+1}, \mathbf{U}^{i,j+1}) + b_{24}^{i,j} \cdot e_4^{i,j} \cdot G^{i,j} \cdot (\mathbf{C}_2^{i,j-1}, \mathbf{U}^{i,j-1}), \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} & e_3^{i,j} \cdot W_{i+1}^j + a_{33}^{i,j} \cdot U_{i+1}^j - c_3^{i,j} \cdot U^{i,j} + b_{33}^{i,j} \cdot e_4^{i,j+1} \cdot G^{i,j+1} \cdot (\mathbf{C}_2^{i,j}, \mathbf{U}^{i,j}) + \\ & + b_{34}^{i,j} \cdot e_5^{i,j-1} \cdot G^{i,j} \cdot (\mathbf{C}_1^{i,j}, \mathbf{U}^{i,j}) = \\ & = d_3^{i,j} - b_{33}^{i,j} \cdot G^{i,j+1} \cdot (-e_5^{i,j} \cdot d_4^{i,j+1} + e_4^{i,j+1} \cdot d_5^{i,j}) + \\ & + b_{34}^{i,j} \cdot G^{i,j} \cdot (-e_5^{i,j-1} \cdot d_4^{i,j} + e_4^{i,j} \cdot d_5^{i,j-1}) + \\ & + b_{33}^{i,j} \cdot e_5^{i,j} \cdot G^{i,j+1} \cdot (\mathbf{C}_1^{i,j+1}, \mathbf{U}^{i,j+1}) + b_{34}^{i,j} \cdot e_4^{i,j} \cdot G^{i,j} \cdot (\mathbf{C}_2^{i,j-1}, \mathbf{U}^{i,j-1}) \end{aligned} \quad (15)$$

при $i=1, NI; j=1, NJ$.

Если считать известными значения вектора U с предыдущего $j-1$ и последующего $j+1$ слоев, то система (13)-(15) связывает значения потока и функции только на одном слое и может быть решена послойно с помощью метода одномерной потоковой прогонки [3,8].

Аналогичная система уравнений может быть построена по другому направлению.

Итерационный процесс организован следующим образом:

Пусть известно поле $U_{(s-1)}^{i,j}$ с предыдущей итерации (может быть нулевой). Здесь s – индекс итераций. Если в системе (13)-(15) в правых частях значения функции на соседних слоях известны, то для j -го слоя ее можно решать одномерной прогонкой. Решаем послойно, начиная со слоя $j=1$. Для нахождения функции на первом слое используем значение с предыдущей итерации $U_{(s-1)}^{i,2}$ и граничные условия. Далее для каждого слоя функция на нижнем слое $U_{(s)}^{i,j-1}$ уже известна, а функция на верхнем слое берется с предыдущей итерации $U_{(s-1)}^{i,j+1}$. После прохождения всех слоев получаем новое поле $U_{(s)}^{i,j}$, которое используется как предыдущая итерация для решения аналогичной системы по направлению i . Организованный таким образом итерационный процесс является линейным и сходится довольно медленно.

Для ускорения итерационного процесса функция на верхнем слое $j+1$ (при расчете от $j=1$ до $j=N_j$) представляется в виде [5]:

$$U_{(s)}^{i,j+1} = \alpha \cdot U_{(s-1)}^{i,j+1} + (1-\alpha) \cdot q_{(s-1)}^{i,j+1} \cdot U_{(s)}^{i,j},$$

$$U_{(s)}^{j+1} = \alpha \cdot U_{(s-1)}^{j+1} + (1-\alpha) \cdot q_{(s-1)}^{j+1} \cdot U_{(s)}^j,$$

$$U_{i+1(s)}^{j+1} = \alpha \cdot U_{i+1(s-1)}^{j+1} + (1-\alpha) \cdot q_{i+1(s-1)}^{j+1} \cdot U_{i+1(s)}^j,$$

