О. А. Олейник, Ж. Тронель, Т. А. Шапошникова, Об усреднении оператора Лапласа в области, часть которой содержит периодически расположенные каналы с условиями Неймана на их границе,
Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 1996, номер 5, 14–27

реакции в пространстве непрерывно дифференцируемых процессов//Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1996. № 2. 75—79.

3. Ильюшин А. А. Функционалы и меры необратимости термодинамических процессов в механике сплошной среды (МСС)//Докл. РАН. 1994. **337**(1). 48—50.
4. Козлов В. В. Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновом пространстве. Ижевск, 1995.
5. Ostoja-Starzewski M., Jasiuk I. Stress invariance in planar Cosserat elasticity//Proc. Roy. Soc. London. A. 1995. **451**. 453—470.
6. Cosserat MM. E., Cosserat F. Theorie des corps deformables. Paris, 1909.

Поступила в редакцию
13.05.96

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1996. № 5

УДК 517.9

О. А. Олейник, Ж. Тронель, Т. А. Шапошникова

ОБ УСРЕДНЕНИИ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА В ОБЛАСТИ, ЧАСТЬ КОТОРОЙ СОДЕРЖИТ ПЕРИОДИЧЕСКИ РАСПОЛОЖЕННЫЕ КАНАЛЫ С УСЛОВИЯМИ НЕЙМАНА НА ИХ ГРАНИЦЕ

Посвящается Алексею Антоновичу Ильюшину

В работе исследуется задача об усреднении решения уравнения Пуассона в частично перфорированной области в случае, когда перфорированная часть области содержит периодически расположенные узкие каналы, оси которых перпендикулярны плоскости раздела перфорированной и неперфорированной частей области. На границе каналов заданы условия Неймана. Отметим, что усредненная задача имеет на плоскости раздела условия сопряжения, отличные от тех, которые возникают в случаях, рассмотренных в [1—3], когда оси каналов параллельны одной из осей, лежащих в плоскости раздела.

Пусть $\omega^{(n-1)}$ — неограниченная область с 1-периодической структурой в $R^{n-1}_{\widehat{x}}$, $\widehat{x}=(x_2, \ldots, x_n)$, $\partial\omega^{(n-1)} \in C^1$, $\omega_\varepsilon^{(n-1)}=\varepsilon\omega^{(n-1)}$ — периодическая неограниченная область в $R^{n-1}_{\widehat{x}}$ с периодом ε, $R^n_+=\{x\in R^n_x : x_1>0\}$, $\omega_\varepsilon = \omega_\varepsilon^{(n-1)} \times R_{x_1}$, $\omega_\varepsilon^+=\omega_\varepsilon \cap R^n_+$, $G_1^{(n-1)}=R^{n-1}_{\widehat{x}} \setminus \overline{\omega^{(n-1)}}$, $Q=\{\widehat{x}\in R^{n-1}_{\widehat{x}} : 0<x_j<1, j=2, \ldots, n\}$, $G_0=G_1^{(n-1)}\cap Q$, $\omega_0=\omega^{(n-1)}\cap Q$, $G_\varepsilon=\varepsilon G_1^{(n-1)}$, $\varepsilon^{-1}\in N$.

Положим:

$$\Omega=\{x\in R^n_x : -l<x_1<l,\ 0<x_j<1,\ j=2, \ldots, n\},$$

$$\Gamma_{+l}=\{x\in\partial\Omega : x_1=l\},\ \Gamma_{-l}=\{x\in\partial\Omega : x_1=-l\},$$

$$\Omega_\varepsilon^+=\Omega\cap\omega_\varepsilon^+,\ \Omega^-=\{x : x_1<0\}\cap\Omega,\ \Omega^+=\{x : x_1>0\}\cap\Omega,$$

$$\gamma=\Omega\cap\{x : x_1=0\},\ \gamma_\varepsilon=\gamma\cap\omega_\varepsilon^{(n-1)},$$

$$\sigma_\varepsilon=\gamma\cap G_\varepsilon,\ \Omega_\varepsilon=\Omega_\varepsilon^+\cup\Omega^-\cup\gamma_\varepsilon,$$

$$S_\varepsilon=\partial\omega_\varepsilon\cap\overline{\Omega_\varepsilon^+},\ \Gamma^\varepsilon_{+l}=\partial\Omega_\varepsilon^+\cap\Gamma_{+l},$$

$$\Gamma^\varepsilon_{-l}=\{x\in\partial\Omega_\varepsilon : x_1=-l\},\ \Gamma_\varepsilon=\Gamma^\varepsilon_{+l}\cup\Gamma^\varepsilon_{-l}.$$

Рассмотрим в области Ω_ε задачу

$$-\Delta u_\varepsilon=f(x),\ \partial u_\varepsilon/\partial\nu=0 \text{ на } S_\varepsilon;$$

$$\partial u_\varepsilon/\partial x_1 = 0 \text{ при } x \in \sigma_\varepsilon, \ u_\varepsilon = 0 \text{ на } \Gamma_\varepsilon, \tag{1}$$

u_ε — 1-периодическая по $\widehat{x}$ функция,

где $\nu = (0, \nu_2, \dots, \nu_n)$ — единичный вектор внешней нормали к S_ε, f — гладкая функция в $\overline{\Omega^-}$ и $\overline{\Omega^+}$.

Заметим, что в задаче (1) оператор Лапласа можно заменить общим линейным эллиптическим оператором 2-го порядка или системой теории упругости.

Изучим поведение u_ε при $\varepsilon \to 0$.

Обозначим через $\Delta_{\widehat{y}}$ оператор Лапласа по переменным $\widehat{y} = (y_2, \dots, y_n)$. Рассмотрим задачу на ячейке периодичности ω_0:

$$\Delta_{\widehat{y}} N_0 = g_1 + \sum_{i=2}^{n} \partial g_j/\partial y_j, \ \widehat{y} \in \omega_0; \ \partial N_0/\partial \nu|_{\partial G_0} = \sum_{j=2}^{n} g_j \nu_j, \ \langle N_0 \rangle_{\omega_0} = 0; \tag{2}$$

N_0 — 1-периодическая по y функция. Здесь $\langle f \rangle_{\omega_0} \equiv \frac{1}{|\omega_0|} \int\limits_{\omega_0} f d\widehat{y}$, $|\omega_0|$ — мера ω.

Известно (см. [4]), что если g_j — 1-периодические по $\widehat{y}$ функции, $g_i \in L_2(\omega_0)$ $(j = 1, \dots, n)$, $\langle g_1 \rangle_{\omega_0} = 0$, то задача (2) имеет единственное решение $N_0 \in H_1(\omega_0)$ и для него справедлива оценка

$$\|N_0\|_{H_1(\omega_0)} \leqslant C \sum_{j=1}^{n} \|g_j\|_{L_2(\omega_0)}, \tag{3}$$

$C = \mathrm{const}$ не зависит от g_j $(j = 1, \dots, n)$.

