S. A. Avdonin, S. A. Ivanov, Exponential Riesz bases of subspaces and divided differences,
Algebra i Analiz, 2001, Volume 13, Issue 3, 1–17

Алгебра и анализ
Том 13 (2001), вып. 3

БАЗИСЫ РИССА ИЗ ЭКСПОНЕНТ И РАЗДЕЛЕННЫХ РАЗНОСТЕЙ

© С. А. Авдонин, С. А. Иванов

Рассматривается семейство линейных комбинаций (разделенные разности) экспонент $e^{i\lambda_k t}$ в случае, когда расстояния между точками λ_k могут быть сколь угодно малы. Д. Ульрих в [20] доказал базисные свойства такого семейства в случае, когда $\{\lambda_k\} = \bigcup \Lambda^{(n)}$ и группы $\Lambda^{(n)}$ состоят из одинакового числа точек, все из которых близки к n, $n \in \mathbb{Z}$. В настоящей работе этот результат обобщен на группы из произвольного числа близких точек и получено полное описание базисов Рисса из разделенных разностей. Дано приложение к задаче управления гибридной системой.

§1. Введение

Семейства экспонент $\{e^{i\lambda_k t}\}$ встречаются в таких различных областях математики, как теория несамосопряженных операторов (модель С. Надя–С. Фояша), задача Редже для резонанского рассеяния, теория начально-краевых задач для уравнений в частных производных, теория управления системами с распределенными параметрами и теория восстановления сигналов. Одним из главных вопросов, возникающих во всех этих приложениях, является базисность по Риссу эспоненциального семейства.

Впервые эта задача рассматривалась в классической работе Пэли и Винера [18] в пространстве $L^2(0,T)$ и с тех пор изучалась многими математиками (см. библиографию в [15, 21] и [1]). Полное решение этой задачи дано в работах [30, 15, 28] на основе подхода, предложенного Б. С. Павловым.

Основной результат в этом направлении формулируется следующим образом [30].

Теорема 1.1. *Пусть* $\Lambda := \{\lambda_k \mid k \in \mathbb{Z})$ — *счетное подмножество комплексной плоскости. Семейство* $\{e^{i\lambda_k t}\}$ *образует базис Рисса в* $L^2(0,T)$ *тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия*:

Работа поддержана Австралийским научным советом (Australian Research Council), грант №A00000723, и Российским фондом фундаментальных исследований, грант 99-01-00744.

а) Λ *лежит в полосе, параллельной вещественной оси,*

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}} |\Im\lambda_k| < \infty,$$

и отделимо

$$\delta(\Lambda) := \inf_{k\neq n} |\lambda_k - \lambda_n| > 0; \tag{1}$$

б) *найдется целая функция F экспоненциального типа с индикаторной диаграммой ширины T и множеством нулей Λ (порождающая функция семейства $\{e^{i\lambda_k t}\}$ на интервале $(0,T)$) такая, что для некоторого вещественного h функция $|F(x+ih)|^2$ удовлетворяет условию Хельсона–Сеге: существуют функции u, $v \in L^\infty(\mathbb{R})$, $\|v\|_{L^\infty(\mathbb{R})} < \pi/2$ такие, что*

$$|F(x+ih)|^2 = \exp\{u(x) + \tilde{v}(x)\}. \tag{2}$$

Отображение $v \mapsto \tilde{v}$ обозначает преобразование Гильберта ограниченных функций:

$$\tilde{v}(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} v(t)\left\{\frac{1}{x-t} + \frac{t}{t^2+1}\right\}dt.$$

Замечание 1.1. Отметим, что а) эквивалентно базисности Рисса $\mathcal{E}$ в замыкании своей линейной оболочке в $L^2(0,\infty)$ и б) есть критерий того, что ортопроектор P_T из этой оболочки в $L^2(0,T)$ является изоморфизмом (ограниченным и ограниченно-обратимым оператором).

Как известно, условие Хельсона–Сеге эквивалентно условию Макенхаупта (A_2):

$$\sup_{I\in\mathcal{J}}\left\{\frac{1}{|I|}\int_I |F(x+ih)|^2 dx \frac{1}{|I|}\int_I |F(x+ih)|^{-2} dx\right\} < \infty,$$

где $\mathcal{J}$ есть множество всех интервалов на вещественной оси.

Теория семейств экспонент успешно применяется к задачам управления системами с распределенными параметрами и является основой известного метода моментов [23, 19, 1]. Недавние исследования таких классов распределенных систем, как гибридные системы и системы с демпфированием, поставили новые трудные задачи исследования экспоненциальных семейств (см. [12, 17, 13]). Одна из них связана со свойствами семейств $\mathcal{E} = \{e^{i\lambda_k t}\}$ в случае, когда Λ не удовлетворяет условию отделимости (1) и, следовательно, $\mathcal{E}$ не образует базиса Рисса в замыкании своей линейной оболочки в $L^2(0,T)$ для любого $T > 0$.

Свойства таких семейств в $L^2(0,\infty)$ впервые изучались в [24] (см. также [29, лек. IX]). В случае, когда Λ есть объединение конечного числа отделимых множеств, был предложен естественный путь представить Λ как объединение групп $\Lambda^{(p)}$ близких точек. Подпространства, натянутые на соответствующие экспоненты, образуют базис Рисса в замыкании своей линейной оболочки в $L^2(0,\infty)$, т.е. существует изоморфизм, отображающий эти подпространства на ортогональные подпространства. Этот факт вместе с результатом Б. С. Павлова об ортопроекторе P_T (см. сделанное выше замечание 1.1) позволяет сформулировать критерий базисности Рисса семейств подпространств экспонент в $L^2(0,T)$: порождающая функция должна удовлетворять условию Хельсона–Сеге (2). Отметим, что в случае, когда порождающая функция есть функция типа синуса (см. определение в [27, 15, 1]), подобная теорема была доказана Б. Я. Левиным [27].

Итак, результат В. И. Васюнина вместе с геометрическим подходом Б. С. Павлова дают описание экспоненциальных базисов из подпространств. Ясно, что, имея базис Рисса из подпространств, мы можем выбрать ортогональный базис в каждом подпространстве и получить базис Рисса из *элементов*, однако такой путь не всегда удобен, желательно иметь более явное представление.