где нелинейные функции $q_{(s-1)}^{i,j+1}$, $q_{(s-1)}^{j+1}$, $q_{i+1(s-1)}^{j+1}$ имеют вид

$$q_{(s-1)}^{i,j+1} = \left(\frac{U_{(s-1)}^{i,j+1}}{U_{(s-1)}^{i,j}} \right), \quad q_{(s-1)}^{j+1} = \left(\frac{U_{(s-1)}^{j+1}}{U_{(s-1)}^j} \right), \quad q_{i+1(s-1)}^{j+1} = \left(\frac{U_{i+1(s-1)}^{j+1}}{U_{i+1(s-1)}^j} \right).$$

Нетрудно заметить, что при $\alpha = 1$ итерационный процесс становится линейным, а при $\alpha = 0$ неустойчивым. Оптимальный выбор параметра α позволяет существенно повысить скорость сходимости итераций.

Результаты расчетов

Предложенный нелинейный метод был опробован на следующих задачах: на модельной задаче с постоянными коэффициентами, на гладкой задаче, имеющей точное решение, на модельной задаче со щелью и на реальных реакторных задачах с неоднородностями.

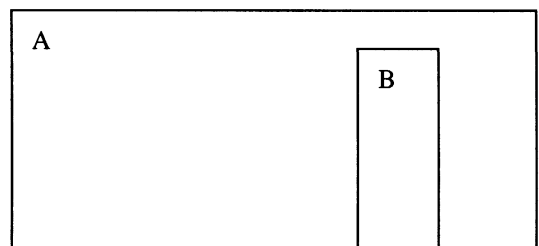
Задача 1. Для системы уравнений типа уравнений диффузии в декартовых координатах (x,y)

$$\operatorname{div} W + k \cdot U = f, \quad k_1 \cdot W_x + \frac{1}{3} \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad k_1 \cdot W_y + \frac{1}{3} \frac{\partial U}{\partial y} = 0.$$

в прямоугольной области ставятся граничные условия: $W_N = 0.7U$, где W_N – поток, нормальный к границе.

а) параметры задачи постоянны во всей области

$$k = 0.0064, \quad k_1 = 0.26, \quad f = 1;$$



б) в прямоугольной области «А» вырезана прямоугольная щель «В», в которой параметры задачи имеют другое значение:

в области «А»

$$k = 0.0064, \quad k_1 = 0.26, \quad f = 1,$$

в области «В»

$$k = 0.0000064, \quad k_1 = 0.26, \quad f = 0.$$

Использовался критерий сходимости $\|U_{(s)} - U_{(s-1)}\| \leq 10^{-9}(1-\lambda)$, где λ – показатель убывания итерационной поправки [9].

Задача 2. Для системы уравнений

$$\operatorname{div} W + k \cdot U = f, \quad k_1 \cdot W_x + \frac{1}{3} \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad k_1 \cdot W_y + \frac{1}{3} \frac{\partial U}{\partial y} = 0$$

в декартовых координатах (x, y) в единичном квадрате ставилась задача Дирихле. $U=0$ на границе, $k=0$ и $k_1=1$ во всей области, а источник f выбирался таким образом, чтобы функция $U = 32x(1-x)y(1-y)$ являлась точным решением системы. Эта же задача решалась в [1,7]. При решении этой задачи, как и в [1,7], использовался критерий сходимости $\|U_{(s)} - U_t\| \leq 10^{-4} \cdot \|U_{(0)} - U_t\|$, где U_t – точное решение.

Задача 3. Рассматривалась реальная задача расчета осредненных на одну группу уравнений диффузии переноса нейтронов в ядерном реакторе в цилиндрической системе координат на неравномерной сетке: а) с существенными неоднородностями; б) при наличии пустот.

