А. И. Рылов, Геометрические свойства некоторых линий уровня в плоских и осесимметричных течениях газа, *Сиб. журн. индустр. матем.*, 2003, том 6, номер 1, 125–137

Сибирский журнал
индустриальной математики
Январь–март, 2003. Том VI, № 1(13)

УДК 533.6.011

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА НЕКОТОРЫХ ЛИНИЙ УРОВНЯ В ПЛОСКИХ И ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ТЕЧЕНИЯХ ГАЗА*)

А. И. Рылов

Получен ряд новых соотношений и утверждений, характеризующих геометрию линий уровня плоских вихревых и потенциальных и осесимметричных потенциальных течений. Представленные результаты, относящиеся к разным течениям, во многом идентичны друг другу, что связано с удачным выбором зависимых переменных.

Введение. Представлен ряд новых соотношений и утверждений, характеризующих структуру линий уровня плоских вихревых и потенциальных и осесимметричных потенциальных течений, а также плоских потенциальных течений, у которых зависимые переменные являются некоторыми функциями компонент вектора ускорения. Одним из важных результатов работы является вывод об идентичности основных соотношений и утверждений для всех рассмотренных и заметно отличающихся друг от друга объектов исследования, что связано с выбором зависимых переменных. В связи с этим отметим лишь результаты, относящиеся к плоским вихревым течениям. Так, показано, что в сверхзвуковой области тангенс угла Маха равен среднему геометрическому тангенсов углов, образуемых изобарой и изоклиной с вектором скорости, а в дозвуковой области модуль косинуса угла между изобарой и изоклиной не превосходит число Маха в рассматриваемой точке. Примечательно, и это также обсуждается в работе, что в плоских потенциальных течениях данным свойством обладают линии уровня бесконечного множества пар зависимых переменных, что, в свою очередь, связано со свойствами решений уравнений Чаплыгина на плоскости годографа.

Значительное внимание уделено линиям касания линий уровня исследуемых функций, которые реализуются лишь в областях гиперболичности и, как оказывается, являются границами областей, в которых исследуемые функции обладают свойствами монотонности и, как следствие, удовлетворяют принципу максимума.

Интерес к подобным исследованиям объясняется следующими обстоятельствами. Во-первых, структура линий уровня исследуемых функций, линий тока и в сверхзвуковом случае — характеристик в значительной степени отражает свойства течений [1–6], их топологию [7, 8], а в дозвуковом случае — и асимптотики на бесконечности [9]. Во-вторых, свойства линий уровня газодинамических функций, описываемых однородными системами двух уравнений первого порядка, лежат в основе метода линий уровня, активно используемого при изучении дозвуковых течений [4, 10–18] и у которого есть перспективы для распространения и на сверхзвуковые течения [18]. В-третьих, линии уровня некоторых газодинамических параметров наблюдаются в эксперименте [19], что дает новые возможности для совместного анализа теоретических и экспериментальных фактов. И, наконец, в-четвертых, при численном построении течений объектом исследования являются и газодинамические параметры и их линии уровня,

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 01–01–00851).

наглядно демонстрирующие численные результаты. Поэтому аналитические выражения, характеризующие структуру линий уровня, могут использоваться для оценки точности численного алгоритма.

1. Плоские течения. Рассмотрим плоские вихревые течения идеального (невязкого и нетеплопроводного) газа. Наиболее краткая запись уравнений, описывающих данные течения, достигаемая при использовании производных по направлениям L и N, отсчитываемых соответственно вдоль линии тока и по ее левой нормали, имеет вид [10]

$$(1 - M^2)p_L - \rho q^2 \theta_N = 0, \quad p_N + \rho q^2 \theta_L = 0. \tag{1.1}$$

Здесь и далее p, ρ — давление и плотность; q, θ — модуль и угол наклона вектора скорости; c — скорость звука; $M = q/c$ — число Маха; $\alpha = \arcsin M^{-1}$ — угол Маха, определенный при $M \geq 1$. Подчеркнем, что входящие в (1.1) производные не являются частными производными, т. е. $f_{LN} \neq f_{NL}$.

При исследовании качественных свойств течений жидкости и газа существенную роль играют линии уровня $p = \mathrm{const}$ (изобары) и $\theta = \mathrm{const}$ (изоклины). Через каждую регулярную точку, в которой функции p и θ определены однозначно и в которой исключено одновременное обращение в нуль всех четырех производных p_L, p_N, θ_L, θ_N, проходит одна изобара и одна изоклина. Структура изобар и изоклин характеризуется значениями углов ϕ и ω, которые эти линии составляют с вектором скорости. При выводе соотношений, связывающих эти углы и газодинамические параметры, наряду с системой (1.1) весьма полезной оказывается следующая система [10], в которой фигурируют производные, вычисленные вдоль изобар и изоклин (соответственно θ_l и p_l) и по их левым нормалям (p_n и θ_n):

$$\theta_l = -\frac{p_n}{\rho q^2} f, \ f = 1 - M^2 \sin^2\phi; \quad p_l = \theta_n \rho q^2 g, \ g = \frac{1 - M^2 \sin^2\omega}{1 - M^2}. \tag{1.2}$$

Из соотношений (1.2) следует, что в дозвуковых течениях при движении вдоль изобары (изоклины), являющейся границей выбранной области повышенного или пониженного относительно изобары (изоклины) значения p (значения θ), функция θ (функция p) меняется монотонно [10]. Данные свойства, ранее установленные для потенциальных дозвуковых течений [4], лежат в основе метода линий уровня, активно используемого при исследовании качественных свойств течений жидкости и газа [4, 10–18].