Рассмотрим задачу более общего вида, чем задача (1):

$$\begin{cases} -\Delta w_\varepsilon = f_1 + \sum\limits_{j=2}^{n} \partial f_j/\partial x_j, \ x \in \Omega^- \cup \Omega_\varepsilon^+; \ \partial w_\varepsilon/\partial \nu|_{S_\varepsilon} = -\sum\limits_{j=2}^{n} f_j \nu_j; \\ \partial w_\varepsilon/\partial x_1 = 0 \text{ при } x_1 = -0, \ \widehat{x} \in \sigma_\varepsilon; \\ [w_\varepsilon]|_{x_1=0, \ \widehat{x} \in \gamma_\varepsilon} = g(\widehat{x}); \ [\partial w_\varepsilon/\partial x_1]|_{x_1=0, \ \widehat{x} \in \gamma_\varepsilon} = \theta(\widehat{x}); \\ w_\varepsilon = \psi \text{ при } x \in \Gamma_{+l}^\varepsilon \cup \Gamma_{-l}^\varepsilon; \ w_\varepsilon \text{ — 1-периодическая по } \widehat{x} \text{ функция.} \\ \text{Здесь } [w]|_{x_1=0} = w(x_1+0, \widehat{x}) - w(x_1-0, \widehat{x}). \end{cases} \tag{4}$$

Предположим, что θ, w_0 и f_j $(j = 1, \dots, n)$ — 1-периодические по $\widehat{x}$ функции, $f_j \in L_2(\Omega)$, $\theta \in L_2(\gamma_\varepsilon)$, $\|\theta\|_{L_2(\gamma_\varepsilon)} \leqslant K_0 = \mathrm{const}$, K_0 не зависит от ε, $g(\widehat{x}) = g_1(x_1, \widehat{x})|_{x_1=+0} - g_2(x_1, \widehat{x})|_{x_1=-0}$, где g_1 — гладкая в $\overline{\Omega^+}$, 1-периодическая по $\widehat{x}$ функция; g_2 — гладкая в $\overline{\Omega^-}$, 1-периодическая по $\widehat{x}$. Определим функции $\varphi_1(x_1)$ и $\varphi_2(x_1)$: $\varphi_1(x_1)$ — гладкая при $x_1 \geqslant 0$, $\varphi_1 = 0$ при $x_1 < 0$ и $x_1 > 2\delta$, $0 < \delta < l$, $0 \leqslant \varphi_1 \leqslant 1$, $\varphi_1 = 1$ для $0 \leqslant x_1 \leqslant \delta$, $\varphi_2(x_1)$ — гладкая при $x_1 \leqslant 0$, $\varphi_2(x_1) = 0$ при $x_1 > 0$ и $x_1 \leqslant -2\delta$, $-1 \leqslant \varphi_2 \leqslant 0$, $\varphi_2 = -1$ при $x_1 \in [-\delta, 0]$. Положим $J = g_1\varphi_1 + g_2\varphi_2$.

Пусть $\psi \in H_1(\Omega)$ и ψ — 1-периодическая по $\widehat{x}$ функция.

Обозначим $W_\varepsilon = w_\varepsilon - J$.

Определение 1. Функцию w_ε назовем обобщенным решением задачи (4), если $W_\varepsilon \in H_1(\Omega_\varepsilon)$, W_ε — 1-периодическая по $\hat{x}$ функция, $W_\varepsilon = \psi$ на $\Gamma^\varepsilon_{+l} \cup \Gamma^\varepsilon_{-l}$ и для любой 1-периодической по $\hat{x}$ функции $\eta \in H_1(\Omega_\varepsilon)$, $\eta = 0$ на $\Gamma^\varepsilon_{+l} \cup \Gamma^\varepsilon_{-l}$, выполняется интегральное тождество

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} (\nabla_x W_\varepsilon, \nabla_x \eta)\, dx = \int\limits_{\Omega_\varepsilon^+ \cup \Omega^-} \Big[f_1 \eta - J_{x_1} \eta_{x_1} -$$

$$- \sum_{j=2}^{n} (f_j + J_{x_j}) \eta_{x_j} \Big] dx - \int\limits_{\gamma_\varepsilon} \theta(\hat{x})\, \eta(0, \hat{x})\, d\hat{x}. \tag{5}$$

Теорема 1. *Задача* (4) *имеет единственное обобщенное решение w_ε, и для него справедлива оценка*

$$\|w_\varepsilon\|_{H_1(\Omega_\varepsilon^+)} + \|w_\varepsilon\|_{H_1(\Omega^-)} \leqslant K_2 \Big\{ \|\theta\|_{L_2(\gamma_\varepsilon)} \sum_{j=1}^{n} \|f_j\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)} +$$

$$+ \|\psi\|_{H_{1/2}(\Gamma^\varepsilon_{-l} \cup \Gamma^\varepsilon_{+l})} + \|g_1\|_{H_1(\Omega_\varepsilon^+)} + \|g_2\|_{H_1(\Omega^-)} \Big\}, \tag{6}$$

где K_2 не зависит от ε.

Всюду далее постоянные K_j, участвующие в оценках, не зависят от ε. В противном случае это будет оговорено особо.

Доказательство. Из (5) заключаем, что функция $\xi_\varepsilon = W_\varepsilon - \psi \in H_1(\Omega_\varepsilon, \Gamma_\varepsilon)$, где, как обычно, через $H_1(\Omega, \Gamma_0)$ обозначено пополнение по норме $H_1(\Omega)$ множества бесконечно дифференцируемых в $\overline{\Omega}$ функций, обращающихся в нуль в окрестности Γ_0, удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} (\nabla_x \xi_\varepsilon, \nabla_x \eta)\, dx = \int\limits_{\Omega_\varepsilon^+ \cup \Omega^-} \Big[f_1 \eta - J_{x_1} \eta_{x_1} - \sum_{j=2}^{n} (f_j + J_{x_j}) \eta_{x_j} \Big] dx -$$

$$- \int\limits_{\gamma_\varepsilon} \theta(\hat{x})\, \eta(0, \hat{x})\, d\hat{x} - \int\limits_{\Omega_\varepsilon} (\nabla_x \psi, \nabla_x \eta)\, dx. \tag{7}$$