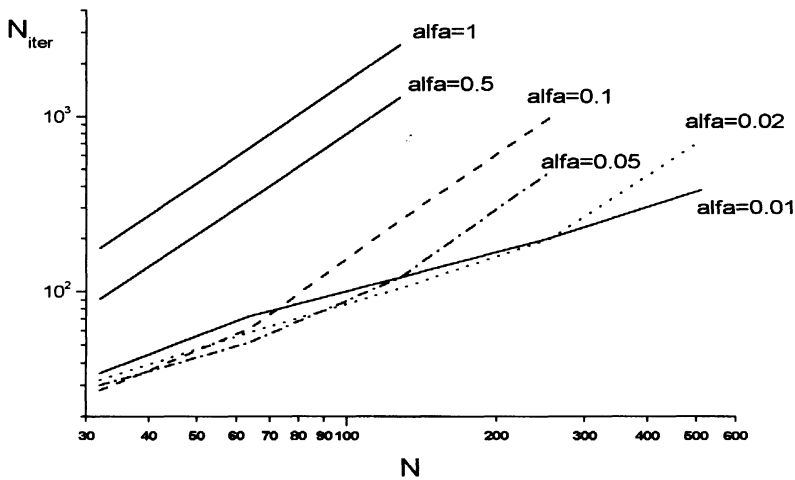


Рис.2. Задача 1а. Зависимость числа итераций от размерности сетки по одному направлению при критерии сходимости $10^{-9}(1-\lambda)$ при различных значениях параметра α .

Для задачи 1а исследована зависимость числа итераций от размерности сетки при различных значениях параметра α (рис.2). Параметр α постоянен во всей расчетной области и не изменяется в процессе счета. При $\alpha=1$ мы имеем обычный линейный итерационный процесс и число итераций $N_{iter} \approx N^2$, где N – размерность сетки по одному направлению. С уменьшением параметра α сначала просто уменьшается число итераций при сохранении квадратичной зависимости от N . При дальнейшем уменьшении α зависимость меняется и становится слабее линейной. При $\alpha=0.01$ $N_{iter} \approx N^{0.85}$. На рис.3 представлено изменение итерационной поправки в

ходе итерационного процесса на сетке 64×64 при разных значениях параметра α . Видно, что при уменьшении α сходимость становится быстрее линейной, затем становится немонотонной, при дальнейшем уменьшении параметра число итераций начинает расти, потом задача теряет устойчивость. Для каждой сетки существует оптимальное значение α , при котором число итераций минимально.

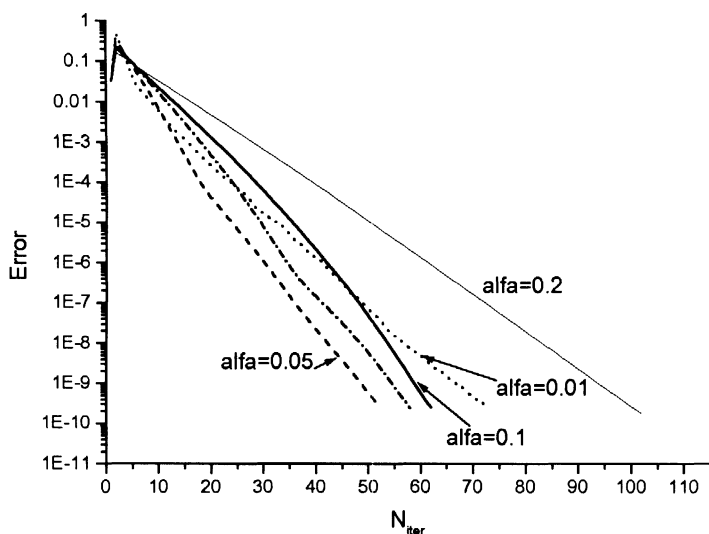


Рис.3. Задача 1а. Изменение итерационной поправки в норме L_2 на сетке 64×64 .