Приступая к выводу соотношений, связывающих ϕ и ω, следует отметить, что фигурирующие в (1.2) производные p_n и θ_n с точностью до знака, зависящего от направления движения вдоль изобары и изоклины, совпадают соответственно с $|\nabla p|$ и $|\nabla \theta|$. В свою очередь, производные из (1.1) выражаются через p_n и θ_n следующим образом:

$$p_L = -jp_n \sin\phi, \quad p_N = jp_n \cos\phi, \quad \theta_L = -k\theta_n \sin\omega, \quad \theta_N = k\theta_n \cos\omega,$$

где j и k в зависимости от направления движения вдоль изобары и изоклины равны ± 1.

Подставляя выписанные значения производных в (1.1), получаем следующую однородную алгебраическую систему двух уравнений для неизвестных p_n и θ_n:

$$-jp_n(1 - M^2)\sin\phi = k\theta_n \rho q^2 \cos\omega, \quad jp_n \cos\phi = k\theta_n \rho q^2 \sin\omega. \tag{1.3}$$

После некоторых очевидных преобразований системы (1.3) приходим к системе, которая в точках однозначного определения изобар и изоклин эквивалентна исходной системе (1.1):

$$\operatorname{tg}\phi \operatorname{tg}\omega - (M^2 - 1)^{-1} = 0, \tag{1.4}$$

$$|\nabla p|^2 (M^2 - 1)\sin\phi\cos\phi - |\nabla\theta|^2 (\rho q^2)^2 \sin\omega\cos\omega = 0. \tag{1.5}$$

Можно отметить, что уравнение (1.4) является условием совместности однородной системы (1.3). Это уравнение, содержащее лишь функции значений углов ϕ, ω и числа Маха M, приводит к следующей теореме.

Теорема 1. *В каждой регулярной точке плоского вихревого течения углы ϕ, ω и число Маха M связаны соотношением (1.4), которое при $M > 1$ принимает вид*

$$\operatorname{tg}\phi \operatorname{tg}\omega = \operatorname{tg}^2 \alpha, \tag{1.6}$$

т. е. в каждой точке сверхзвукого плоского вихревого течения тангенс угла Маха α равен среднему геометрическому тангенсов углов ϕ и ω, образованных соответственно изобарой и изоклиной с вектором скорости.

Отметим некоторые очевидные следствия теоремы.

Следствие 1. *При переходе через возможные разрывы (ударные волны, контактные разрывы и линии разрыва производных, являющиеся, как известно, характеристиками) значения углов ϕ и ω также испытывают разрыв при том естественном предположении, что изобары и изоклины однозначно определены по обе стороны разрыва. В то же время функция значений углов ϕ, ω и числа Маха M, задаваемая левой частью равенства (1.4), по обе стороны разрывов равна нулю, что может рассматриваться как условие на скачок значений ϕ, ω и M на указанных разрывах.*

Следствие 2. *В каждой точке сверхзвукового (дозвукового) плоского вихревого течения изобара и изоклина расположены в одних (разных) квадрантах, образованных линией тока и ее нормалью; при этом в сверхзвуковом случае одна из характеристик расположена внутри острого угла, образованного изобарой и изоклиной, проходящими через рассматриваемую точку.*

Следствие 3. *Вдоль линии уровня $M^2 = 2$ имеет место равенство $\phi + \omega = \pi/2$, непосредственно вытекающее из соотношения (1.6).*

Применительно к потенциальным течениям уместно напомнить об особой роли линии уровня приведенной скорости $\lambda^2 = 2$, каждая точка которой является точкой перегиба для пересекающих ее характеристик [2] независимо от значения показателя адиабаты [20].

Перейдем к оценке значения разности углов ϕ и ω. Для этого воспользуемся тем, что производные из соотношений (1.2) связаны равенствами

$$\theta_l = \theta_n \sin(\phi - \omega), \quad p_l = p_n \sin(\omega - \phi).$$

Подставляя эти равенства в (1.2) и проводя необходимые выкладки, приходим к следующему выражению:

$$\sin^2(\phi - \omega) = (1 - M^2 \sin^2 \phi) \frac{1 - M^2 \sin^2 \omega}{1 - M^2}. \tag{1.7}$$

Соотношение (1.7) дает новую информацию о топологии линий уровня. В частности, оно позволяет сделать ряд сформулированных ниже утверждений.

Теорема 2. *Во всех точках течения, в которых однозначно определены изобары и изоклины, независимо от значения числа Маха M функции f и g из (1.2) имеют одинаковый знак. Равенство $\phi - \omega = 0$ возможно лишь в сверхзвуковой области. Указанные точки, в которых выполнено это равенство, образуют линию, называемую линией касания, в каждой точке которой $\phi = \omega = \alpha$, $f = g = 0$, и, следовательно, в этих точках имеет место одновременное касание изобар, изоклин и характеристик одного из семейств.*

Замечание. В потенциальных течениях линия касания является характеристикой, которая, в свою очередь, на плоскости (p, θ) является линией ветвления [5, 21, 22], что, в частности, следует из анализа транспортных уравнений [23]. В то же время остается открытым вопрос о том, является ли эта линия характеристикой в вихревых течениях. Необходимость в изучении таких линий возникает, например, при анализе сверхзвуковых вихревых течений за звуковой линией, соединяющей тело и отошедшую ударную волну.

