Рассмотрим семейство $A_z[\cdot, \cdot]$ форм вида (3), аналитически зависящих от параметра $z \in D$ и таких, что $A_z \in E(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ с одними и теми же постоянными $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ для всех $z \in D$.

Теорема 2. *Предположим, что при $z \in \Delta$ операторы $A_z^\varepsilon$ допускают усреднение. Тогда такое усреднение существует при всех $z \in D$, причем коэффициенты $\hat{a}^z_{\alpha\beta}$ усредненного оператора $\hat{A}_z$ аналитичны при $z \in D$.*

Доказательство. Существование и аналитичность абстрактного оператора $\hat{A}_z$, $z \in D$, являющегося $G$-пределом $A_z^\varepsilon$, непосредственно вытекает из леммы 1. Применение теоремы Витали к аналитической в $D$ вектор-функции в левой части (4) (с заменой $a_{\alpha\beta}(x/\varepsilon)$ на $a^z_{\alpha\beta}(x/\varepsilon)$) показывает, что $\hat{A}_z$ является также сильным $G$-пределом. Полученные в [1] для случая вещественных коэффициентов результаты о структуре сильного $G$-предела полностью распространяются на рассматриваемую ситуацию и позволяют утверждать, что $\hat{A}_z \in E(\lambda_0, \hat{\lambda}_1, \lambda_2)$.

Чтобы установить постоянство и аналитическую зависимость от $z \in D$ коэффициентов $\hat{a}^z_{\alpha\beta}$ оператора $\hat{A}_z$, рассмотрим, следуя [1], функционалы

$$\Pi_\rho^{x_0}(\hat{A}_z, \xi, \eta) = |B_\rho^{x_0}|^{-1} \sum_{|\alpha|,\, |\beta| \leqslant m} \int_{B_\rho^{x_0}} \hat{a}^z_{\alpha\beta}(x)\, \partial^\beta u_\xi^\rho(x)\, \eta_\alpha dx,$$

где $B_\rho^{x_0}$ — шар радиуса $\rho$ с центром в точке $x_0 \in \Omega$, $|B_\rho^{x_0}|$ — его объем, $u_\xi^\rho$ — решение задачи Дирихле $\hat{A}_z u_\xi^\rho = 0$ в $B_\rho^{x_0}$, $u_\xi^\rho = \sum_{|\gamma| \leqslant m} (\gamma!)^{-1} (x - x_0)^\gamma \xi_\gamma$ на границе $\partial B_\rho^{x_0}$, $\gamma$ — мультииндекс, $\xi, \eta \in \mathbf{R}^p$, где $p$ — число мультииндексов $\gamma$ с $|\gamma| \leqslant m$.

Из аналитичности $\hat{A}_z$ и соответствующих вектор-функций вида (4) вытекает, что $\Pi_\rho^{x_0}(\hat{A}_z, \xi, \eta)$ является аналитической функцией при $z \in D$ для любых $\xi, \eta \in \mathbf{R}^p$, $x_0 \in \Omega$. Поскольку коэффициенты $\hat{A}_z$, а вместе с ними и $\Pi_\rho^{x_0}(\hat{A}_z, \xi, \eta)$ при $z \in \Delta$ не зависят от $x_0 \in \Omega$, то отсюда следует, что $\Pi_\rho^{x_0}(\hat{A}_z, \xi, \eta)$ не зависит от $x_0$ и при $z \in D$. Установленные в [1] соотношения между функционалами $\Pi_\rho^{x_0}(\hat{A}_z, \xi, \eta)$ и коэффициентами $\hat{a}^z_{\alpha\beta}(x_0)$ показывают теперь, что последние не зависят от $x_0 \in \Omega$ и аналитичны при $z \in D$.

## Литература


1. Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А., Ха Тьен Нгоан.— Успехи мат. наук, 1979, т. 34, вып. 5, с. 65—130.
2. L. K. H. van Beek. Dielectric behaviour of heterogeneous systems.— Progress in Dielectrics, 1967, vol. 7, p. 69—114.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред.— М.: Физматгиз, 1959.— 532 с.
4. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы.— М.: Изд-во иностр. лит., 1962.— 630 с.



*Ленинградский горный институт им. Г. В. Плеханова*



*Поступила в редакцию 12 января 1982 г.*



*УДК 517.927.25*



В. В. ДУБРОВСКИЙ


# О ФОРМУЛАХ РЕГУЛЯРИЗОВАННЫХ СЛЕДОВ САМОСОПРЯЖЕННЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Пусть $T$ — дискретный самосопряженный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве $H$, $P$ — ограниченный самосопряженный оператор, действующий в $H$, $\sigma(T) = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n$, $\sigma(T+P) = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} \mu_n$ — спектры операторов $T$, $T+P$ соответственно, занумерованные в порядке возрастания собственных чисел с учетом геометрической кратности; $\lambda_n \sim Cn$, $C > 0$.