Первый результат такого рода был получен Д. Ульрихом, который рассматривал множество Λ вида $\Lambda = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \Lambda^{(n)}$, где подмножества $\Lambda^{(n)}$ состоят из равного числа N вещественных точек $\lambda_1^{(n)},\dots,\lambda_N^{(n)}$, близких к n, т.е. $|\lambda_j^{(n)} - n| < \varepsilon$, для всех j и n. Он доказал, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$ (оценки ε не приведены) семейство линейных комбинаций экспонент $e^{i\lambda_k t}$ специального вида — разделенных разностей (PP), построенных по группах $\Lambda^{(n)}$ (см. определение 2.1 в п. 2.2), образует базис Рисса в $L^2(0,2\pi N)$. Такого рода функции возникают в вычислительной математике [31]; разделенная разность первого порядка для $e^{i\mu t}$, $e^{i\lambda t}$ есть $(e^{i\mu t} - e^{i\lambda t})/(\mu - \lambda)$. В некотором смысле результат Д. Ульриха может расматриваться как теорема о возмущении базисного семейства $\{e^{int}, te^{int},\dots,t^{N-1}e^{int}\}$, $n\in\mathbf{Z}$.

Условия этой теоремы довольно ограничительны, и поэтому она не может применяться во многих задачах, возникающих в теории управления (см., например, [6, 9, 13, 16, 17]).

В данной работе мы обобщаем результат Д. Ульриха в нескольких направлениях: множество Λ может быть сложнее, группы $\Lambda^{(n)}$ могут содержать любое число точек, вовсе не обязательно „очень" близких друг к другу (и тем более, близких к целым). Кроме того, рассматриваются и кратные точки, соответствующие элементам вида $t^m e^{i\lambda t}$; фактически дается полное описание базисов Рисса из PP.

При этом доказывается, что PP для точек $\lambda_1,\dots\lambda_N$ в фиксированном шаре образует „равномерный базис", ('a uniform basis'): базисные константы могут быть взяты независимо от расположения точек от λ_j в шаре; кроме того, разделенные разности зависят от λ_j аналитически. Все это позволяет сказать, что семейство PP является естественным базисом в ситуации, когда экспоненты $e^{i\lambda t}$ не образуют базис Рисса и даже не равномерно минимальны. Для частного случая $\Lambda = \{n\alpha\} \cup \{n\beta\}$, $n \in \mathbf{Z}$, возникающего в одной задаче управления, этот подход был реализован в [3]. В настоящей работе рассматривается пример гибридной системы, для которой мы улучшаем результаты работы В. Коморника и П. Лорети [14].

Замечание 1.2. После того, как данная работа была подготовлена к печати, авторам стала известна статья С. Байочи, В. Коморника и П. Лорети [7], в которой для случая $\Lambda \in \mathbb{R}$ анонсировано, в частности, что PP образуют базис Рисса в замыкании своей линейной оболочки в $L^2(0,T)$ при достаточно большом T. Более общие результаты см. в [4, 5].

Замечание 1.3. В серии работ [25, 26, 8, 10, 11] изучалась задача „свободной" интерполяции и в терминах разделенных разностей дано описание следов ограниченных аналитических в круге функций на конечных объединениях карлесоновых множеств. В силу известной связи интерполяции и базисности некоторые из этих результатов (см. в особенности [10, 11]) могут быть сформулированы в терминах геометрических свойств PP в $L^2(0,\infty)$.

Для случая, когда Λ не является объединением конечного числа отделимых множеств, мы доказываем один из возможных отрицательных результатов: при некоторой нумерации Λ разделенные разности не образуют равномерно минимального семейства.

§2. Основные результаты

Пусть $\Lambda = \{\Lambda_n\}$ — последовательность в $\mathbb{C}$, занумерованная таким образом, что $\Re\lambda_n$ не убывает. Мы связываем с Λ экспоненциальное семейство

$$\mathcal{E}(\Lambda) = \{e^{i\lambda_n t}, te^{\lambda_n t}, \dots, t^{m_{\lambda_n}-1}e^{i\lambda_n t}\},$$

где m_{λ_n} — кратность $\lambda_n \in \Lambda$.

Для упрощения изложения мы ограничимся случаем $\sup|\Im\lambda_n| < \infty$. Оператор умножения $f(t) \mapsto e^{-at}f(t)$ является изоморфизмом в $L^2(0,T)$ для любого T и переводит экспоненты $e^{i\lambda_n t}$ в $e^{i(\lambda_n+ia)t}$. Поскольку мы интересуемся свойством базисности линейных комбинаций функций $t^r e^{i\lambda_n t}$ в $L^2(0,T)$, мы можем без ограничения общности полагать, что Λ лежит в полосе $S := \{z \mid 0 < \alpha \leqslant \Im\lambda \leqslant \beta < \infty\}$ верхней полуплоскости.

Последовательность Λ будем называть отделимой, если выполняется условие (1). Отметим, что в этом случае все точки λ просты.

2.1. Разбиение спектра и подпространства экспонент. Введем обозначения, необходимые для формулировки основных результатов. Для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ обозначим через $D_\lambda(r)$ круг радиуса r с центром λ. Обозначим через $G^{(p)}(r)$,

$p = 1, 2, \ldots$, связные компоненты объединения $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} D_\lambda(r)$. Пусть $\Lambda^{(p)}(r)$ — подпоследовательность точек из Λ, лежащая в $G^{(p)}(r)$, $\Lambda^{(p)}(r) := \{\lambda_n \mid \lambda_n \in G^{(p)}(r)\}$, и $\mathcal{L}^{(p)}(r)$ — подпространства, образованные соответствующими экспонентами $\{t^n e^{i\lambda t}\}$, $\lambda \in \Lambda^{(p)}(r)$, $n = 0, \ldots, m_\lambda - 1$.

Лемма 2.1. *Пусть Λ есть объединение N отделимых последовательностей Λ_j,*

$$\delta_j := \delta(\Lambda_j) := \inf_{\lambda\neq\mu;\lambda,\mu\in\Lambda_j} |\lambda - \mu|, \quad \delta := \min_j \delta_j.$$

Тогда для

$$r < r_0 := \frac{\delta}{2N}$$

число $\mathcal{N}^{(p)}(r)$ элементов подпоследовательности $\Lambda^{(p)}(r)$ не превосходит N.

Доказательство. Пусть элементы μ_k, $k = 1, \ldots, N+1$, принадлежат $\Lambda^{(p)}$. Тогда расстояние между любыми двумя этими точками меньше, чем $2rN$, и, значит, меньше δ. С другой стороны, по крайней мере две из этих $N+1$ точек принадлежат одной и той же подпоследовательности Λ_j и, следовательно, расстояние между ними не меньше, чем δ. Полученное противоречие доказывает лемму. •

Будем называть *$\mathcal{L}$-базисом* семейство элементов гильбертова пространства, образующее базис Рисса в замыкании своей линейной оболочки. Мы пользуемся также понятием *$\mathcal{L}$-базиса из подпространств*, которое имеет очевидный смысл (см. (15) в п. 3.2).