Следствие 4. *Вдоль звуковой линии, как видно из (1.1), выполняется равенство $\omega = \pi/2$, что, в свою очередь, согласуется с соотношениями (1.6) и (1.7). Исключение составляет возможная изолированная точка ветвления изоклин на звуковой линии, при подходе к которой значение ω зависит от направления подхода. Согласно (1.6) и (1.7) в этой точке $\phi = \pi/2$. Именно в этой точке обращаются в нуль функции f и g из (1.2), в то время как в других точках звуковой линии $f > 0$, $g > 0$. И, наконец, именно в эту точку звуковой линии из сверхзвуковой области приходят линии касания, вдоль которых, в частности, $f = g = 0$.*

Следствие 5. *Неравенства $f > 0$, $g > 0$, $\phi - \omega \neq 0$ справедливы не только в дозвуковой области, но и в сопряженной с ней через звуковую линию сверхзвуковой подобласти, простирающейся до линии касания, вдоль которой $f = g = \phi - \omega = 0$. Дозвуковая область и указанная сверхзвуковая подобласть формируют смешанную эллиптико-гиперболическую область, в которой справедливы свойства монотонности и следующий из них принцип максимума давления p и угла наклона вектора скорости θ.*

Следующая теорема демонстрирует влияние местного числа Маха M на степень отклонения сетки линий уровня функций p и θ от ортогональной.

Теорема 3. *В каждой точке дозвукового плоского вихревого течения*

$$|\cos(\phi - \omega)| \leq M, \tag{1.8}$$

т. е. модуль косинуса угла, образованного изобарой и изоклиной, не превосходит местное значение числа Маха M.

Доказательство теоремы 3 следует из цепочки неравенств, имеющих место при $M < 1$:

$$\sin^2(\phi - \omega) = (1 - M^2 \sin^2 \phi) \frac{1 - M^2 \sin^2 \omega}{1 - M^2} \geq 1 - M^2, \quad \cos^2(\phi - \omega) \leq M^2.$$

Замечание. Новым в равенстве (1.4) и неравенстве (1.8) является то, что они демонстрируют влияние сжимаемости на топологию изобар и изоклин. При $M = 0$ соотношения (1.4) и (1.8) лишь демонстрируют известный факт их взаимной перпендикулярности.

Достаточно простой и наглядный вид выражений (1.4)–(1.8) и вытекающих из них утверждений связан с тем, что плоские вихревые течения газа допускают описание в виде однородной системы уравнений (1.1), матричная форма которой содержит лишь диагональные матрицы. Более того, можно показать, что в случае плоского потенциального течения установленные выше свойства допускают распространение на линии уровня бесконечного множества пар зависимых переменных. Действительно, следуя [24], рассмотрим уравнения Чаплыгина для потенциала φ и функции тока ψ на плоскости годографа (z, θ):

$$\varphi_z + k\psi_\theta = 0, \quad \varphi_\theta - \psi_z = 0, \tag{1.9}$$

где использованы стандартные обозначения

$$z = z(q) = \int \frac{\rho}{q}\, dq, \quad k = k(z) = \frac{1 - M^2}{\rho^2}.$$

Как известно, для данной системы может быть построено, в частности методом разделения переменных, бесконечное число точных решений вида

$$\psi = U(z, \theta), \quad \varphi = V(z, \theta).$$

В [24] показано, что каждому такому решению отвечает своя однородно-дивергентная система на плоскости потенциала (φ,ψ):

$$kU_\varphi + V_\psi = 0, \quad U_\psi - V_\varphi = 0. \tag{1.10}$$

Сравнивая эту систему с системой (1.1), которая после перехода на плоскость потенциала (φ,ψ) принимает вид

$$kz_\varphi + \theta_\psi = 0, \quad z_\psi - \theta_\varphi,$$

убеждаемся, что все соотношения и выводы, полученные для линий уровня $q = \mathrm{const}$, $\theta = \mathrm{const}$, будут справедливы и для линий уровня $U = \mathrm{const}$, $V = \mathrm{const}$.

Для большей наглядности напомним некоторые точные решения уравнений Чаплыгина (1.9):

$U = z$, $V = \theta$ — течение типа потенциальный вихрь [5, 6, 23];

$U = \theta$, $V = -\int k\,dz$ — течение от источника [5, 6, 23];

$U = z\theta$, $V = \theta^2/2 - \int kz\,dz$ — решение, описывающее, в частности, течение в окрестности точки сопряжения прямолинейной стенки и струи [24];

$U = \sin\theta/q$, $V = \cos\theta/(\rho q)$ — течение Ринглеба [5, 6].

Одновременно отметим, что компоненты вектора скорости $u = q\cos\theta$ и $v = q\sin\theta$, часто используемые в качестве зависимых переменных в уравнениях газовой динамики, не являются решением уравнений Чаплыгина (1.9) и, следовательно, все сделанные выше выводы о линиях $U = \mathrm{const}$ и $V = \mathrm{const}$, где U и V — решения уравнений (1.9), на линии уровня $u = \mathrm{const}$ и $v = \mathrm{const}$ не распространяются.

Последующие разделы посвящены изучению осесимметричных течений, а также плоских потенциальных течений, зависимые переменные которых связаны с компонентами вектора ускорения. В обоих случаях благодаря удачному выбору зависимых переменных также используются системы уравнений, во многом идентичные системе (1.1).

2. Осесимметричные течения. Рассмотрим осесимметричные потенциальные течения идеального (невязкого и нетеплопроводного) газа. С использованием традиционных зависимых и независимых переменных эти течения описываются неоднородной системой уравнений, что существенно усложняет анализ осесимметричных дозвуковых течений. Как следствие, для этих течений имеется заметно меньше строгих результатов, чем для аналогичных плоских течений. Имеющиеся же результаты получены, в основном, с помощью анализа решений асимптотических уравнений [25–29]. Поэтому можно ожидать, что переход к полученной и апробированной ранее [16, 30] однородной системе даст дополнительные возможности для изучения осесимметричных течений.