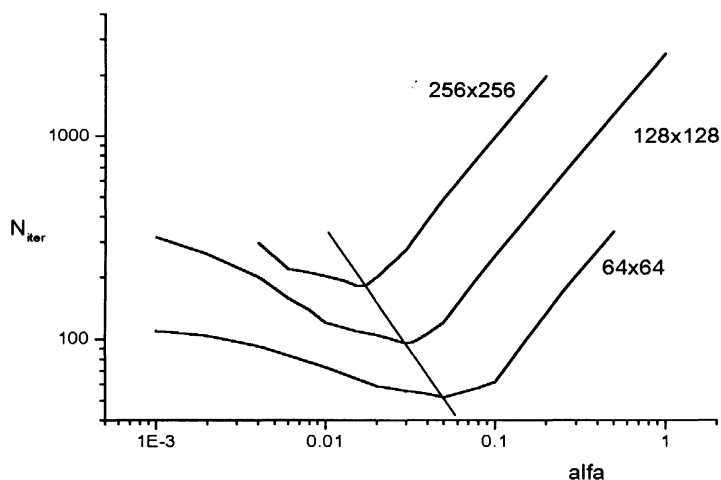


Рис.4. Задача 1а. Зависимость числа итераций от параметра α на разных сетках.

На рис.4 приведена зависимость числа итераций от параметра α для разных сеток. Видно, что для задачи с постоянными коэффициентами минимум числа итераций достигается в достаточно широком диапазоне изменения α , хотя с увеличением размерности сетки минимум становится острее. α_{\min} можно аппроксимировать степенной функцией от размерности сетки, причем показатель степени определяется коэффициентами задачи. Для задач одного типа с незначительными изменениями параметров оптимальное значение α может быть определено из предварительных расчетов на грубых сетках.

Для задачи 1б при расчетах с постоянным по области и неизменным в процессе расчета параметром α получилось значительное увеличение числа итераций по сравнению с задачей 1а и более сильная зависимость от размерности сетки (табл. 1).

Размерность сетки	α	N_{iter}
64×64	0.12	84
128×128	0.21	584

Таблица 1. Результаты расчетов для задачи 1б при постоянной во всей расчетной области α и критерии сходимости $10^{-9}(1-\lambda)$.

При использовании двух различных значений параметра α внутри и вне щели, удалось получить такую же зависимость от размерности сетки, как и для задачи 1а. Результаты приведены в табл.2. При этом функция зависимости числа итераций от α имеет настолько узкий и глубокий минимум, что такой выбор оптимального параметра вряд ли имеет смысл. Наиболее предпочтительным представляется постепенное уменьшение параметра до некоторого α_{min} в процессе счета.

Размерность сетки	32×32	64×64	96×96	128×128
N_{iter}	31	57	100	118
α «А»	0.1	0.075	0.0498	0.21644
α «В»	0.1	0.145	0.198	0.243

Таблица 2. Результаты расчетов для задачи 1б с кусочно-постоянной α и критерием сходимости $10^{-9}(1-\lambda)$.

В табл.3 приведены результаты расчетов для задачи 2 на разных сетках. По сравнению с [7] получено большее число итераций и примерно линейная зависимость от размерности сетки.

Размерность сетки	64×64	128×128	256×256	512×512
N_{iter}	50	102	203	520

Таблица 3. Результаты расчетов для задачи 2 при $\alpha = 0.005$ и критерии сходимости $\|U_{(s)} - U_i\| \leq 10^{-4} \cdot \|U_{(0)} - U_i\|$

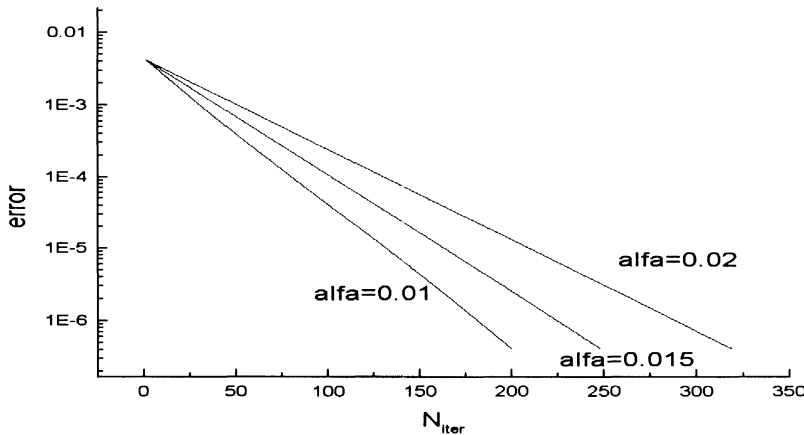


Рис.5. Изменение итерационной поправки в норме L_2 для задачи 2 на сетке 256x256 точки.