Следующее утверждение является небольшой модификацией теоремы В. И. Васюнина [24].

Лемма 2.2. *Пусть Λ есть объединение конечного числа отделимых множеств. Тогда для любого $r > 0$ семейство подпространств $\mathcal{L}^{(p)}(r)$ образует $\mathcal{L}$-базис в $L^2(0, \infty)$.*

Это утверждение доказано в [24] (см. также [29, лек. IX]) для $r = r_0/16$ и для кругов в так называемой гиперболической метрике, однако легко видеть, что доказательство после небольших изменений остается справедливым для любых r.

В приложениях часто встречается случай вещественных λ. В этой ситуации можно описать объединения N отделимых последовательностей, используя иные параметры, чем в лемме 2.1. Следующее утверждение легко может быть получено тем же путем, что и лемма 2.1.

Лемма 2.3. *Вещественная последовательность Λ есть объединение N отделимых последовательностей Λ_j тогда и только тогда, когда $\inf_n(\lambda_{n+N} - \lambda_n) =: \tilde{\delta} > 0$. При этом $\min_j \delta(\Lambda_j) \leqslant \tilde{\delta}$.*

2.2. Разделенные разности. Пусть μ_k, $k = 1,\dots,m$, — произвольные комплексные числа, не обязательно различные.

Определение 2.1. Разделенная разность (PP) нулевого порядка функции $e^{i\mu t}$ есть $[\mu](t) := e^{i\mu t}$. Разделенная разность порядка $n-1$, $n \leqslant m$, отвечающая $\mu_1,\dots,\mu_n$ есть

$$[\mu_1,\dots,\mu_n] = \begin{cases} \frac{[\mu_1,\dots,\mu_{n-1}]-[\mu_2,\dots,\mu_n]}{\mu_1-\mu_n}, & \mu_1 \neq \mu_n, \\ \frac{\partial}{\partial\mu}[\mu,\mu_2,\dots,\mu_{n-1}]|_{\mu=\mu_1}, & \mu_1 = \mu_n. \end{cases}$$

Если все точки μ_k различны, легко получить явные формулы для PP:

$$[\mu_1,\dots,\mu_n] = \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{i\mu_k t}}{\prod_{j\neq k}(\mu_k-\mu_j)}. \tag{3}$$

В общей ситуации имеет место формула [31, с. 228]

$$\begin{aligned}[\mu_1,\dots\mu_n] &= \int_0^1 d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \cdots \int_0^{\tau_{n-2}} d\tau_{n-1} (it)^{n-1} \\ &\times \exp(it[\mu_1 + \tau_1(\mu_2-\mu_1) + \dots + \tau_{n-1}(\mu_n-\mu_{n-1})]).\end{aligned} \tag{4}$$

Теорема 2.1. *Справедливы следующие утверждения:*

(i) *Функции $\varphi_1 := [\mu_1],\dots,\varphi_n := [\mu_1,\dots,\mu_n]$ непрерывно и симметрично зависят от параметров μ_j, и если точки $\mu_1,\dots,\mu_n$ лежат в выпуклой области $\Omega \subset \mathbb{C}$, то*

$$|\varphi_j(t)| \leqslant c_n e^{\gamma t}, \quad \gamma := -\inf_{z\in\Omega} \Im z. \tag{5}$$

(ii) *Функции $\varphi_1,\dots,\varphi_n$, линейно-независимы.*

(iii) *Если точки $\mu_1,\dots,\mu_n$ различны, то семейство $\varphi_1,\dots\varphi_n$ образует базис в линейной оболочке экспонент $e^{i\mu_1 t},\dots,e^{i\mu_n t}$.*

(iv) *Сдвиг множества $\mu_1,\dots,\mu_n$ приводит к умножению PP на экспоненту:*

$$[\mu_1+\lambda,\dots,\mu_n+\lambda] = e^{i\lambda t}[\mu_1,\dots,\mu_n].$$

(v) *Для любого $\varepsilon > 0$ и любого $N \in \mathbb{N}$ найдется δ такое, что при любом μ, лежащем в полосе S, для любых точек $\mu_1,\dots\mu_N$, принадлежащих кругу $D_\mu(\delta)$ радиуса δ с центром в μ, справедливы оценки*

$$\|[\mu_1,\dots,\mu_j](t) - e^{i\mu t}t^{j-1}/(j-1)!\|_{L^2(0,\infty)} < \varepsilon, \quad j = 1,\dots,N.$$

2.3. Базисы из элементов. Пусть $\Lambda^{(p)}(r) = \{\lambda_{j,p}\}$, $j = 1, \ldots, \mathcal{N}^{(p)}(r)$, — множества, введенные в п. 2.1. Обозначим через $\{\mathcal{E}^{(p)}(\Lambda, r)\}$ семейство PP, соответствующее точкам множества $\Lambda^{(p)}(r)$:

$$\mathcal{E}^{(p)}(\Lambda, r) = \{[\lambda_{1,p}], [\lambda_{1,p}, \lambda_{2,p}], \ldots, [\lambda_{1,p}, \ldots, \lambda_{\mathcal{N}^{(p)},p}]\}.$$

Заметим, что $\mathcal{E}^{(p)}(\Lambda, r)$ зависит от нумерации точек в $\Lambda^{(p)}(r)$, хотя каждая PP симметрично зависит от $\lambda_{j,p}$ (см. утверждение (i) теоремы 2.1).

Теорема 2.2. *Пусть Λ есть объединение конечного числа отделимых множеств и $r < r_0$. Тогда*

(i) *Семейство $\{\mathcal{E}^{(p)}(\Lambda, r)\}$ образует базис Рисса в $L^2(0, T)$ тогда и только тогда, когда найдется целая функция F экспоненциального типа с индикаторной диаграммой ширины T и множеством нулей Λ (т.е. с нулями в точках λ_n кратности m_{λ_n} и только этими нулями) такая, что при некотором вещественном h функция $|F(x+ih)|^2$ удовлетворяет условию Хельсона–Сеге* (2).