Следуя результатам работ [16, 30], рассмотрим функции $U = u$ и $V = y\rho v$. В дополнение к введенным ранее обозначениям здесь и далее x и y — цилиндрические координаты (x — ось симметрии), u и v — компоненты вектора скорости.

С использованием функций U и V рассматриваемые течения описываются следующей однородной системой [16, 30]:

$$(1-M^2)U_x - \frac{uv}{y\rho c^2}V_x + \frac{c^2-v^2}{y\rho c^2}V_y = 0, \quad uvU_x - (c^2-v^2)U_y + \frac{c^2}{y\rho}V_x = 0. \tag{2.1}$$

Система (2.1) может быть записана более компактно при переходе на плоскость потенциала:

$$(1-M^2)U_\varphi + V_\psi = 0, \quad (y\rho)^2 - U_\psi + V_\varphi = 0$$

или по аналогии с системой (1.1) при использовании производных по направлениям L — вдоль линии тока и N — по левой нормали к линии тока. В последнем случае уравнения записываются следующим образом:

$$y\rho(1-M^2)U_L + V_N = 0, \quad y\rho U_N - V_L = 0. \tag{2.2}$$

Система (2.2) во многом аналогична системе (1.1) для плоских течений. Как следствие, основные соотношения и утверждения, характеризующие структуру линий уровня функций U и V, почти полностью идентичны полученным выше результатам для плоских течений.

Выражения для производных, вычисленных соответственно вдоль линий $U = \mathrm{const}$ и $V = \mathrm{const}$, имеют вид

$$V_l = U_n y\rho f,\ \ f = 1 - M^2 \sin^2 \mu; \quad U_l = -\frac{V_n}{y\rho} g,\ \ g = \frac{1 - M^2 \sin^2 \eta}{1 - M^2}. \tag{2.3}$$

Здесь μ и η — углы, составляемые соответственно линиями $U = \mathrm{const}$ и $V = \mathrm{const}$ с вектором скорости, U_n и V_n — производные, вычисленные по нормали к соответствующим линиям уровня.

Далее под регулярной точкой осесимметричного потенциального течения будем понимать точку, в которой однозначно определены линии уровня функций U и V.

Система (2.2) позволяет построить систему, аналогичную системе уравнений (1.4) и (1.5):

$$\operatorname{tg}\mu \operatorname{tg}\eta - (M^2 - 1)^{-1} = 0, \tag{2.4}$$

$$|\nabla U|^2 (1 - M^2)(y\rho)^2 \sin\mu\cos\mu + |\nabla V|^2 \sin\eta\cos\eta = 0. \tag{2.5}$$

Из равенства (2.4) вытекает близкая к теореме 1 по формулировке

Теорема 4. *В каждой регулярной точке осесимметричного потенциального течения углы μ, η и число Маха M связаны соотношением (2.4), которое при $M > 1$ принимает вид*

$$\operatorname{tg}\mu \operatorname{tg}\eta = \operatorname{tg}^2 \alpha, \tag{2.6}$$

т. е. в каждой точке сверхзвукого осесимметричного потенциального течения тангенс угла Маха α равен среднему геометрическому тангенсов углов μ и η, образованных соответственно линиями $U = \mathrm{const}$ и $V = \mathrm{const}$ с вектором скорости.

Отметим некоторые очевидные следствия теоремы.

Следствие 6. *Соотношение (2.4) справедливо по обе стороны возможных слабых разрывов и в случае кусочно-потенциального течения по обе стороны контактных разрывов, что характеризует возможные скачки значений μ, η и M при переходе через указанные разрывы.*

Следствие 7. *В каждой точке сверхзвукового (дозвукового) осесимметричного потенциального течения линии $U = \mathrm{const}$ и $V = \mathrm{const}$ расположены в одних (разных) квадрантах, образованных линией тока и ее нормалью; при этом в сверхзвуковом случае одна из характеристик расположена внутри острого угла, составленного пересекающимися линиями уровня функций U и V.*

Следствие 8. *Вдоль линии уровня $M^2 = 2$ имеет место равенство $\mu + \eta = \pi/2$, непосредственно вытекающее из соотношения (2.6).*

Из соотношений (2.3) могут быть получены равенства

$$\sin^2(\mu - \eta) = fg = (1 - M^2 \sin^2 \mu)\frac{1 - M^2 \sin^2 \eta}{1 - M^2}, \tag{2.7}$$

приводящие к следующим утверждениям, которые можно рассматривать как распространение теоремы 2 на осесимметричные течения.

Теорема 5. *Во всех регулярных точках течения независимо от значения числа Маха M функции f и g из (2.3) имеют один знак. Равенство $\mu - \eta = 0$ возможно лишь в сверхзвуковой области. Указанные точки, в которых выполнено это равенство, образуют линию, в каждой точке которой $\mu = \eta = \alpha$, $f = g = 0$, и, следовательно, в этих точках имеет место одновременное касание линий $U = \mathrm{const}$, $V = \mathrm{const}$ и характеристик одного из семейств.*

Указанная линия далее именуется линией касания. В отличие от плоских потенциальных течений, в которых линия касания является характеристикой, вопрос о ее структуре в осесимметричных течениях требует дополнительного изучения.