В силу неравенства Фридрихса, справедливого для функций из пространства $H_1(\Omega_\varepsilon, \Gamma_\varepsilon)$ (см. [1]), левая часть тождества (7) определяет билинейную форму $a_\varepsilon(\xi_\varepsilon, \eta)$ на пространстве $H_1(\Omega_\varepsilon, \Gamma_\varepsilon) \times H_1(\Omega_\varepsilon, \Gamma_\varepsilon)$, причем норма на $H_1(\Omega_\varepsilon, \Gamma_\varepsilon)$ задается формулой

$$\|u\|_{H_1} = \Big(\int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla_x u|^2\, dx \Big)^{1/2}.$$

Эта билинейная форма удовлетворяет условиям теоремы Лакса—Мильграма:

$$a_\varepsilon(u, v) \leqslant \|u\|_{H_1} \|v\|_{H_1}, \quad a_\varepsilon(u, u) = \|u\|^2_{H_1}.$$

Пусть $\tilde{\eta}$ — продолжение функции η на Ω, такое, что

$$\|\tilde{\eta}\|_{H_1(\Omega)} \leqslant C \|\eta\|_{H_1(\Omega_\varepsilon)}, \quad C = \mathrm{const} > 0. \tag{8}$$

Такое продолжение существует (см. [1]).

В силу теоремы вложения

$$\|\tilde{\eta}\|_{L_2(\gamma)} \leqslant C_0 \|\tilde{\eta}\|_{H_1(\Omega)}. \tag{9}$$

Из неравенств (8) и (9) имеем

$$\|\eta\|_{L_2(\gamma_\varepsilon)} \leqslant K_3 \|\eta\|_{H_1(\Omega_\varepsilon)}. \tag{10}$$

Поэтому правая часть тождества (7) определяет линейный непрерывный функционал l_ε на $H_1(\Omega_\varepsilon, \Gamma_\varepsilon)$. Согласно теореме Лакса—Мильграма существует единственный элемент $\xi_\varepsilon \in H_1(\Omega_\varepsilon, \Gamma_\varepsilon)$, такой, что

$$a_\varepsilon(\xi_\varepsilon, \eta) = l_\varepsilon(\eta)$$

при любом элементе $\eta \in H_1(\Omega_\varepsilon, \Gamma_\varepsilon)$.

Оценку (6) получаем, применяя неравенство Коши—Буняковского, неравенство Фридрихса, соотношение (10), а также пользуясь тем, что в качестве ψ мы могли взять любую функцию $\tilde{\psi}$, такую, что $\psi - \tilde{\psi} \in \overset{\circ}{H}_1(\Omega_\varepsilon, \Gamma_\varepsilon)$. Тогда согласно определению нормы в $H_{1/2}(\partial\Omega)$ имеем оценку (6). Теорема 1 доказана.

Обозначим:

$$G = G_1^{(n-1)} \times R^1_{y_1}, \quad G^+ = G \cap \{y \in R^n_y : y_1 > 0\};$$

$$\Pi(-\infty, \infty) = \{R^n_y \setminus \overline{G^+}\} \cap \{y \in R^n_y : 0 < y_j < 1,\ j = 2, \ldots, n\};$$

$$S_0 = \partial G^+ \setminus \{y : y_1 = 0\}; \quad \Pi(a, b) = \Pi(-\infty, \infty) \cap \{y : a < y_1 < b\}.$$

Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} \Delta N = 0 \text{ при } y \in \Pi(-\infty, 0) \cup \Pi(0, \infty); \\ \left.\dfrac{\partial N}{\partial \nu}\right|_{S_0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial N}{\partial y_1}\right|_{y_1 = -0,\ \hat{y} \in G_0} = -1; \\ [N]\,|_{y_1 = 0,\ \hat{y} \in \omega_0} = 0, \quad \left[\dfrac{\partial N}{\partial y_1}\right]\Bigg|_{y_1 = 0,\ \hat{y} \in \omega_0} = -\dfrac{\operatorname{meas} G_0}{\operatorname{meas} \omega_0}; \\ N \text{ — 1-периодическая по } \hat{y} \text{ функция.} \end{cases} \tag{11}$$

Определение 2. Обобщенным решением задачи (11) назовем функцию $N \in H_1(\Pi(-M, M))$, 1-периодическую по $\hat{y}$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$-\int\limits_{\Pi(-\infty,\infty)} (\nabla_y N, \nabla_y \varphi)\, dy = -\int\limits_{G_0} \varphi(0, \hat{y})\, d\hat{y} + \frac{\operatorname{meas} G_0}{\operatorname{meas} \omega_0} \int\limits_{\omega_0} \varphi(0, \hat{y})\, d\hat{y} \tag{12}$$

для любого $M > 0$ и для произвольной 1-периодической по $\hat{y}$ функции φ, имеющей компактный носитель по y_1, $\varphi \in H_1(\Pi(-\infty, \infty))$.

Лемма 1. *Задача* (11) *имеет обобщенное решение* $N(y)$, *обладающее следующими свойствами: существуют положительные числа* C_j, α_j ($j = 0, 1, 2, 3$) *и* C_+, C_-, *такие, что для любого* $M > 0$ *справедливы неравенства*:

$$\|\nabla_y N\|_{L_2(\Pi(M, M+1))} \leqslant C_0 \exp(-\alpha_0 M), \tag{13}$$

$$\|\nabla_y N\|_{L_2(\Pi(-M, -M+1))} \leqslant C_1 \exp(-\alpha_1 M), \tag{14}$$

$$\|N - C_+\|_{L_2(\Pi(M, M+1))} \leqslant C_2 \exp(-\alpha_2 M), \tag{15}$$

$$\|N - C_-\|_{L_2(\Pi(-M, -M+1))} \leqslant C_3 \exp(-\alpha_3 M), \tag{16}$$

причем все постоянные, входящие в эти неравенства, не зависят от M.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную задачу

$$\begin{cases} \Delta N_M = 0, \quad y \in \Pi(-M, 0) \cup \Pi(0, M); \\ \left.\dfrac{\partial N_M}{\partial \nu}\right|_{S_0 \cap \{y:\ y_1 < M\}} = 0; \quad [N_M]\,\Big|_{y_1 = 0,\ \hat{y} \in \omega_0} = 0; \\ \left.\dfrac{\partial N_M}{\partial y_1}\right|_{y_1 = -0,\ \hat{y} \in G_0} = -1; \\ \left.\dfrac{\partial N_M}{\partial y_1}\right|_{y_1 = +M,\ y_1 = -M} = 0; \\ \left[\dfrac{\partial N_M}{\partial y_1}\right]\Bigg|_{y_1 = 0,\ \hat{y} \in \omega_0} = -\dfrac{\operatorname{meas} G_0}{\operatorname{meas} \omega_0}; \\ N_M \text{ — 1-периодическая по } \hat{y} \text{ функция.} \end{cases} \tag{17}$$

Обобщенным решением задачи (17) назовем функцию $N_M \in H_1(\Pi(-M, M))$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$-\int\limits_{\Pi(-M,M)} (\nabla_y N_M, \nabla_y \varphi)\, dy = -\int\limits_{G_0} \varphi(0, \hat{y})\, d\hat{y} + \frac{\operatorname{meas} G_0}{\operatorname{meas} \omega_0} \int\limits_{\omega_0} \varphi(0, \hat{y})\, d\hat{y} \qquad (18)$$

для любой 1-периодической по $\hat{y}$ функции $\varphi \in H_1(\Pi(-M, M))$.