Для задачи 3 проведены расчеты на сетке 80×200 . Параметр α менялся в процессе счета от 0.8 до 0.01. Для задачи 3а было получено 80 итераций при критерии сходимости $10^{-9}(1-\lambda)$, что несколько лучше, чем в [5]. На рис.5 представлено изменение итерационной поправки в процессе счета для реакторной задачи с пустотами 3б для одного из сценариев изменения параметра. Более удачный сценарий позволяет еще уменьшить число итераций. Следует отметить, что метод [5] на таких задачах не работает.

Вопрос о выборе оптимального значения итерационного параметра требует дальнейшего изучения. Тем не менее ясно, что предложенный метод позволяет решать задачи с сильными неоднородностями и пустотами с хорошей скоростью без априорной информации о свойствах оператора.

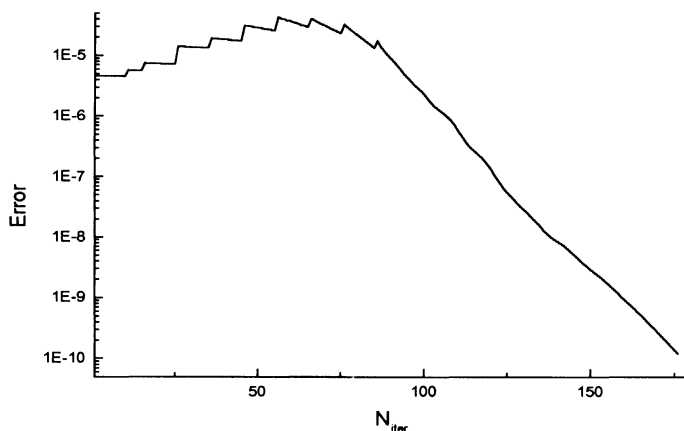


Рис.6. Изменение итерационной поправки в норме L_2 для реакторной задачи с наличием пустот на сетке 80×200 .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А.А.Самарский, Е.С.Николаев. Методы решения сеточных уравнений. – М.: Наука, 1978.
2. Б.Н.Четверушкин. Математическое моделирование задач динамики излучающего газа. – М.: Наука, 1978.
3. В.Я. Гольдин, А.В.Колпаков. Комбинированные методы решения многомерной стационарной системы уравнений квазидиффузии. В сб. Вычислительные методы линейной алгебры, М, 1983., Отдел Вычислительной Математики АН СССР, Труды Всес. конф., с. 60-71.
4. Е.Н.Аристова, А.В.Колпаков. Комбинированная разностная схема для аппроксимации эллиптического оператора на косоугольной ячейке. 1991, ММ, т.3, №4, с.93-102.
5. Е.Н.Аристова, В.Я.Гольдин. Нелинейное ускорение итераций решения эллиптических систем уравнений. Математическое моделирование, 2001, т.13, №9, с.82-90.
6. В.Я. Гольдин. О математическом моделировании задач сплошной среды с неравновесным переносом. В сб. «Современные проблемы математической физики и вычислительной математики» – М.: Наука, 1978.
7. О.Ю. Милукова, Б.Н.Четверушкин. Параллельный вариант попеременно-треугольного метода. ЖВМ и МФ, 1998, т. 38, №2, с. 228-238.
8. А.Д. Гаджиев, В.Н. Писарев, А.А. Шестаков. Метод расчета двумерных задач теплопроводности на неортогональных сетках. ЖВМ и МФ, 1982, т. 22, №2, с. 339-347.
9. Л.А. Люстерник. Замечания к численному решению краевых задач уравнения Лапласа и вычислению собственных значений методом сеток. Труды математического института АН СССР, 1947, т.20, с.49-64.