Следствие 9. *Из первого уравнения системы (2.2) видно, что в точках звуковой линии $\omega = \pi/2$, и это согласуется с соотношениями (2.6) и (2.7). Исключение составляет возможная изолированная точка ветвления линий $\beta = \mathrm{const}$ на звуковой линии, при подходе к которой значение ω зависит от направления подхода. Согласно (2.6) и (2.7) в этой точке $\phi = \pi/2$. Именно в этой точке обращаются в нуль функции f и g из (2.3), в то время как в других точках звуковой линии $f > 0$, $g > 0$. И, наконец, именно в эту точку звуковой линии из сверхзвуковой области приходят линии касания, вдоль которых, в частности, $f = g = 0$.*

Следствие 10. *Неравенства $f > 0$, $g > 0$ и $\mu - \eta \neq 0$ справедливы не только в дозвуковой области, но и в сопряженной с ней через звуковую линию сверхзвуковой подобласти, простирающейся до линии касания, вдоль которой $f = g = \mu - \eta = 0$. Дозвуковая область и указанная сверхзвуковая подобласть формируют смешанную эллиптико-гиперболическую область, в которой справедливы свойства монотонности и следующий из них принцип максимума функций U и V.*

Следствие 11. *В каждой точке дозвукового осесимметричного потенциального течения модуль косинуса угла, образованного линиями уровня функций U и V, не превосходит местное значение числа Маха M.*

Следствие 11 и соотношение (2.4) демонстрируют влияние значений местного числа Маха M на степень отклонения сетки линий уровня определенных выше функций U и U от ортогональной, реализующейся в несжимаемых течениях.

3. Плоские потенциальные течения, зависимые переменные которых выражены через компоненты вектора ускорения. В некоторых задачах обтекания тел возникает необходимость в исследовании функций, связанных с компонентами вектора ускорения. Особый интерес могут вызывать линии нулевого продольного ускорения и линии нулевой кривизны линий тока. Для подобных целей наиболее подходящей является однородная система уравнений газовой динамики, зависимые переменные которой связаны с компонентами вектора ускорения. Ниже дается краткое изложение одного из возможных решений задачи построения подобной однородной системы [17].

На плоскости потенциала рассматриваемые течения описываются следующей однородной системой уравнений [24]:

$$z_\psi - \theta_\varphi = 0, \quad kz_\varphi + \theta_\psi = 0, \quad z = \int \rho \, d \ln q. \tag{3.1}$$

Здесь и далее φ и ψ — потенциал и функция тока; q, θ, p, ρ и M, как и в предыдущих разделах, соответственно модуль и угол наклона вектора скорости, давление, плотность и число Маха; $k = (1 - M^2)\rho^{-2}$.

Дифференцирование системы (3.1) по φ приводит к неоднородной системе

$$(z_\varphi)_\psi - (\theta_\varphi)_\varphi = 0, \quad k(z_\varphi)_\varphi + (\theta_\varphi)_\psi = -k_z(z_\varphi)^2 \tag{3.2}$$

для функций z_φ и θ_φ, которые в (3.2) для наглядности взяты в скобки.

Преобразование системы (3.2) в однородную достигается введением новых функций U и V (не путать с аналогичными обозначениями из предыдущего раздела) [18]:

$$V = \theta_\varphi\big(\theta_\varphi^2 + kz_\varphi^2\big)^{-1}, \quad U = -z_\varphi\big(\theta_\varphi^2 + kz_\varphi^2\big)^{-1}, \tag{3.3}$$

которые следующим образом связаны с продольной (вдоль линии тока) F и поперечной G компонентами вектора ускорения:

$$V = q^3G(G^2 + (1 - M^2)F^2)^{-1}, \quad U = -\rho q^3 F(G^2 + (1 - M^2)F^2)^{-1}.$$

В свою очередь, производные z_φ и θ_φ выражаются через V и U следующим образом:

$$\theta_\varphi = V(V^2 + kU^2)^{-1}, \quad z_\varphi = -U(V^2 + kU^2)^{-1}. \tag{3.4}$$

Подстановка выражений (3.4) в систему (3.2) приводит к искомой однородной системе

$$U_\psi - V_\varphi = 0, \quad kU_\varphi + V_\psi = 0. \tag{3.5}$$

Напомним, что метод построения однородных систем [16] основан на использовании двухпараметрических решений. Как оказывается, в данном случае наиболее подходящим является суперпозиция источника интенсивности a и вихря интенсивности b (спиральное течение [5, 6]):

$$\psi = az + b\theta. \tag{3.6}$$

Непосредственная проверка показывает, что при любых постоянных a и b функция ψ из (3.6) удовлетворяет уравнению Чаплыгина [5, 6, 23]

$$k\psi_{\theta\theta} + \psi_{zz} = 0,$$

эквивалентному системе (3.1).

Дифференцируя равенство (3.6) по ψ и φ и принимая во внимание исходную систему (3.1), получаем два соотношения

$$a\theta_\varphi - kbz_\varphi = 1, \quad az_\varphi + b\theta_\varphi = 0,$$

которые могут быть переписаны в виде

$$a = \theta_\varphi\big(\theta_\varphi^2 + kz_\varphi^2\big)^{-1}, \quad b = -z_\varphi(\theta_\varphi^2 + kz_\varphi^2)^{-1}. \tag{3.7}$$

В соответствии с методом [16] для определения искомых функций U и V, приводящих к однородной системе, применяются правые части соотношений (3.7), что и использовано в (3.3).

Рассмотрим некоторые свойства системы (3.5) и входящих в нее функций U и V. Характерно, что с точностью до замены z на U и θ на V эта система совпадает с исходной системой (3.1). Это говорит о том, что структура линий уровня функций U и V во многом идентична структуре линий уровня функций p (или q) и θ плоских потенциальных течений. В то же время сомножитель k в (3.1) и (3.5) зависит от z, но не от U и V. Это приводит к тому, что в сверхзвуковой области условия совместности системы (3.5) в отличие от системы (3.1) не интегрируются.