Обозначим

$$\alpha_{t-1}(n_k, n_{-k}, T, P) = -\frac{1}{2\pi i} \operatorname{Sp}\Big[ \int_{\operatorname{Re}\lambda = (\lambda_{n_k} + \lambda_{n_k+1})/2} -$$

$$-\int\limits_{\mathrm{Re}\lambda=(\lambda_{n_{-k}}+\lambda_{n_{-k}+1})/2}(-1)^t\lambda(R(\lambda, T)P)^t R(\lambda, T)\,d\lambda,$$

где $t\geqslant 1$, $R(\lambda, T)=(T-\lambda E)^{-1}$, а через Sp обозначен матричный след оператора.

Очевидно верна

Лемма. *Существует последовательность целых чисел* $\{n_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ *такая, что* $|\lambda n_{k+1}-\lambda n_k|\geqslant C/2$ *для любого* $k$.

Сформулируем основную теорему.

Теорема 1. *Если* $2\|P\|C^{-1}<1$, *то существует подпоследовательность натуральных чисел* $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ *такая, что справедлива формула*

$$\lim_{k\to\infty}\left\{\sum_{n_{-k}\leqslant i\leqslant n_k}(\mu_i-\lambda_i)-\sum_{j=0}^{m_k}\alpha_j(n_k, n_{-k}, T, P)\right\}=0.$$

Доказательство. Очевидно, что

$$\sum_{n_{-k}\leqslant i\leqslant n_k}(\mu_i-\lambda_i)-\alpha_0(n_k, n_{-k}, T, P)-\ldots-$$

$$-\alpha_t(n_k, n_{-k}, T, P)-\beta_t(n_k, n_{-k}, T, P)=0,$$

$$\beta_t(n_k, n_{-k}, T, P)=\mathrm{Sp}-\frac{1}{2\pi i}\Bigg[\int\limits_{\mathrm{Re}\lambda=(\lambda_{n_k}+\lambda_{n_k+1})/2}-$$

$$-\int\limits_{\mathrm{Re}\lambda=(\lambda_{n_{-k}}+\lambda_{n_{-k}+1})/2}\{(-1)^{t+1}\lambda((T-\lambda E)^{-1}P)^{t+1}(T+P-\lambda E)^{-1}\}\,d\lambda\Bigg].$$

Докажем сначала, что $\|(T-\lambda E)^{-1}\|_2^2\leqslant \mathrm{const}\,|n_k|$ при $\mathrm{Re}\,\lambda=(\lambda_{n_k}+\lambda_{n_k+1})/2$, где $\|A\|_2$ — норма Гильберта — Шмидта оператора $A$. Обозначим $\mathrm{Im}\,\lambda=\rho$. Имеем

$$\|(T-\lambda E)^{-1}\|_2^2\leqslant \mathrm{const}\sum_{i=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left(\lambda_i-\dfrac{\lambda_{n_k}+\lambda_{n_k+1}}{2}\right)^2+\rho^2}\leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{const}\left[\sum_{i\geqslant ln_k}\frac{1}{\left(\lambda_i-\dfrac{\lambda_{n_k}+\lambda_{n_k+1}}{2}\right)^2}+\right.$$

$$+\sum_{-ln_k<i<ln_k}\frac{1}{\left(\lambda_i-\dfrac{\lambda_{n_k}+\lambda_{n_k+1}}{2}\right)^2}+$$

$$+\sum_{i\leqslant -ln_k}\frac{1}{\left(\lambda_i-\dfrac{\lambda_{n_k}+\lambda_{n_k+1}}{2}\right)^2}\equiv J_1+J_2+J_3,$$

где $l$ выбрано так, что $l\geqslant 3$ при $n_k$ достаточно большом. Оценим каждое из $J_1$, $J_2$, $J_3$:

$$J_1=\mathrm{const}\sum_{i\geqslant ln_k}\frac{1}{\left(\lambda_i-\dfrac{\lambda_{n_k}+\lambda_{n_k+1}}{2}\right)^2}\leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{const}\sum_{i\geqslant ln_k}\frac{1}{\left|C/2i-\dfrac{3C}{2}n_k\right|^2}\leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{const}\max_{i\geqslant ln_k}\frac{1}{\left|C/2-\dfrac{3C}{2}\dfrac{n_k}{i}\right|^2}\sum_{i\geqslant ln_k}1/i^2\leqslant \mathrm{const},$$

$$J_2=\mathrm{const}\sum_{-ln_k<i<ln_k}\frac{1}{(\lambda_i-(\lambda_{n_k}+\lambda_{n_k+1})\cdot 2^{-1})^2}\leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{const}\frac{2ln_k}{(C\cdot 2^{-1})^2}\leqslant \mathrm{const}\,|n_k|.$$

$J_3$ оценивается точно так же, как $J_1$. После этого неравенство для $\|(T-\lambda E)^{-1}\|_2^2$ становится доказанным.