(ii) *Если семейство $\{\mathcal{E}^{(p)}(\Lambda, r)\}$ образует $\mathcal{L}$-базис в $L^2(0, T)$, то для любой конечной последовательности $\{a_{p,j}\}$ справедливо неравенство*

$$\Big\| \sum_{p,j} a_{p,j} e^{i\lambda_{j,p} t} \Big\|^2_{L^2(0,T)} \geqslant C \sum_{p,j} |a_{p,j}|^2 \delta_p^{2(\mathcal{N}^{(p)}(r)-1)}$$

с постоянной C, не зависящей от $\{a_{p,j}\}$, где

$$\delta_p := \min\{|\lambda_{j,p} - \lambda_{k,p}| \mid k \neq j\}.$$

Предположим, что Λ не есть объединение конечного числа отделимых множеств. Тогда

$$\sup_p \mathcal{N}^{(p)}(r) = \infty \quad \text{для любого } r > 0,$$

и возможно также, что некоторые множества $\Lambda^{(p)}(r)$ содержат бесконечное число элементов.

Теорема 2.3. *Если Λ не является объединением конечного числа отделимых множеств, то для любого $r > 0$ можно занумеровать точки множеств $\Lambda^{(p)}(r)$ так, что семейство $\{\mathcal{E}^{(p)}(\Lambda, r)\}$ не является равномерно минимальным в $L^2(0, \infty)$. Более того, для любого ε найдется пара PP φ_m, φ_{m+1}, соответствующих некоторому $\Lambda^{(p)}(r)$, такая, что*

$$\angle_{L^2(0,\infty)}(\varphi_m, \varphi_{m+1}) < \varepsilon.$$

2.4. Задача наблюдения. Прежде чем давать доказательство основных результатов, мы покажем, как теорема 2.2 может быть использована при изучении наблюдаемости рассмотренной в [14] гибридной одномерной системы:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}u_1 - \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}u_1 + Au_1 + Bu_2 = 0 & \text{в } (0,\pi)\times\mathbb{R}, \\ \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}u_2 + \dfrac{\partial^4}{\partial x^4}u_2 + Cu_1 + Du_2 = 0 & \text{в } (0,\pi)\times\mathbb{R}, \\ u_1 = u_2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}u_2 = 0 & \text{для } x = 0,\pi, \\ u_1 = y_0 \in H_0^1(0,\pi), \quad \dfrac{\partial}{\partial t}u_1 = y_1 \in L^2(0,\pi) & \text{для } t = 0, \\ u_2 = \dfrac{\partial}{\partial t}u_2 = 0 & \text{для } t = 0 \end{cases}$$

(числа A, B, C, D являются константами).

Введем начальную энергию E_0 системы, $E_0 : \|y_0\|^2_{H^1} + \|y_1\|^2_{L_2}$.

В статье [14] В. Коморника и П. Лорети для почти всех наборов (A,B,C,D) при $T > 4\pi$ доказана частичная наблюдаемость системы, т.е. неравенство

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x}u_1(0,t) \right\|^2_{L^2(0,T)} \geqslant cE_0 \tag{6}$$

с постоянной c, не зависящей от y_0, y_1. Эта оценка означает, что начальное состояние может быть восстановлено по наблюдению $\frac{\partial}{\partial x}u_1(0,t)$ за время T и оператор *наблюдение* $\to$ *состояние* ограничен в соответствующей норме. Авторы статьи выдвинули гипотезу, что система частично наблюдаема уже при $T > 2\pi$. Сейчас мы докажем это утверждение, используя свойства базисности PP.

Предложение 2.1. *Оценка* (6) *справедлива при* $T > 2\pi$ *для почти всех наборов* (A,B,C,D).

Для доказательства мы будем использовать полученные в [14] представление и свойства решений. С целью применения метода Фурье введем собственные частоты системы ν_k, ω_k, $k \in \mathbb{N}$, где ν_k^2 и ω_k^2 — собственные значения матрицы

$$\begin{pmatrix} k^2 + A & B \\ C & k^4 + D \end{pmatrix}.$$

Легко получить асимптотические соотношения

$$\nu_k = k + A/2k + O(k^{-3}), \quad \omega_k = k^2 + D/2k^2 + O(k^{-6}). \tag{7}$$

Будем предполагать, что все ν_k и ω_k различны (что верно при почти всех A, B, C, D). Первая компонента решения системы может быть записана в виде

$$u_1(x,t) = \sum_{k\in\mathbf{K}} [\alpha_k e^{i\omega_k t} + \beta_k e^{i\eta_k t}] \sin kx, \tag{8}$$

где $\mathbf{K} := \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, $\omega_{-k} := -\omega_k$, $\nu_{-k} := -\nu_k$.

Коэффициенты α_k, β_k, входящие в последнюю сумму, могут быть выражены через начальные данные, и в статье [14] показано, что при нулевых начальных условиях на u_2 мы имеем

$$|\alpha_k|^2 + |\alpha_{-k}|^2 \prec k^{-8}(|\beta_k|^2 + |\beta_{-k}|^2) \tag{9}$$

и

$$E_0 \asymp \sum_{k\in\mathbb{K}} k^2|\beta_k|^2. \tag{10}$$

Соотношения (9) и (10) означают соответственно, что справедливы одно- и двусторонние неравенства с постоянными, не зависящими от последовательностей $\{\alpha_k\}$ и $\{\beta_k\}$.

Рассмотрим семейство экспонент

$$\mathcal{E} = \{e^{i\lambda t}\}_{\lambda\in\Lambda}, \quad \Lambda = M\cup\Omega, \ \ M = \{\nu_k\}, \ \ \Omega = \{\omega_k\}, \ \ k\in\mathbb{K}.$$

Для $r < 1$ и достаточно большого $|\lambda|$ множество $\Lambda^{(p)}(r)$ состоит из одной точки ν_k, если k не является полным квадратом, или из двух точек $\nu_{\operatorname{sign} k}k^2$ и ω_k. Обозначим через $\mathcal{E}^{(p)}(\Lambda, r)$ соответствующее семейство PP.