Доказательство существования и единственности с точностью до постоянной решения задачи (17) проводится стандартным способом с использованием теоремы Лакса—Мильграма, неравенства Пуанкаре и теоремы вложения вида

$$\|u\|_{L_2(\partial D)} \leqslant A_0 [\|u\|_{L_2(D)} + \|\nabla u\|_{L_2(D)}]. \qquad (19)$$

Покажем, что для решения N_M задачи (17) справедлива оценка

$$\|\nabla_y N_M\|_{L_2(\Pi(-M,\, M))} \leqslant C_4, \qquad (20)$$

где C_4 не зависит от M.

Рассмотрим множество решений вида $N_M + C_M$, где постоянная C_M выбрана так, чтобы

$$\langle N_M + C_M \rangle_{\Pi(-1,1)} = 0,$$

т. е. $C_M = -\langle N_M \rangle_{\Pi(-1,1)}$. Полагая в интегральном тождестве (18) $\varphi = N_M + C_M$, имеем

$$\int\limits_{\Pi(-M,M)} |\nabla_y N_M|^2\, dy = \int\limits_{G_0} (N_M + C_M)\, d\hat{y} - \frac{\operatorname{meas} G_0}{\operatorname{meas} \omega_0} \int\limits_{\omega_0} (N_M + C_M)\, d\hat{y}. \qquad (21)$$

В силу того что

$$\Big|\int\limits_{G_0} (N_M + C_M)\, d\hat{y}\Big| \leqslant C_5 \|\nabla_y N_M\|_{L_2(\Pi(-M,M))}$$

и

$$\Big|\int\limits_{\omega_0} (N_M + C_M)\, d\hat{y}\Big| \leqslant C_6 \|\nabla_y N_M\|_{L_2(\Pi(-M,M))},$$

где C_5, C_6 не зависят от M, из (21) получим неравенство (20).

Покажем, что

$$\|N_M + C_M\|_{L_2(\Pi(-M',M'))} \leqslant A_1, \qquad (22)$$

где $1 < M' < M$; A_1 не зависит от M; $A_1 = A_1(M')$.

Действительно, из теоремы вложения, неравенства Пуанкаре и оценки (20) получаем

$$\|N_M + C_M\|^2_{L_2(\Pi(-M',M'))} \leqslant A_2(M') (\|N_M + C_M\|^2_{L_2(\Pi(-1,1))} +$$
$$+ \|\nabla_y N_M\|^2_{L_2(\Pi(-M',M'))}) \leqslant A_3(M') \|\nabla_y N_M\|^2_{L_2(\Pi(-M',M'))} \leqslant A_4(M').$$

Из оценок (20), (22) следует, что диагональным процессом можно выделить такую подпоследовательность $\{M\}$, что $N_M + C_M \to N$ сильно и $\nabla_y N_M \rightharpoonup \nabla_y N$ слабо в $L_2(\Pi(-M', M'))$ при $M \to \infty$ на любом множестве вида $\Pi(-M', M')$.

Поэтому, если φ — произвольная 1-периодическая по $\hat{y}$ функция, имеющая компактный носитель по y_1 и $\varphi \in H_1(\Pi(-\infty, \infty))$, то, переходя в тождестве (18) к пределу при $M \to \infty$, получим, что N — обобщенное решение задачи (11).

Покажем, что для N справедливы неравенства (13)—(16). Обозначим $\overline{N_M} = N_M + C_M$. Тогда $\langle \overline{N_M} \rangle_{\Pi(-1,1)} = 0$.

Положим в интегральном тождестве (18) $\varphi = (\overline{N_M} - V_M) \exp(\alpha y_1)$, где $\alpha>0$ и

$$V_M=(\mathrm{meas}\,\omega_0)^{-1}\int\limits_{\omega_0}\overline{N_M}(M,\ \hat{y})\,d\hat{y}.$$

Получим

$$\int\limits_{\Pi(-M,M)}|\nabla_y\overline{N_M}|^2\exp\{\alpha y_1\}\,dy=-\alpha\int\limits_{\Pi(-M,M)}\frac{\partial\overline{N}_M}{\partial y_1}(\overline{N_M}-V_M)\times$$

$$\times\exp\{\alpha y_1\}\,dy-\frac{\mathrm{meas}\,G_0}{\mathrm{meas}\,\omega_0}\int\limits_{\omega_0}(\overline{N_M}-V_M)\,d\hat{y}+\int\limits_{G_0}(\overline{N_M}-V_M)\,d\hat{y}=J_1+J_2+J_3. \tag{23}$$

Оценим все интегралы J_j $(j=1,2,3)$, стоящие в правой части (23). В силу того что

$$\int\limits_{\omega_0}(\overline{N_M}-V_M)|_{y_1=0}\,d\hat{y}=-\int\limits_{\Pi(0,M)}\frac{\partial(\overline{N_M}-V_M)}{\partial y_1}\,dy,$$

имеем

$$|J_2|=B_0\left|\int\limits_{\omega_0}(\overline{N_M}-V_M)\,d\hat{y}\right|\leqslant\delta\int\limits_{\Pi(0,M)}\left|\frac{\partial\overline{N}_M}{\partial y_1}\right|^2\exp\{\alpha y_1\}\,dy+$$

$$+\delta^{-1}\int\limits_{\Pi(0,M)}\exp\{-\alpha y_1\}\,dy\leqslant\delta\int\limits_{\Pi(-M,M)}|\nabla_y\overline{N_M}|^2\exp\{\alpha y_1\}\,dy+A_5\delta^{-1}, \tag{24}$$

где $B_0=\dfrac{\mathrm{meas}\,G_0}{\mathrm{meas}\,\omega_0}$, δ— произвольное положительное число, A_5 не зависит от M.