Отметим, что выражение в круглых скобках в равенствах (3.3) с точностью до знака совпадает с якобианом отображения плоскости потенциала (φ, ψ) на плоскость (z, θ), что видно из следующей цепочки равенств:

$$\theta_\varphi^2 + kz_\varphi^2 = \theta_\varphi z_\psi - \theta_\psi z_\varphi = -J.$$

Важной особенностью функций U и V, построение которых прямо связано с использованием точного двухпараметрического решения для спирального течения, является то, что в сверхзвуковой области они явно выражаются через частные производные инвариантов Римана по φ.

Действительно, запишем инварианты Римана в следующем виде:

$$l = \theta + H(M), \quad r = \theta - H(M), \quad H(M) = \int (M^2-1)^{1/2}\, d\ln q = \int \operatorname{ctg}\alpha\, d\ln q,$$

где $\alpha = \arcsin(M^{-1})$ — угол Маха.

Используя стандартные обозначения из [24] для производных $L = l_\varphi$, $R = r_\varphi$ и соотношения (3.3) для функций U и V, видим, что U и V записываются через L и R в виде достаточно простых выражений

$$2V = \frac{L+R}{LR} = R^{-1} + L^{-1}, \quad \frac{2U}{\rho \operatorname{tg}\alpha} = \frac{R-L}{LR} = R^{-1} - L^{-1}. \tag{3.8}$$

Следовательно, однородная система уравнений (3.5) может быть использована для описания и анализа гладких сверхзвуковых течений, по крайней мере вне линий $L = 0$, $R = 0$, при подходе к которым функции U и V неограниченно возрастают. Можно показать, что данные линии являются линиями касания изобар и изоклин на физической плоскости и линиями ветвления на плоскости (p, θ). Как уже отмечалось в п. 1, каждая из этих линий является характеристикой, во всех точках которой характеристики противоположного семейства, линии постоянного давления и линии постоянного значения угла наклона вектора скорости касаются друг друга [5, 21, 22]. История вопроса, связанная с линиями ветвления, и соответствующая библиография даны в отмеченной выше книге Р. Мизеса [5]. Напомним лишь, что линии ветвления играют заметную роль и при анализе свойств монотонности гладких сверхзвуковых течений.

Обратим внимание на одно кажущееся противоречие. Функции L и R содержат по два слагаемых, в одно из которых в качестве сомножителя входит выражение $(M^2-1)^{1/2}$. Кроме того, в функцию U в виде сомножителя входит тангенс угла Маха, равный $(M^2-1)^{-1/2}$. Но, как это видно из (3.8), в окончательные выражения для функций U и V указанные квадратные корни уже не входят, что снимает сомнения в правомерности использовании функций U и V в дозвуковых течениях.

В сверхзвуковой области построенная система (3.5) является гиперболической и имеет два семейства характеристик, обозначенных через C_1 и C_2, уравнения и условия совместности для которых на плоскости потенциала таковы:

$$\frac{d\psi}{d\varphi} = \rho \operatorname{tg}\alpha = \rho(M^2-1)^{-1/2}, \quad dU = -(\rho \operatorname{tg}\alpha) dV \quad \text{для} \quad C_1, \tag{3.9}$$

$$\frac{d\psi}{d\varphi} = -\rho \operatorname{tg}\alpha = -\rho(M^2-1)^{-1/2}, \quad dU = (\rho \operatorname{tg}\alpha) dV \quad \text{для} \quad C_2. \tag{3.10}$$

Как и следовало ожидать, уравнения характеристик из (3.9) и (3.10) совпадают с уравнениями характеристик, полученными для p и θ. Далее, заменяя U и V в условиях совместности (3.9) и (3.10) их зависимостями (3.8) от L и R, находим, что условия совместности сводятся к известным транспортным уравнениям [24], описывающим изменение величины $R = r_\varphi$ $(L = l_\varphi)$ вдоль характеристики первого (второго) семейства.

Действительно, с помощью операторов дифференцирования вдоль характеристик первого (D_1) и второго (D_2) семейств на плоскости потенциала

$$D_1 = \frac{\partial}{\partial\varphi} + \rho \operatorname{tg}\alpha \frac{\partial}{\partial\psi}, \quad D_2 = \frac{\partial}{\partial\varphi} - \rho \operatorname{tg}\alpha \frac{\partial}{\partial\psi},$$

условия совместности однородной системы (3.5) записываются в виде транспортных уравнений

$$D_1 R + \frac{q}{2\rho}(\rho \operatorname{tg} \alpha)_q (R - L) R = 0 \quad \text{для} \quad C_1, \tag{3.11}$$

$$D_2 L + \frac{q}{2\rho}(\rho \operatorname{tg} \alpha)_q (R - L) L = 0 \quad \text{для} \quad C_2. \tag{3.12}$$

Каждое из этих уравнений является уравнением Риккати. Эти уравнения интегрируются в квадратурах [23], что позволяет использовать их при исследовании возникновения градиентных катастроф. Кроме того, из уравнений (3.11) и (3.12) следует, что если в некоторой точке характеристики первого (второго) семейства имеет место равенство $R = 0$ ($L = 0$), то в этом случае указанное равенство выполнено во всех других точках рассматриваемой характеристики, и при этом сама характеристика является линией ветвления на плоскости (p, θ). Ниже будет показано, что указанная линия является и линией касания линий уровня функций U и V.

Тем самым решение задачи построения однородной системы (3.5) одновременно приводит к отличному от [23] решению задачи построения транспортных уравнений (3.11) и (3.12) как к решению стандартной задачи определения условий совместности системы (3.5).