Предположим, что для любого $T > 2\pi$ найдется целая функция F экспоненциального типа с индикаторной диаграммой ширины T, обращающаяся в нуль в точах множества Λ (при этом F может иметь и другие нули) и такая, что при некотором вещественном h функция $|F(x+ih)|^2$ удовлетворяет условию Хельсона–Сеге (2). Тогда по теореме 2.2 (i) семейство $\{\mathcal{E}^{(p)}(\Lambda, r)\}$ образует $\mathcal{L}$-базис в $L^2(0,T)$. Раскладывая экспоненты по разделенным разностям нулевого и первого порядков,

$$\alpha e^{i\lambda t} + \beta e^{i\mu t} = (\alpha+\beta)e^{i\lambda t} - \beta(\lambda-\mu)[\lambda,\mu],$$

получаем для произвольных финитных последовательностей $\{p_k\}$, $\{q_k\}$ оценку

$$\Big\| \sum_{k\in\mathbf{K}} [p_k e^{i\omega_k t} + q_k e^{i\nu_k t}] \Big\|^2_{L^2(0,T)} \asymp \sum_{k\in\mathbf{K},\sqrt{|k|}\notin\mathbf{N}} |q_k|^2 + \sum_{k\in\mathbf{K}} \big[|p_k + q_{\operatorname{sign} kk^2}|^2 + |\omega_k - \nu_{\operatorname{sign} kk^2}|^2 |q_{\operatorname{sign} kk^2}|^2\big]. \tag{11}$$

В правой части этого соотношения первая сумма соответствует одномерным подпространствам $\mathcal{L}^{(p)}(\Lambda, r)$ (эта сумма берется по всем k, не являющимся полными квадратами). Вторая сумма отвечает двумерным подпространствам. В силу (8), (11) получаем оценку

$$\left\|\frac{\partial}{\partial x}u_1(0,t)\right\|^2_{L^2(0,T)} = \left\|\sum_{k\in\mathbb{K}} k[\alpha_k e^{i\omega_k t} + \beta_k e^{i\nu_k t}]\right\|^2_{L^2(0,T)}$$
$$\succ \sum_{k\in\mathbb{K}, \sqrt{|k|}\notin\mathbb{N}} k^2|\beta_k|^2$$
$$+ \sum_k [|\omega_k - \nu_{\operatorname{sign} kk^2}|^2 |k^2\beta_{\operatorname{sign} kk^2|^2}|^2 + |k\alpha_k + k^2\beta_{\operatorname{sign} kk^2}|^2].$$

Используя (9), для больших R имеем

$$\sum_{|k|>R} [k\alpha_k + k^2\beta_{\operatorname{sign} kk^2}] \succ \sum_{|k|>R} k^2|\beta_{\operatorname{sign} kk^2}|^2.$$

Следовательно,

$$\left\|\frac{\partial}{\partial x}u_1(0,t)\right\|^2_{L^2(0,T)} \succ \sum_{k\in\mathbb{K}} k^2|\beta_k|^2 \asymp E_0.$$

Чтобы закончить доказательство предложения 2.1, осталось построить функцию F. Для этого нам понадобится следующий результат, представляющий самостоятельный интерес.

Предложение 2.2. *Пусть* $\Lambda = \{\lambda_n\}$ *есть множество нулей функции типа синуса (см. определение в* [27, 15, 1]) *с индикаторной диаграммой ширины* 2π, $\{\delta_n\}$ *— ограниченная последовательность комплексных чисел, и* F *— целая функция класса Картрайт* [1, с. 60] *с множеством нулей* $\{\lambda_n + \delta_n\}$. *Если*

$$\lim_{N\to\infty} \sup_n \frac{1}{N}\left|\Re(\delta_{n+1} + \delta_{n+2} + \cdots + \delta_{n+N})\right| =: d < \frac{1}{4},$$

то ширина индикаторной диаграммы F *равна* 2π, *и для любого* $d_1 > d$ *и любого* h, $|h| > \sup|\Im(\lambda_n + \delta_n)|$, *можно найти функции* u, $v \in L^\infty(\mathbb{R})$, $\|v\|_{L^\infty(\mathbb{R})} < 2\pi d_1$, *такие, что*

$$|F(x+ih)|^2 = \exp\{u(x) + \tilde{v}(x)\}.$$

Для проверки этого утверждения можно использовать лемму 1 работы [22] и, следуя доказательству леммы 2 той же работы [22], показать, что при любом $d_1 > d$ найдется функция типа синуса с нулями μ_n, для которой выполнено соотношение

$$d_1\Re(\mu_{n-1} - \mu_n) \leqslant \Re(\lambda_n + \delta_n - \mu_n) \leqslant d_1\Re(\mu_{n+1} - \mu_n).$$

Теперь предложение 2.2 непосредственно следует из лемм 1, 2 работы [2].

Для построения функции F положим сначала

$$F_1(z) := z\prod_{n\in\mathbb{N}}\left(1 - z^2/\nu_n^2\right).$$

Ввиду предложения 2.2 и асимптотики (7) чисел ν_k для любого $\varepsilon > 0$ справедливо представление

$$|F_1(x+ih)|^2 = \exp\{u(x) + \tilde{v}(x)\}, \tag{12}$$

где $u,\ v \in L^\infty(\mathbb{R})$ и $\|v\|_{L^\infty(\mathbb{R})} < \varepsilon$.

Далее, для произвольного фиксированного $\delta > 0$ возьмем функцию $\sin\pi\delta z/2$ и для каждого k найдем нуль $2n_k/\delta$ этой функции, ближайший к ω_k. Положим

$$F_2(z) := z\prod_{n\in\mathbf{N}}\left(1 - z^2/\mu_n^2\right),$$

где

$$\mu_n = \begin{cases} 2n/\delta & \text{при } n \notin \{n_k\}, \\ \omega_k & \text{при } n = n_k. \end{cases}$$

Снова используя предложение 2.2, заключаем, что при любом $\varepsilon > 0$ для F_2 справедливо представление, аналогичное (12), и ширина индикаторной диаграммы функции F_2 равна δ.

Функция $F = F_1F_2$ имеет индикаторную диаграмму ширины $2\pi + \delta$, обращается в нуль на множестве Λ и удовлетворяет (2). Тем самым предложение 2.1 доказано.

§3. Доказательства теорем

3.1. Доказательство теоремы 2.1. (i) Непрерывность по параметрам $\{\mu_k\}$ и оценка (5) сразу следуют из представления (4). Из (3) видно, что симметричность PP очевидным образом имеет место при условии, что все точки $\{\mu_k\}$ различны. В силу непрерывности мы получаем симметричность для любых точек в том смысле, что если σ есть перестановка множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, то $[\mu_1, \ldots, \mu_n] = [\mu_{\sigma(1)}, \ldots, \mu_{\sigma(n)}]$.

Опишем структуру PP. Пусть $z_1, z_2, \ldots, z_n$ — комплексные числа, не обязательно различные. Представим это семейство как объединение q различных точек, $\nu_1, \ldots, \nu_q$, каждая из которых берется $m_1, \ldots, m_q$ раз соответственно; $m_1 + m_2 + \cdots + m_q = n$.