Оценим $|J_3|$. Из теоремы вложения, неравенства Пуанкаре и оценки (20) получим

$$|J_3|\leqslant A_6+|V_M|\,\mathrm{meas}\,G_0\leqslant A_6+A_7\left\{\left|\int\limits_{\omega_0}\overline{N_M}(0,\ \hat{y})\,d\hat{y}\right|+\right.$$

$$\left.+\left|\int\limits_{\Pi(0,M)}\frac{\partial N_M}{\partial y_1}\,dy\right|\right\}\leqslant A_6+A_8\left\{\|\overline{N_M}\|_{H_1(\Pi(0,1))}+\right.$$

$$\left.+\beta\int\limits_{\Pi(0,M)}|\nabla_y\overline{N_M}|^2\exp\{\alpha y_1\}\,dy+\beta^{-1}\int\limits_{\Pi(0,M)}\exp\{-\alpha y_1\}\,dy\right\}\leqslant$$

$$\leqslant A_9+A_{10}\beta\int\limits_{\Pi(-M,M)}|\nabla_y\overline{N_M}|^2\exp\{\alpha y_1\}\,dy,$$

где все постоянные A_j не зависят от M; β — произвольное положительное число.

Итак,

$$|J_2|+|J_3|\leqslant K_0(\zeta)+\zeta\int\limits_{\Pi(-M,M)}|\nabla_y\overline{N_M}|^2\exp\{\alpha y_1\}\,dy, \tag{25}$$

где ζ — произвольное положительное число; $K_0(\zeta)$ не зависит от M.

Осталось оценить $|J_1|$. Имеем

$$|J_1|\leqslant\alpha\int\limits_{\Pi(-M,M)}|\nabla_y\overline{N_M}|\ |\overline{N_M}-V_M|\exp\{\alpha y_1\}\,dy\leqslant$$

$$\leqslant \frac{\alpha}{2} \int\limits_{\Pi(-M,M)} |\nabla_y \overline{N_M}|^2 \exp\{\alpha y_1\}\, dy +$$

$$+\frac{\alpha}{2} \int\limits_{\Pi(-M,M)} |\overline{N_M} - V_M|^2 \exp\{\alpha y_1\}\, dy. \tag{26}$$

Оценим второе слагаемое в правой части (26). Обозначим

$$V_M(y_1) = (\operatorname{meas} \gamma(y_1))^{-1} \int\limits_{\gamma(y_1)} N_M(y_1, \widehat{y})\, d\widehat{y},$$

где $\gamma(y_1^0) = \Pi(-\infty, \infty) \cap \{y : y_1 = y_1^0\}$. Тогда

$$\frac{\alpha}{2} \int\limits_{\Pi(-M,M)} |\overline{N_M} - V_M|^2 \exp\{\alpha y_1\}\, dy \leqslant$$

$$\leqslant \alpha \int\limits_{\Pi(-M,M)} |\overline{N_M} - V_M(y_1)|^2 \exp\{\alpha y_1\}\, dy +$$

$$+ \alpha \int\limits_{\Pi(-M,M)} |V_M(y_1) - V_M|^2 \exp\{\alpha y_1\}\, dy = I_1 + I_2.$$

Оценим I_1 и I_2. В силу неравенства Пуанкаре для области $\gamma(y_1)$ в R^{n-1} имеем

$$I_1 \leqslant \alpha A_{11} \int\limits_{\Pi(-M,M)} |\nabla_y N_M|^2 \exp\{\alpha y_1\}\, dy. \tag{27}$$

Для оценки I_2 применим неравенство Харди (см. [1])

$$\int\limits_0^\infty t^{-2}\, |v|^2\, dt \leqslant 4 \int\limits_0^\infty |v'|^2\, dt, \quad v(0) = 0. \tag{28}$$

Делая в (28) замену переменных $t = \exp\{-\alpha y_1\}$, $\alpha > 0$, придем к неравенству

$$\int\limits_{-\infty}^\infty \exp\{\alpha y_1\}\, |\tilde{v}|^2\, dy_1 \leqslant 4\alpha^2 \int\limits_{-\infty}^\infty \exp\{\alpha y_1\}\, |\tilde{v}'|^2\, dy_1, \tag{29}$$

где $\tilde{v}(y_1) = v(\exp\{-\alpha y_1\}) \to 0$ при $y_1 \to \infty$.

Обозначим $w(y_1) = V_M(y_1) - V_M$. Продолжим эту функцию с отрезка $[-M, M]$ на всю числовую ось, полагая $w(y_1) = 0$ при $y_1 \geqslant M$ и $w(y_1) = w(-M)$ при $y_1 \leqslant -M$. Тогда, применяя неравенство (29) к функции w, получим

$$I_2 = \alpha \int\limits_{-M}^{M} |w|^2 \exp\{\alpha y_1\}\, dy_1 \leqslant \alpha \int\limits_{-\infty}^{\infty} |w|^2 \exp\{\alpha y_1\}\, dy_1 \leqslant$$

$$\leqslant 4\alpha^3 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{dw}{dy_1} \right|^2 \exp\{\alpha y_1\}\, dy_1 \leqslant$$

$$\leqslant 4\alpha^3 \int\limits_{\Pi(-M,M)} |\nabla_y \overline{N_M}|^2 \exp\{\alpha y_1\}\, dy. \tag{30}$$

Итак, из (27) и (30) имеем

$$|J_1| \leqslant A_{12}\alpha \int\limits_{\Pi(-M,M)} |\nabla_y \overline{N_M}|^2 \exp\{\alpha y_1\}\, dy. \tag{31}$$

Из (23), (25) и (31) вытекает, что

$$\int\limits_{\Pi(-M,M)} |\nabla_y N|^2 \exp\{\alpha y_1\}\, dy \leqslant B_1,$$

где B_1 не зависит от M, откуда следует оценка

$$\int\limits_{\Pi(-\infty,\infty)} |\nabla_y N|^2 \exp\{\alpha y_1\}\, dy \leqslant B_1. \tag{32}$$

Из (32) следует неравенство (13) леммы 1. Неравенство (14) получим аналогично.

Докажем неравенство (15). Рассмотрим последовательность чисел $\{\theta_M^+\}$, $M=1, 2, \ldots$, где

$$\theta_M^+ = [\operatorname{meas} \Pi(1,\ 2)]^{-1} \int\limits_{\Pi(M,M+1)} N dy.$$

В силу неравенства Пуанкаре и оценки (11) имеем

$$\|N-\theta_M^+\|_{L_2(\Pi(M,M+1))} \leqslant B_1 \exp\{-b_1 M\},\quad b_1>0, \tag{33}$$

где b_1, B_1 не зависят от M. Покажем, что существует предел θ_M^+ при $M\to\infty$.