Переходим к изучению линий уровня функций U и V. Возвращаясь к использованию производных по направлениям L — вдоль линии тока и N — по левой нормали к линии тока, запишем однородную систему (3.5) в виде

$$\rho V_L - U_N = 0, \quad \rho V_N + (1 - M^2) U_L = 0, \tag{3.13}$$

после чего производные вдоль соответственно линий $U = \text{const}$ и $V = \text{const}$ на физической плоскости запишутся следующим образом:

$$V_l = \frac{U_n}{\rho} f, \quad f = 1 - M^2 \sin^2 \sigma; \quad U_l = -V_n \rho g, \quad g = \frac{1 - M^2 \sin^2 \chi}{1 - M^2}, \tag{3.14}$$

где χ и σ — углы, составляемые касательными к линиям $V = \text{const}$ и $U = \text{const}$ с вектором скорости.

Соотношения (3.14) позволяют доказать ряд важных утверждений, характеризующих поведение функций U и V в области дозвукового течения [18].

Теорема 6. *Функции U и V в дозвуковых плоских потенциальных течениях обладают свойствами монотонности и удовлетворяют принципу максимума.*

Доказательство. Справедливость свойств монотонности следует из неравенств $f > 0$, $g > 0$ для функций f и g из (3.14), очевидно выполненных при $M < 1$. Далее, наличие предполагаемого внутреннего локального экстремума функций U или V сопровождается и наличием замкнутых линий $U = \text{const}$ или $V = \text{const}$, что противоречит свойствам монотонности указанных функций.

Следствие 12. *Исключены линии $V = \text{const}$, начинающиеся и заканчивающиеся на границе струи, так как на границе струи $U = 0$. Исключены линии $U = \text{const}$, начинающиеся и заканчивающиеся на прямолинейных отрезках стенки.*

В каждой точке линии нулевого продольного ускорения ($U = 0$) изобара касается линии тока. В каждой точке линии нулевой кривизны линий тока ($V = 0$) изоклина касается линии тока.

Замечание. Принцип максимума функций U и V в общем случае не распространяется на компоненты F и G вектора ускорения. Тем не менее можно выделить два частных случая, когда такой перенос возможен.

Следствие 13. *Во внутренних точках дозвуковой области исключено неограниченное возрастание модуля вектора ускорения.*

Действительно, из равенства, например, $F = \infty$ вдоль некоторой кривой следуют равенства $U = V = 0$ вдоль этой же кривой, что исключено для решения системы (3.5) в области эллиптичности. Далее, из равенства $F = \infty$ в изолированной точке следуют равенство $V = 0$ в этой же точке и неравенство $V > 0$ в ее окрестности, что противоречит принципу максимума функции V.

Следствие 14. *Локальный экстремум функции F или G исключен во внутренних точках дозвуковой области с нулевым значением F или G.*

Доказательство аналогично предыдущему.

Дальнейший анализ соотношений (3.13) и (3.14), детали которого уже изложены в п. 1, позволяет считать доказанной следующую теорему.

Теорема 7. *В области плоского потенциального течения вне точек ветвления линий уровня функций p, θ, U, V и вне точек неоднозначного определения указанных функций число Маха M и углы ϕ, ω, σ, χ, составляемые линиями уровня этих функций с вектором скорости, связаны соотношениями*

$$\operatorname{tg}\phi \operatorname{tg}\omega = \operatorname{tg}\sigma \operatorname{tg}\chi = (M^2 - 1)^{-1}, \tag{3.15}$$

$$\sin^2(\sigma - \chi) = fg = \frac{(1 - M^2 \sin^2\sigma)(1 - M^2 \sin^2\chi)}{1 - M^2}, \tag{3.16}$$

т. е. в сверхзвуковом потенциальном течении среднее геометрическое тангенсов углов ϕ и ω равно среднему геометрическому тангенсов углов χ и σ, что, в свою очередь, равно тангенсу угла Маха α.

Следствие 15. *В каждой точке области дозвукового (сверхзвукового) течения линии $U = \mathrm{const}$ и $V = \mathrm{const}$ проходят через разные (одни и те же) квадранты, образованные проходящими через эту точку линией тока и линией постоянного значения потенциала.*

Следствие 16. *В каждой точке области дозвукового течения модуль косинуса угла, составляемого линиями уровня функций U и V, не превосходит местного значения числа Маха.*

Следствие 17. *Во всех точках области течения функции f и g из (3.14) имеют одинаковый знак. Как уже отмечалось, в дозвуковой области $f > 0$, $g > 0$. В свою очередь, сверхзвуковая область делится на подобласти двух типов, в которых либо $f > 0$, $g > 0$, либо $f < 0$, $g < 0$.*

Следствие 18. *В дозвуковой области $\sigma - \chi \neq 0$. Касание линий $U = \mathrm{const}$ и $V = \mathrm{const}$ возможно лишь при одновременном выполнении равенств $f = g = 0$ или, что то же самое, при $\sigma = \chi = \alpha$, что имеет место лишь при $M \geq 1$ и при одновременном касании рассматриваемых линий с характеристикой одного из семейств. Геометрическое место указанных точек формирует линию касания.*

Выше, при анализе транспортных уравнений (3.11) и (3.12) отмечалось, что характеристика, вдоль которой либо $L = 0$, либо $R = 0$, является линией ветвления на плоскости (p, θ). В каждой точке этой характеристики имеет место касание изобары, изоклины и характеристики другого семейства. В то же время из равенства нулю либо L, либо R вдоль этой характеристики следует, что вдоль нее $|U| = |V| = \infty$ и что при ее пересечении функции U и V меняют знак. Из этого же следует, что рассматриваемая характеристика является и линией уровня функций U, V и вдоль нее справедливы равенства $\sigma = \chi = \alpha$.