Лемма 3.1. *Разделенная разность* $[z_1, \ldots, z_n]$ *порядка* $n-1$ *есть линейная комбинация функций*

$$t^m e^{i\nu_k t}, \quad k = 1, \ldots, q, \ m = 0, 1, \ldots, m_k - 1,$$

и все коэффициенты при старших членах $t^{m_k-1}e^{i\nu_k t}$ *отличны от нуля.*

Доказательство. При $n = 1$ утверждение очевидно. Предположим, что оно верно для PP порядка $n-2$.

Если $z_1 \neq z_n$, то по определению $[z_1, \ldots, z_n]$ есть линейная комбинация разделенных разностей $[z_1, \ldots, z_{n-1}]$ и $[z_2, \ldots, z_n]$ порядка $n-2$. Кратность точки z_n во множестве $\{z_2, \ldots, z_n\}$ больше, чем в $\{z_1, \ldots, z_{n-1}\}$. Если k — такой номер, что $z_n = \nu_k$, то ведущий член $t^{m_k-1}e^{i\nu_k t}$ имеется в $[z_2, \ldots, z_n]$ по индуктивному предположению и отсутствует в $[z_1, \ldots, z_{n-1}]$.

Пусть $z_1 = z_n$. Тогда $[z_1, \ldots, z_{n-1}]$ содержит ведущий член $t^{m_1-2}e^{i\nu_1 t}$. При дифференцировании по z_1 мы получаем член $t^{m_1-1}e^{i\nu_1 t}$ с ненулевым коэффициентом. Привлекая симметрию PP относительно точек $z_1, \ldots, z_n$, завершаем доказательство леммы. •

Продолжим доказательство теоремы 2.1.

Утверждение (ii) является следствием „треугольной структуры“ PP: PP порядка $n-1$ по сравнению с PP порядка $n-2$ содержит либо новую экспоненту, либо член вида $t^m e^{i\nu_p t}$ с той же самой частотой ν_p и большей степенью m.

(iii) Если все точки $\mu_1, \ldots, \mu_n$ различны, то семейство PP содержит все экспоненты $e^{i\mu_1 t}, \ldots, e^{i\mu_n t}$.

Утверждение (iv) непосредственно вытекает из определения.

(v) Как хорошо известно, PP аппроксимируют производные соответствующего порядка. Нам понадобится следующая оценка из [20].

Предложение 3.1. *Для любых* $\varepsilon > 0$, $N \in \mathbb{N}$, *найдется такое число* δ, *что для произвольного набора точек* $\{z_j\}_{j=1}^N$, *лежащего в круге* $D_0(\delta)$ *радиуса* δ *с центром в начале координат, справедливы оценки*

$$|[z_1, \ldots, z_j](t) - t^{j-1}/(j-1)!| < \varepsilon, \quad j = 1, \ldots, N, \tag{13}$$

при $t \in [-\pi N, \pi N]$.

Выберем теперь T достаточно большим так, что

$$\|[\mu_1, \ldots, \mu_j]\|_{L^2(T,\infty)} < \varepsilon/3, \ \|e^{i\mu t}t^{j-1}/(j-1)!\|_{L^2(T,\infty)} < \varepsilon/3, \quad j = 1, \ldots, N, \tag{14}$$

при всех μ, $\mu_1, \ldots, \mu_j$ в полосе S.

Положим $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{3\sqrt{T}}$ и возьмем δ настолько малым, чтобы неравенство (13) выполнялось при данном ε_1, $t \in [0,T]$ и при любых $\{z_j\}_{j=1}^N \subset D_0(\delta)$. Если теперь взять $z_j := \mu_j - \mu$, то в силу (iv) получаем

$$|e^{-i\mu t}[\mu_1,\dots,\mu_j](t) - t^{j-1}/(j-1)!| < \varepsilon_1, \quad j = 1,\dots,N, \ t \leqslant T,$$

что дает

$$|[\mu_1,\dots,\mu_j](t) - e^{i\mu t}t^{j-1}/(j-1)!| < \frac{\varepsilon}{3\sqrt{T}}, \quad j = 1,\dots,N,$$

при $t \leqslant T$. Следовательно,

$$\|[\mu_1,\dots,\mu_j](t) - e^{i\mu t}t^{j-1}/(j-1)!\|_{L^2(0,T)} < \varepsilon/3, \quad j = 1,\dots,N.$$

Принимая во внимание (14), приходим к утверждению (v). •

3.2. Доказательство теоремы 2.2. (i) Из леммы 2.2 следует, что семейство подпространств $\{\mathcal{L}^{(p)}\} := \{\mathcal{L}^{(p)}(r)\}$ образует базис Рисса в замыкании своей линейной оболочки (т.е. $\mathcal{L}$-базис) в $L^2(0,\infty)$. Введем ортопроектор P_T из этого замыкания в $L^2(0,T)$. Семейство $\{\mathcal{L}^{(p)}\}$ образует базис Рисса в $L^2(0,T)$ тогда и только тогда, когда P_T является изоморфизмом на $L^2(0,T)$ (см. [15, 1, гл. 1]). Последнее равносильно тому, что порождающая функция семейства $\mathcal{E}(\Lambda)$ удовлетворяет условию Хельсона–Сеге (2) (см. [15, 1, теоремы II.3.14, II.3.17]).

$\mathcal{L}$-базисность семейства подпространств $\mathcal{L}^{(p)}$ означает, что для любого конечного числа функций $\psi_p \in \mathcal{L}^{(p)}$ справедливы оценки:

$$\left\|\sum_p a_p\psi_p\right\|^2_{L^2(0,\infty)} \asymp \sum_p |a_p|^2\|\psi_p\|^2_{L^2(0,\infty)}. \tag{15}$$

Как пояснялось в п.2.4, это соотношение означает, что справедливы двусторонние неравенства с постоянными, не зависящими от последовательностей $\{a_p\}$ и $\{\psi_p\}$.

Возьмем в каждом подпространстве $\mathcal{L}^{(p)}$ семейство PP, соответствующих $\lambda_{j,p} \in \Lambda^{(p)}$: $\varphi_j^{(p)} := [\lambda_{1,p}, \lambda_{2,p},\dots,\lambda_{j,p}]$, $j = 1,\dots,\mathcal{N}^{(p)}$. В силу теоремы 2.1 это семейство образует базис Рисса в $\mathcal{L}^{(p)}$.