Оценим $\beta_i(n_k, n_{-k}, T, P)$:

$$|\beta_t(n_k, n_{-k}, T, P)| = \Bigg| -\frac{1}{2\pi i}\operatorname{Sp}\Bigg[\int\limits_{\operatorname{Re}\lambda=(\lambda_{n_k}+\lambda_{n_k+1})/2} - $$

$$- \int\limits_{\operatorname{Re}\lambda=(\lambda_{n_{-k}}+\lambda_{n_{-k}+1})/2} \lambda(-1)^{t+1}((T-\lambda E)^{-1}P)^{t+1}(T+P-\lambda E)^{-1}\,d\rho\Bigg]\Bigg| \leqslant$$

$$\leqslant \operatorname{const}\Bigg[\int\limits_{\operatorname{Re}\lambda=(\lambda_{n_k}+\lambda_{n_k+1})/2} + \int\limits_{\operatorname{Re}\lambda=(\lambda_{n_{-k}}+\lambda_{n_{-k}+1})/2} |\lambda|\,\|(T-\lambda E)^{-1}\|_2^2 \times$$

$$\times \|P\|^{t+1}\frac{d\rho}{(\rho^2+C/2)^t}\Bigg] \leqslant \operatorname{const}\|P\|^{t+1}\max{}^2(|n_k|, |n_{-k}|)(C\cdot 2^{-1})^{t-3}\times$$

$$\times \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{|\rho|}{(|\rho|+C\cdot 2^{-1})^3}\,d\rho \leqslant \operatorname{const}(2\|P\|C^{-1})^{t-3}\times$$

$$\times \max{}^2(|n_k|, |n_{-k}|) \to 0,\ t\to\infty.$$

Следовательно, требуемая подпоследовательность $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ существует. Теорема доказана.

Если $P'$ — ограниченный самосопряженный оператор в $H$ такой, что $2C^{-1}\|P-P'\| < 1$, и если собственные значения $\mu_n'$ оператора $T+P'$ имеют ту же асимптотику, что и $T$, т. е. $\mu_n' \sim Cn$, то верна

Теорема 2. *Существует такая подпоследовательность $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ натуральных чисел, что верна формула*

$$\lim_{k\to\infty}\left\{\sum_{n_{-k}\leqslant i\leqslant n_k}(\mu_i-\mu_i') - \sum_{j=0}^{m_k}\alpha_j(n_k, n_{-k}, T+P', P-P')\right\} = 0.$$

Применим полученные результаты к $T$ — оператору Лапласа на прямоугольнике $\Pi=\{0<x<a,\ 0<y<b\}$ с краевыми условиями Дирихле, $P$ — оператор умножения на вещественную существенно ограниченную функцию $p(x, y)$, $\lambda_n \sim 4\pi(ab)^{-1}n$, $n>0$. Справедлива [1]

Теорема 3. *Если $ab\|P\|_\infty(4\pi)^{-1}<1$, то существуют также две подпоследовательности натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ такие, что верна формула*

$$\lim_{k\to\infty}\left\{\sum_{i\leqslant n_k}(\mu_i-\lambda_i) - \sum_{j=0}^{m_k}\alpha_j(n_k, 0, T, P)\right\} = 0.$$

*Если, кроме того, ряд Фурье функции $p(x, y)$ абсолютно сходится, $p$ непрерывна и*

$$\iint\limits_{\Pi} p(x, y)\cos 2\pi a^{-1}nx\,dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_{\Pi} p(x, y)\cos 2\pi b^{-1}my\,dx\,dy = 0,\ m, n=\overline{0, \infty},$$

*то верна формула*

$$\lim_{k\to\infty}\left\{\sum_{i\leqslant n_k}(\mu_i-\lambda_i) - \sum_{j=1}^{m_k}\alpha_j(n_k, 0, T, P)\right\} =$$

$$= \frac{p(0, 0)+p(a, 0)+p(0, b)+p(a, b)}{16}.$$

Аналогично вычисляются регуляризованные следы высших порядков. Заметим, что гладкие самосопряженные эллиптические дифференциальные операторы второго порядка на бикомпактных гладких двумерных многообразиях с краем или без края удовлетворяют всем условиям теорем 1 и 2.

Автор выражает благодарность М. Д. Юдину за внимание к работе.