В заключение еще раз подчеркнем, что построенные в работе соотношения, связывающие углы наклона линий уровня зависимых переменных и число Маха, полностью совпадают для таких разных объектов исследования, как плоские вихревые и потенциальные течения с зависимыми переменными p и θ, плоские потенциальные течения с бесконечным множеством пар зависимых переменных U и V, определяемыми как решения $\psi = U$, $\varphi = V$ уравнений Чаплыгина на плоскости годографа, осесимметричные потенциальные течения с зависимыми переменными $U = u$, $V = y\rho v$ и, наконец, плоские потенциальные течения с зависимыми переменными U и V, определяемыми через продольную (вдоль линии тока) F и поперечную G компоненты вектора ускорения

$$U = -\frac{\rho q^3 F}{G^2 + (1 - M^2)F^2}, \quad V = \frac{q^3 G}{G^2 + (1 - M^2)F^2}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Busemann A.* Gasdynamik, Handbuch der Experimentalphisik. Bd. 4.1. Leipzig, 1931. S. 341–460.
2. *Христианович С. А.* О сверхзуковых течениях газа // Тр. ЦАГИ. 1941. №543.
3. *Седов Л. И.* Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука, 1966.
4. *Никольский А. А., Таганов Г. И.* Движение газа в местной сверхзвуковой зоне и некоторые условия разрушения потенциального течения // Прикл. математика и механика. 1946. Т. 10, вып. 4. С. 481–502.
5. *Мизес Р.* Математическая теория течений сжимаемой жидкости. М.: Изд-во иностр. лит., 1961.
6. *Черный Г. Г.* Газовая динамика. М.: Наука, 1988.
7. *Arnold V. I., Khesin B. A.* Topological methods in hydrodynamics. New York: Springer-Verl., 1998. (Applied Mathematical Sciences, 125).
8. *Трошкин О. В.* О топологическом анализе структуры гидродинамических течений // Успехи мат. наук. 1988. Т. 43, вып. 4. С. 129–158.
9. *Рылов А. И.* Асимптотики и структура линий уровня в дозвуковых плоских потенциальных течениях // Прикл. математика и механика. 1999. Т. 63, вып. 3. С. 405–416.
10. *Никольский А. А.* О плоских вихревых течениях газа // Теоретические исследования по механике жидкости и газа: Тр. ЦАГИ. 1981. Вып. 2122. С. 74–85.
11. *Шифрин Э. Г.* О выпуклости ударной волны на дозвуковом отрезке в плоском течении // Прикл. математика и механика. 1969. Т. 33, вып. 1. С. 158–162.
12. *Рылов А. И.* О возможных режимах обтекания заостренных тел конечной толщины при произвольных сверхзвуковых скоростях набегающего потока // Прикл. математика и механика. 1991. Т. 55, вып. 1. С. 95–99.
13. *Рылов А. И.* О некоторых свойствах дозвукового течения за ударной волной, возникающей при сверхзвуковом обтекании тел конечной толщины // Прикл. математика и механика. 1991. Т. 55, вып.5. С. 780–786.
14. *Рылов А. И.* О свойствах монотонности некоторых вихревых плоских течений несжимаемой жидкости и дозвуковых течений газа // Прикл. математика и механика. 1992. Т. 56, вып. 3. С. 386–391.
15. *Рылов А. И.* О структуре дозвукового течения между несимметричным телом и отошедшей ударной волной // Прикл. математика и механика. 1993. Т. 57, вып. 5. С. 87–92.
16. *Рылов А. И.* Свойства монотонности решений эллиптических систем первого порядка и их приложения к уравнениям механики жидкости и газа // Прикл. математика и механика. 1995. Т. 59, вып. 5. С. 758–766.
17. *Рылов А. И.* О свойствах монотонности некоторых осесимметричных дозвуковых течений // Прикл. математика и механика. 1997. Т. 61, вып. 1. С. 167–171.
18. *Рылов А. И.* О свойствах однородных систем уравнений газовой динамики для компонент вектора ускорения // Сиб. журн. индустр. математики. 1998. Т. 1, №2. С. 169–174.
19. *Ван-Дайк М.* Альбом течений жидкости и газа. М.: Мир, 1986.

20. *Рылов А. И.* О новых свойствах эллипса Буземана // Прикл. математика и механика. 1997. Т. 61, вып. 6. С. 947–951.

21. *Lighthill M. J.* The hodograf transformation in trans-sonic flow. 1. Symmetrical channels // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1947. N 191. P. 323–341.

22. *Берс Л.* Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики. М.: Изд-во иностр. лит., 1961.

23. *Овсянников Л. В.* Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 1981.

24. *Рылов А. И.* Уравнения С. А. Чаплыгина и бесконечное множество однородно-дивергентных уравнений газовой динамики // Докл. РАН. 2002. Т. 383, №1. С. 34–36.

25. *Гудерлей К. Г.* Теория околозвуковых течений. М.: Изд-во иностр. лит., 1960.

26. *Фалькович С. В., Чернов И. А.* Обтекание тел вращения звуковым потоком газа // Прикл. математика и механика. 1964. Т. 28, вып. 2. С. 280–284.

27. *Рыжов О. С.* Исследование трансзвуковых течений в соплах Лаваля. М.: изд. ВЦ АН СССР, 1965.

28. *Коул Д., Кук Л.* Трансзвуковая аэродинамика. М.: Мир, 1989.

29. *Шифрин Э. Г.* Исследование осесимметричных трансзвуковых течений при помощи специальной плоскости годографа // Прикл. математика и механика. 1971. Т. 35, вып. 3. С. 549–558.

30. *Рылов А. И.* О свойствах монотонности некоторых осесимметричных дозвуковых течений // Прикл. математика и механика. 1997. Т. 61, вып. 1. С. 167–171.

г. Новосибирск
Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН
E-mail: rylov@math.nsc.ru

Статья поступила 5 января 2003 г.