Разложим ψ_p по базису $\{\varphi_j^{(p)}\}_{j=1}^{j=\mathcal{N}^{(p)}}$. Тогда утверждение (i) теоремы эквивалентно оценкам

$$\left\|\sum_{p,j} a_{p,j}\varphi_j^{(p)}\right\|^2_{L^2(0,\infty)} \asymp \sum_{p,j} |a_{p,j}|^2. \tag{16}$$

Учитывая (15), мы видим, что (16), в свою очередь, эквивалентно равномерным по p оценкам

$$\Big\| \sum_j a_j \varphi_j^{(p)} \Big\|^2_{L^2(0,\infty)} \asymp \sum_j |a_j|^2. \tag{17}$$

Введем $\mathcal{N}^{(p)} \times \mathcal{N}^{(p)}$ матрицы Грама $\Gamma^{(p)}$, отвечающие семействам $\mathcal{E}^{(p)}$,

$$\Gamma^{(p)} := \{(\varphi_k^{(p)} \varphi_j^{(p)})_{L^2(0,\infty)}\}_{k,j}.$$

Для $\mathcal{N}^{(p)}$-мерного вектора a получаем

$$\Big\| \sum_j a_j \varphi_j^{(p)} \Big\|^2_{L^2(0,\infty)} = \langle \Gamma^{(p)} a, a \rangle,$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ есть скалярное произведение в $\mathbb{R}^{\mathcal{N}(p)}$.

Соотношение (17) означает в терминах матриц Грама, что все матрицы $\Gamma^{(p)}$ вместе с обратными равномерно по p ограничены.

Лемма 3.2. *Пусть точки $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ различны и лежат в круге $D_\mu(R)$ радиуса R с центром в μ, $\mu \in S$; пусть $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ — соответствующие PP, а Γ — матрица Грама этого семейства в пространстве $L^2(0,\infty)$. Тогда нормы $\langle\langle \Gamma \rangle\rangle$ и $\langle\langle \Gamma^{-1} \rangle\rangle$ оцениваются сверху постоянными, зависящими лишь от R и n.*

Доказательство. По теореме 2.1 функции $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$ оцениваются сверху постоянными, зависящими лишь от R, n. Следовательно, элементы матрицы Грама также оцениваются через $\mathrm{const}(R,n)$, что дает требуемую оценку Γ сверху.

Докажем оценку обратной матрицы от противного. Фиксируем круг $D_\mu(R)$ и предположим, что для любого $\varepsilon > 0$ найдутся различные точки $\mu_1^{(\varepsilon)}$, $\mu_2^{(\varepsilon)}, \dots, \mu_n^{(\varepsilon)}$, лежащие в этом круге, и нормированные n-мерные векторы $a^{(\varepsilon)}$ такие, что соответствующие матрицы Грама $\Gamma^{(\varepsilon)}$ „ε-вырождены“:

$$\langle \Gamma^{(\varepsilon)} a^{(\varepsilon)}, a^{(\varepsilon)} \rangle \leqslant \varepsilon. \tag{18}$$

Используя соображения компактности, выберем последовательность $\varepsilon_n \to 0$, векторы $a^{(\varepsilon_n)}$ и числа $\mu_j^{(\varepsilon_n)}$ так, чтобы

$$a^{(\varepsilon_n)} \to a^0, \quad \mu_j^{(\varepsilon_n)} \to \mu_j^0$$

при $n \to \infty$. Тогда соответствующие матрицы Грама стремятся к матрице Грама Γ^0 предельного семейства, и из (18) вытекает, что

$$\langle \Gamma^0 a^0, a^0 \rangle = 0.$$

Поэтому $\Sigma a_j^0 \varphi_j^0 = 0$, и предельное семейство разделенных разностей линейно зависимо, что противоречит теореме 2.1(ii).

Итак, доказано, что матрицы Γ^{-1} оцениваются сверху постоянными, зависящими лишь от R, n, и μ. Привлекая теорему 2.1(iv), видим, что постоянные зависят фактически не от μ, а от $\Im\mu$. Действительно, сдвиг круга на вещественное число $\mu \mapsto \mu + x$ не меняет матрицу Грама. Поскольку $\alpha \leqslant \Im\mu \leqslant \beta$ в полосе S, все матрицы оцениваются равномерно по $\mu \in S$. •

В лемме предполагалось, что все точки $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ различны. Для совпадающих точек с помощью предельного перехода получаем, что все матрицы Γ_p, Γ_p^{-1} ограничены равномерно по p.

Утверждение (i) теоремы 2.2 доказано.

(ii) нам требуется оценить снизу в $L^2(0,T)$ матрицу Грама Γ для экспоненциального семейства $\{e^{i\mu_1 t}, \ldots, e^{i\mu_n t}\}$, где $\{\mu_j\} = \Lambda^{(p)}$ при некотором p и $n = \mathcal{N}^{(p)}$. Поскольку проектор P_T является изоморфизмом (см. (i)), мы можем делать это для экспонент на положительной полуоси, т.е. в $L^2(0,\infty)$. Обозначим через $e_j(t)$ нормированные экспоненты $e_j(t) := \frac{1}{\sqrt{2\Im\mu_j}} e^{i\mu_j t}$. Для отвечающей этим функциям матрицы Грама Γ_0 имеем

$$\Gamma = \operatorname{diag}[\sqrt{2\Im\mu_j}]\Gamma_0 \operatorname{diag}[\sqrt{2\Im\mu_j}],$$

и мы можем оценивать Γ_0 вместо Γ, так как $|\Im\mu_j| \asymp 1$. Легко видеть, что обратная матрица к Γ_0 есть матрица Грама для биортогонального семейства $e_j'(t)$ и

$$(\Gamma_0)_{jj}^{-1} = \|e_j'\|^2 = \prod_{k \neq j} \left| \frac{\mu_k - \overline{\mu}_j}{\mu_k - \mu_j} \right|^2$$

[29, 1]. Элементарные вычисления дают оценку

$$(\Gamma_0)_{jj}^{-1} = \|e_j'(t)\|^2 \prec \delta_p^{-2(n-1)}.$$

Тогда

$$|(\Gamma_0)_{jk}^{-1}| = (e_j', e_k') \leqslant \|e_j'\| \|e_k'\| \prec \delta_p^{-2(n-1)},$$

что приводит к

$$\langle\langle \Gamma_0^{-1} \rangle\rangle \prec \delta_p^{-2(n-1)}.$$

Теорема доказана. •

3.3. Доказательство теоремы 2.3. Как известно, семейство степеней $\{t^n\}$, $n = 0, 1, \ldots$, не минимально в $L^2(0,T)$ при любом T; более того, прямые вычисления для семейства $\varphi_j^0 := e^{i\mu t} t^{j-1}/(j-1)!$ дают

$$\angle_{L^2(0,\infty)}(\varphi_m^0, \varphi_{m+1}^0) \to 0, \quad m \to \infty,$$

равномерно по $\mu \in S$. Поскольку Λ не есть объединение конечного числа отделимых множеств, для любых $\delta, m \in \mathbb{N}$ можно найти круг $D_\mu(\delta)$, лежащий в полосе S, который содержит m точек спектра. По теореме 2.1(v) отвечающие этим точкам PP ε-близки к „невозмущенным функциям“ φ_j^0. Это доказывает теорему.