Рассмотрим решение следующей задачи:

$$\begin{cases} \Delta v = g(y),\quad y\in\Pi(M,\ M+2); \\ \left.\dfrac{\partial v}{\partial y_1}\right|_{y_1=M,\ y_1=M+2} = 0,\quad \langle v\rangle_{\Pi(M,M+2)} = 0; \\ \dfrac{\partial v}{\partial \nu} = 0,\quad y\in S_0 \cap \{y : M < y_1 < M+2\}; \\ v \text{ — 1-периодическая по } \widehat{y} \text{ функция,} \end{cases} \tag{34}$$

где

$$g(y) = [\operatorname{meas}\Pi(1,\ 2)]^{-1}\,(\chi_{\Pi(M,M+1)} - \chi_{\Pi(M+1,\ M+2)})$$

и χ_Π — характеристическая функция множества Π.

Заметим, что $\langle g\rangle_{\Pi(M,\,M+2)}=0$, и поэтому задача (34) имеет решение и для него справедлива оценка

$$\|v\|_{H_1(\Pi(M,M+2))} \leqslant B_2, \tag{35}$$

где постоянная B_2 не зависит от M.

Подставим в интегральное тождество для задачи (34) вместо пробной функции функцию N. Тогда

$$-\theta_M^+ + \theta_{M+1}^+ = \int\limits_{\Pi(M,M+2)} (\nabla_y v,\ \nabla_y N)\, dy. \tag{36}$$

В силу неравенств (11) и (35) из (36) получаем оценку

$$|\theta_M^+ - \theta_{M+1}^+| \leqslant B_3 \exp\{-\alpha_1 M\}.$$

Следовательно, $\lim_{M\to\infty}\theta_M^+ = C^+$ и из (33) вытекает оценка (15). Оценку (16) можно получить аналогично. Лемма 2 доказана.

Перейдем к рассмотрению следующей задачи:

$$\begin{cases} \Delta\Psi = 0,\quad y\in\Pi(0,\ \infty)\cup\Pi(-\infty,\ 0); \\ \left.\dfrac{\partial\Psi}{\partial\nu}\right|_{S_0} = 0,\quad \left.\dfrac{\partial\Psi}{\partial y_1}\right|_{y_1=-0,\ \widehat{y}\in G_0} = 0; \\ [\Psi]\big|_{y_1=0,\ \widehat{y}\in\omega_0} = \Psi_0(\widehat{y}),\quad \left.\left[\dfrac{\partial\Psi}{\partial y_1}\right]\right|_{y_1=0,\ \widehat{y}\in\omega_0} = 0; \\ \Psi \text{ — 1-периодическая по } \widehat{y} \text{ функция,} \end{cases} \tag{37}$$

где Ψ_0 — гладкая, 1-периодическая по $\hat{y}$ функция.

Пусть $\eta(y_1)$ — гладкая при $y_1 \geqslant 0$ функция, $\eta=1$, если $0 \leqslant y_1 < \sigma$, $\eta=0$ при $y_1 \geqslant 2\sigma$, $0 \leqslant \eta \leqslant 1$, $\eta=0$ при $y_1<0$. Здесь σ — произвольное положительное число. Положим $W=\Psi-\Psi_0\eta$.

Определение 3. Функцию Ψ назовем обобщенным решением задачи (37), если функция $W \in H_1(\Pi(-M, M))$ для любого M и для произвольной 1-периодической по $\hat{y}$ функции φ, имеющей компактный носитель по y_1, $\varphi \in H_1(\Pi(-\infty, \infty))$, выполняется интегральное тождество

$$-\int\limits_{\Pi(-\infty,\infty)} (\nabla_y W, \nabla_y \varphi)\, dy = \int\limits_{\Pi(-\infty,\infty)} (\nabla_y(\eta\Psi_0), \nabla_y\varphi)\, dy.$$

Лемма 2. *Задача* (37) *имеет обобщенное решение* Ψ, *обладающее следующими свойствами: существуют такие положительные постоянные* L^+, L^-, D_j *и* d_j $(j=0, 1, 2, 3)$, *что*

$$\left\{\begin{aligned} &\|\nabla_y\Psi\|_{L_2(\Pi(M,M+1))} \leqslant D_0 \exp\{-d_0 M\};\\ &\|\Psi-L^+\|_{L_2(\Pi(M,M+1))} \leqslant D_1 \exp\{-d_1 M\};\\ &\|\nabla_y\Psi\|_{L_2(\Pi(-M,-M+1))} \leqslant D_2 \exp\{-d_2 M\};\\ &\|\Psi-L^-\|_{L_2(\Pi(-M,-M+1))} \leqslant D_3 \exp\{-d_3 M\}. \end{aligned}\right. \tag{38}$$

Доказательство леммы 2 аналогично доказательству леммы 1.

Займемся теперь построением асимптотики решения задачи (1). Пусть $N_j(\hat{y})$ $(j=1, \ldots, n)$ — решение задачи

$$\left\{\begin{aligned} &\Delta_{\hat{y}} N_j = 0,\ \hat{y} \in \omega_0,\ \frac{\partial N_j}{\partial \nu} = -\nu_j,\ \hat{y} \in \partial G_0;\\ &\langle N_j\rangle_{\omega_0} = 0,\ N_j \text{— 1-периодическая по } \hat{y} \text{ функция,} \end{aligned}\right. \tag{39}$$

где $\nu=(0, \nu_2, \ldots, \nu_n)$ — единичный вектор внешней нормали к ∂G_0. Заметим, что $N_1=0$.

В силу неравенства (3) для N_j справедлива оценка

$\|N_j\|_{H_1(\omega_0)} \leqslant D_4$, $D_4=\mathrm{const}$.

Положим

$$h_{ij}^+ = \left\langle \delta_{ij} + \frac{\partial N_j}{\partial y_i} \right\rangle_{\omega_0}, \tag{40}$$

где $i, j=1, \ldots, n$. Легко видеть, что $h_{11}^+=1$, $h_{1j}^+=h_{j1}^+=0$, $j=2, \ldots, n$.