## Литература


1. Садовничий В. А., Дубровский В. В.— Дифференц. уравнения, 1977, т. 13, № 11, с. 2033—2042.



*Мозырский государственный педагогический институт им. Н. К. Крупской*



*Поступила в редакцию 20 августа 1981 г.*



*УДК 517.925.41*



В. С. КОЗЛОВА


# ГРУБЫЕ ОСОБЫЕ ТОЧКИ, ЛЕЖАЩИЕ НА ЛИНИИ РАЗРЫВА ПРАВЫХ ЧАСТЕЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ *)


Дается классификация особых точек, лежащих на линии разрыва правых частей системы дифференциальных уравнений. Указываются все грубые особые точки. Для первых двух типов классификации даются необходимые и достаточные условия для того, чтобы особая точка имела любую заданную степень негрубости.


Рассматривается система

$$\begin{aligned} \dot{x} &= P^+(x, y),\ \dot{y} = Q^+(x, y) \text{ при } (x, y) \in G^+, \\ \dot{x} &= P^-(x, y),\ \dot{y} = Q^-(x, y) \text{ при } (x, y) \in G^- \end{aligned} \qquad (A)$$

в конечной области $G$ на плоскости. Ось $Ox$ делит $G$ на подобласти: $G^+$ $(y > 0)$ и $G^-$ $(y < 0)$; система $(A)$ принадлежит $C_*^n(\overline{G})\,(n > 1)$, т. е. $P^\pm, Q^\pm \in C^n(\overline{G}^\pm)$. На оси $Ox$ используется доопределение [1]. Скорость движения по оси $Ox$ в точке $(x, 0)$, для которой $Q^+Q^- \leqslant 0, |Q^+| + |Q^-| \neq 0$, определяется, как в [1], по формуле:

$$v(x) = f(x)/(Q^-(x, 0) - Q^+(x, 0)),\quad f(x) = P^+(x, 0)\, Q^-(x, 0) - P^-(x, 0)\, Q^+(x, 0).$$

Грубость и степень негрубости системы $(A)$ в ограниченной области и в точке определяются аналогично [2] с той разницей, что допускаются возмущения, разрывные по оси $Ox$.

Точка называется особой, если либо она является негрубой, либо ее окрестность имеет топологическую структуру, отличную от топологической структуры окрестностей всех достаточно близких точек.

Траекторию, ее часть или непрерывную кривую, состоящую из дуг траекторий, будем называть квазикривой, если никакая ее дуга не лежит на оси $Ox$, и все точки, отличные от концов, неособые.

Точка $C = (c, 0)$ неособая тогда и только тогда, когда в этой точке либо $Q^+Q^- > 0$, либо $Q^+Q^- < 0$, $f(c) \neq 0$.

Каждая особая точка $(c, 0)$ принадлежит одному из следующих типов (значения функций берутся в точке $(c, 0)$):

I) $Q^+Q^- < 0, f(c) = 0$;
II) $Q^+ = 0,\ P^+ \neq 0,\ Q^- \neq 0$ или $Q^- = 0,\ P^- \neq 0,\ Q^+ \neq 0$;
III) $Q^+ = Q^- = 0,\ P^+ \neq 0,\ P^- \neq 0$;
IV) $Q^+ = P^+ = 0,\ Q^- \neq 0$ или $Q^- = P^- = 0,\ Q^+ \neq 0$;
V) $Q^+ = Q^- = P^+ = 0,\ P^- \neq 0$ или $Q^+ = Q^- = P^- = 0, P^+ \neq 0$;
VI) $Q^+ = P^+ = Q^- = P^- = 0$.

Область $H$ называется нормальной, если ее граница состоит из конечного числа чередующихся дуг без контакта (они целиком лежат вне оси $Ox$ и определяются, как в [2]) и дуг квазикривых, ни одна из которых не принадлежит замкнутой квазикривой, целиком лежащей в $H$; в области $H$ лежит лишь конечное число особых точек, и все они I—III типов; внутри $H$ не существует дуг квазикривых, один конец которых — угловая точка (общая точка граничных дуг без контакта и дуги квазикривой), а второй конец — либо угловая точка, либо особая.

Теорема 1. *Пусть система $(A)$ принадлежит $C_*^{2k+1}(\overline{G})$; $H$—нормальная область, содержащая $m$ особых точек $(c_i, 0)$ $(i = 1, \ldots, m)$, все они I типа. Тогда степень негрубости системы $(A)$ в области $H$ равна $r$ $(r \leqslant k)$ тогда и только тогда, когда корни $x = c_i$ функции $f(x)$ имеют кратности $r_i + 1$ $(i = 1, \ldots, m)$ и $r = r_1 + \ldots + r_m$.*

*) Полностью рукопись депонирована в ВИНИТИ № 4271—84.