Список литературы

[1] Avdonin S. A., Ivanov S. A., *Families of exponentials. The method of moments in controllability problems for distributed parameter systems*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.

[2] Avdonin S. A., Joó I., *Riesz bases of exponentials and sine-type functions*, Acta Math. Hungar. **51** (1988), 3–14.

[3] Avdonin S. A., Tucsnak M., *Simultaneous controllability in short time of two elastic strings*, ESAIM Conrol Optim. Calc. Var. (в печати).

[4] Avdonin S., Moran W., *Simultaneous control problems for systems of elastic strings and beams*, Systems Control Lett. (в печати).

[5] Avdonin S., Moran W., *Ingham type inequalities and Riesz bases of divided differences*, Appl. Math. Comput. Sci. (в печати).

[6] Baiocchi C., Komornik V., Loreti P., *Ingham type theorems and applications to control theory*, Boll. Un. Mat. Ital. Sez. B Artic. Ric. Mat. (8) **2** (1999), no. 1, 33–63.

[7] Baiocchi C., Komornik V., Loreti P., *Généralisation d'un théorème de Beurling et application à la théorie du contrôle*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **330** (2000), no. 4, 281–286.

[8] Bruna J., Nicolau A., Øyma K., *A note on interpolation in the Hardy spaces of the unit disk*, Proc. Amer. Math. Soc. **124** (1996), 1197–1204.

[9] Castro C., Zuazua E., *Boundary controllability of a hybrid system consisting in two flexible beams connected by a point mass*, SIAM J. Control Optim. **36** (1998), 1576–1595 (electronic).

[10] Hartmann A., *Une approche de l'interpolation libre généralisée par la théorie des opérateurs et caractérisation des traces $H^p|_\Lambda$*, J. Operator Theory **35** (1996), no. 2, 281–316.

[11] Hartmann A., *Traces of certain classes of holomorphic functions on finite unions of Carleson sequences*, Glasgow Math. J. **41** (1999), 103–114.

[12] Hansen S., Zuazua E., *Exact controllability and stabilization of a vibrating string with an interior point mass*, SIAM J. Control Optim. **33** (1995), 1357–1391.

[13] Jaffard S., Tucsnak M., Zuazua E., *Singular internal stabilization of the wave equation*, J. Differential Equations **145** (1998), 184–215.

[14] Komornik V., Loreti P., *Partial observability of coupled linear systems*, Acta Math. Hungar. **86** (2000), no. 1/2, 49–74.

[15] Khrushchëv S. V., Nikol'skiĭ N. K., Pavlov B. S., *Unconditional bases of exponentials and of reproducing kernels*, Complex Analysis and Spectral Theory (Leningrad, 1979/1980), Lecture Notes in Math., vol. 864, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1981, pp. 214–335.

[16] López A., Zuazua E., *Null controllability of the 1-d heat equation as limit of the controllability of dissipative wave equations*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **327** (1998), no. 8, 753–758.

[17] Micu S., Zuazua E., *Boundary controllability of a linear hybrid system arising in the control of noise*, SIAM J. Control Optim. **35** (1997), 1614–1637.

[18] Paley R. E. A. C., Wiener N., *Fourier transforms in the complex domain*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol. 19, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1934.

[19] Russell D. L., *Controllability and stabilizability theory for linear partial differential equations: recent progress and open questions*, SIAM Rev. **20** (1978), no. 4, 639–739.

[20] Ullrich D., *Divided differences and systems of nonharmonic Fourier series*, Proc. Amer. Math. Soc. **80** (1980), no. 1, 47–57.

[21] Young R. M., *An introduction to nonharmonic Fourier series*, Pure Appl. Math., vol. 93, Academic Press, Inc., New York-London, 1980.

[22] Авдонин С. А., *К вопросу о базисах Рисса из показательных функций в L^2*, Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат., мех., астроном. **1974**, вып. 3, 5–12.

[23] Бутковский А. Г., *Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами*, Наука, М., 1965.

[24] Васюнин В. И., *Безусловно сходящиеся спектральные разложения и задачи интерполяции*, Тр. Мат. ин-та АН СССР **130** (1978), 5–49.

[25] Васюнин В. И., *Следы ограниченных аналитических функций на конечных объединениях множеств Карлесона*, Зап. науч. семин. ЛОМИ **126** (1983), 31–34.

[26] Васюнин В. И., *Характеризация конечных объединений множеств Карлесона в терминах разрешимости интерполяционных задач*, Зап. науч. семин. ЛОМИ **135** (1984), 31–35.

[27] Левин Б. Я., *О базисах показательных функций в L^2*, Зап. мат. отд. физ.-мат. фак-та Харьков. ун-та и Харьков. мат. о-ва **27** (1961), 39–48.

[28] Минкин А. М., *Отражение показателей и безусловные базисы из экспонент*, Алгебра и анализ **3** (1991), 109–134.

[29] Никольский Н. К., *Лекции об операторе сдвига*, Наука, М., 1980.

[30] Павлов Б. С., *Базисность системы экспонент и условие Макенхаупта*, Докл. АН СССР **247** (1979), 37–40.

[31] Шилов Г. Е., *Математический анализ. Второй спецкурс*, Наука, М., 1965.

Department Mathematics and Statistics
The Flinders University of South Australia
GPO Box 2100, Adelaide SA 5001, Australia
E-mail: avdonin@ist.flinders.edu.au

Поступило 27 августа 2000 г.

С.-Петербургский
государственный унниверситет
факультет прикладной математики
и процессов управления
198904, Санкт-Петербург
Петродворец, Библиотечеая пл., 2

С.-Петербургский
государственный унниверситет
Российский центр лазерной физики
198904, Санкт-Петербург
Петродворец, Ульяновская, 1
E-mail: Sergei.Ivanov@pobox.spbu.ru