Определим функции N_{ij} $(i, j=1, \ldots, n)$ как 1-периодические по $\hat{y}$ решения задач

$$\left\{\begin{aligned} &\Delta_{\hat{y}} N_{ij} = -2\frac{\partial N_j}{\partial y_i} + h_{ij}^+ - \delta_{ij},\ \hat{y} \in \omega_0;\\ &\frac{\partial N_{ij}}{\partial \nu} = -N_j\nu_i,\ \hat{y} \in \partial G_0,\ \langle N_{ij}\rangle_{\omega_0} = 0. \end{aligned}\right. \tag{41}$$

Заметим, что $N_{ij}=0$, если хотя бы один из индексов i, j равен 1. Введем функции $\tilde{N}_j$ и $\tilde{N}_{ij}$ $(i, j=1, \ldots, n)$, полагая

$$\tilde{N}_j = \begin{cases} N_j(\hat{y}), & y_1>0;\\ 0, & y_1<0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \tilde{N}_{ij} = \begin{cases} N_{ij}(\hat{y}), & y_1>0;\\ 0, & y_1<0. \end{cases}$$

Пусть $N(y)$ — обобщенное решение задачи (11), а $\Psi_j(y)$ ($j=1, \ldots$ $\ldots, n$) — обобщенное решение следующей задачи:

$$\begin{cases} \Delta_y \Psi_j = 0, \ y \in \Pi(0, \infty) \cup \Pi(-\infty, 0); \\ \left.\dfrac{\partial \Psi_j}{\partial \nu}\right|_{S_0} = 0, \ \left.\dfrac{\partial \Psi_j}{\partial y_1}\right|_{y_1=-0, \widehat{y} \in G_0} = 0; \\ [\Psi_j]\,|_{y_1=0, \widehat{y} \in \omega_0} = -N_j(\widehat{y}), \ \left.\left[\dfrac{\partial \Psi_j}{\partial y_1}\right]\right|_{y_1=0, \widehat{y} \in \omega_0} = 0; \\ \Psi_j \text{— 1-периодическая по } \widehat{y} \text{ функция.} \end{cases} \tag{42}$$

В силу лемм 1 и 2 существуют постоянные C_+, C_- и Ψ_j^+, Ψ_j^-, такие, что $N \to C_+$, $\Psi_j \to \Psi_j^+$ при $y_1 \to +\infty$ и $N \to C_-$, $\Psi_j \to \Psi_j^-$ при $y_1 \to -\infty$ и справедливы оценки (13)—(16), (38). Положим

$$\widetilde{N} = \begin{cases} N - C_+, \ y_1 > 0; \\ N - C_-, \ y_1 < 0, \end{cases} \quad \widetilde{\Psi}_j = \begin{cases} \Psi_j - \Psi_j^+, \ y_1 > 0; \\ \Psi_j - \Psi_j^-, \ y_1 < 0. \end{cases}$$

Пусть V_0 — гладкое в $\overline{\Omega}^+$ и $\overline{\Omega}^-$ решение задачи

$$\begin{cases} -\Delta V_0 = f, \ x \in \Omega^-; \\ -h_{ij}^+ \dfrac{\partial^2 V_0}{\partial x_i \partial x_j} = f, \ x \in \Omega^+; \\ V_0 = 0 \text{ при } x \in \Gamma_{-l} \cup \Gamma_{+l}; \\ [V_0]\,|_\gamma = 0, \ \left.\dfrac{\partial V_0}{\partial x_1}\right|_{x_1=+0} = [\operatorname{meas} \omega_0]^{-1} \left.\dfrac{\partial V_0}{\partial x_1}\right|_{x_1=-0}; \\ V_0 \text{— 1-периодическая функция по } \widehat{x}. \end{cases} \tag{43}$$

Существование такого решения задачи (43) следует из работы [5].

Здесь и далее по повторяющимся индексам производится суммирование от 1 до n.

Введем следующую функцию:

$$u_\varepsilon^1 = V_0 + \varepsilon \left\{ \widetilde{N}_j \frac{\partial V_0}{\partial x_j} + \widetilde{\Psi}_j \left.\frac{\partial V_0}{\partial x_j}\right|_{x_1=+0} + \widetilde{N} \left.\frac{\partial V_0}{\partial x_1}\right|_{x_1=-0} \right\}$$

и покажем, что ее можно рассматривать как «приближенное» решение задачи (1).

В силу определения функций V_0, $\widetilde{N}_j$, $\widetilde{\Psi}_j$ и N функция u_ε^1 удовлетворяет следующим условиям:

$$\left.\frac{\partial u_\varepsilon^1}{\partial x_1}\right|_{x_1=-0, \widehat{x} \in \sigma_\varepsilon} = 0; \tag{44}$$

$$[u_\varepsilon^1]\,|_{\gamma_\varepsilon} = \varepsilon \left\{ (\Psi_j^- - \Psi_j^+) \left.\frac{\partial V_0}{\partial x_j}\right|_{x_1=+} + (C_- - C_+) \left.\frac{\partial V_0}{\partial x_1}\right|_{x_1=-0} \right\} =$$

$$= \varepsilon \left\{ D_1(x)\,|_{x_1=+0} - D_2(x)\,|_{x_1=-0} \right\}, \tag{45}$$

где $D_1(x)$ и $D_2(x)$ — гладкие функции в $\overline{\Omega}^+$ и $\overline{\Omega}^-$ соответственно и 1-периодические по $\hat{x}$;

$$\left.\left[\frac{\partial u_\varepsilon^1}{\partial x_1}\right]\right|_{\gamma_\varepsilon} = \left.\frac{\partial V_0}{\partial x_1}\right|_{x_1=+0} - \left(1 - \left.\left[\frac{\partial N}{\partial y_1}\right]\right|_{y_1=0, \widehat{y} \in \omega_0}\right) \left.\frac{\partial V_0}{\partial x_1}\right|_{x_1=-0} +$$

$$+ \varepsilon N_j(\widehat{y}) \left.\frac{\partial^2 V_0}{\partial x_j \partial x_1}\right|_{x_1=+0} = \left.\frac{\partial V_0}{\partial x_1}\right|_{x_1=+0} - \operatorname{meas} \omega_0]^{-1} \left.\frac{\partial V_0}{\partial x_1}\right|_{x_1=-0} +$$

$$+ \varepsilon N_j(\widehat{y}) \left.\frac{\partial^2 V_0}{\partial x_j \partial x_1}\right|_{x_1=+0} = \varepsilon N_j \left.\frac{\partial^2 V_0}{\partial x_j \partial x_1}\right|_{x_1=+0} = \varepsilon F_\varepsilon(\widehat{x}, \varepsilon^{-1}\widehat{x}), \tag{46}$$

причем в силу оценки (3)

$$\|F_\varepsilon\|_{L_2(\gamma_\varepsilon)} \leqslant K_4. \tag{47}$$

На S_ε имеем соотношения

$$\frac{\partial u_\varepsilon^1}{\partial \nu} = \left[\nu_j + \frac{\partial N_j}{\partial \nu}(\widehat{y}) \right] \frac{\partial V_0}{\partial x_j} + \varepsilon F_j \nu_j = \varepsilon F_j \nu_j, \tag{48}$$

где

$$F_j = \sum_{i=2}^{n} \left(N_i \frac{\partial^2 V_0}{\partial x_i \partial x_j} + \widetilde{\Psi}_i \frac{\partial^2 V_0}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_{x_1=+0} \right) + \widetilde{N} \frac{\partial^2 V_0}{\partial x_1 \partial x_j} \Big|_{x_1=-0}.$$

При $x \in \Omega_\varepsilon^+$ получим

$$-\Delta u_\varepsilon^1 = f + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial N_{ij}}{\partial y_k} \frac{\partial^2 V_0}{\partial x_i \partial x_j} \right) - \varepsilon \frac{\partial N_{ij}}{\partial y_k} \frac{\partial^3 V_0}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} -$$

$$-\varepsilon \left\{ N_j(y) \Delta \left(\frac{\partial V_0}{\partial x_j} \right) + \widetilde{\Psi}_j(y) \Delta \left(\frac{\partial V_0}{\partial x_j} \Big|_{x_1=+0} \right) + \right.$$

$$+ \widetilde{N}(y) \Delta \left(\frac{\partial V_0}{\partial x_1} \Big|_{x_1=-0} \right) - \widetilde{\Psi}_j \frac{\partial^3 V_0}{\partial x_k^2 \partial x_j} \Big|_{x_1=+0} (1-\delta_{1k}) -$$

$$\left. - \widetilde{N} \frac{\partial^3 V_0}{\partial x_k^2 \partial x_1} \Big|_{x_1=-0} (1-\delta_{1k}) \right\} - \frac{\partial \Psi_j}{\partial y_i} \frac{\partial^2 V_0}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_{x_1=+0} (1-\delta_{1i}) -$$

$$- \frac{\partial \widetilde{N}}{\partial y_j} \frac{\partial^2 V_0}{\partial x_j \partial x_1} \Big|_{x_1=-0} (1-\delta_{1j}) - \varepsilon \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\Psi_j \frac{\partial^2 V_0}{\partial x_k \partial x_j} \Big|_{x_1=+0} (1-\delta_{1k}) \right) -$$

$$- \varepsilon \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\widetilde{N} \frac{\partial^2 V_0}{\partial x_k \partial x_1} \Big|_{x_1=-0} (1-\delta_{1k}) \right) = f + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x_k} F_k^\varepsilon + \varepsilon L_{1,\varepsilon} = M_{1,\varepsilon}, \tag{49}$$

где

$$F_k^\varepsilon = \frac{\partial N_{ij}}{\partial y_k} \frac{\partial^2 V_0}{\partial x_i \partial x_j} - \widetilde{\Psi}_j \frac{\partial^2 V_0}{\partial x_k \partial x_j} \Big|_{x_1=+0} (1-\delta_{1k}) -$$

$$- \widetilde{N} \frac{\partial^2 V_0}{\partial x_1 \partial x_k} \Big|_{x_1=-0} (1-\delta_{1k}); \tag{50}$$

$$L_{1,\varepsilon} = -N_j(\widehat{y}) \Delta \left(\frac{\partial V_0}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial N_{ij}}{\partial y_k} \frac{\partial^3 V_0}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}, \tag{51}$$

$$M_{1,\varepsilon} = \frac{\partial \Psi_j}{\partial y_i} \frac{\partial^2 V_0}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_{x_1=+0} (1-\delta_{1i}) + \frac{\partial \widetilde{N}}{\partial y_j} \frac{\partial^2 V_0}{\partial x_j \partial x_1} \Big|_{x_1=-0} (1-\delta_{1j}); \tag{52}$$

при $x \in \Omega^-$ получим

$$-\Delta u_\varepsilon^1 = f + \varepsilon L_{2,\varepsilon} - M_{2,\varepsilon}, \tag{53}$$

где

$$L_{2,\varepsilon} = -\widetilde{\Psi}_j \Delta_{\widehat{x}} \left(\frac{\partial V_0}{\partial x_j} \Big|_{x_1=+0} \right) + \widetilde{N} \Delta_x \left(\frac{\partial V_0}{\partial x_1} \Big|_{x_1=-0} \right), \tag{54}$$

$$M_{2,\varepsilon} = 2 \frac{\partial N}{\partial y_j} \frac{\partial^2 V_0}{\partial x_1 \partial x_j} \Big|_{x_1=-0} (1-\delta_{1i}) + 2 \frac{\partial \Psi_j}{\partial y_i} \frac{\partial^2 V_0}{\partial x_j \partial x_i} \Big|_{x_1=+0} (1-\delta_{1j}). \tag{55}$$

При $x \in \Gamma_\varepsilon$ имеем

$$u_\varepsilon^1 = \varepsilon K_\varepsilon(x), \tag{56}$$

где

$$K_\varepsilon = \begin{cases} \sum_{j=2}^{n} \left(\widetilde{N}_j \frac{\partial V_0}{\partial x_j} + \widetilde{\Psi}_j \frac{\partial V_0}{\partial x_j} \Big|_{x_1=+0} \right) + \widetilde{N} \frac{\partial V_0}{\partial x_1} \Big|_{x_1=-0}, & \text{если } x \in \Gamma_{+l}^{\varepsilon}; \\ \sum_{j=2}^{n} \widetilde{\Psi}_j \frac{\partial V_0}{\partial x_j} \Big|_{x_1=+0} + \widetilde{N} \frac{\partial V_0}{\partial x_1} \Big|_{x_1=-0}, & \text{если } x \in \Gamma_{-l}^{\varepsilon}. \end{cases} \tag{57}$$

Учитывая определение функций N_{ij} и соотношения (44)—(57), приходим к выводу, что $v_\varepsilon = u_\varepsilon^1 - u_\varepsilon$ — обобщенное, 1-периодическое по $\hat{x}$ решение задачи

$$\begin{cases} -\Delta v_\varepsilon = \varepsilon L_{1,\varepsilon} + \varepsilon \sum_{j=2}^{n} \frac{\partial F_k^\varepsilon}{\partial x_k} - M_{1,\varepsilon}, \text{ если } x \in \Omega_\varepsilon^+; \\ -\Delta v_\varepsilon = \varepsilon L_{2,\varepsilon} - M_{2,\varepsilon}, \text{ если } x \in \Omega^-; \\ [v_\varepsilon] |_{\gamma_\varepsilon} = \varepsilon \{ D_1(x) |_{x_1=+0} - D_2(x) |_{x_1=-0} \}, \\ \left[\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_1} \right] \Big|_{\gamma_\varepsilon} = \varepsilon F_\varepsilon, \quad \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_1} \Big|_{x_1=-0,\, \hat{x} \in \sigma_\varepsilon} = 0, \\ v_\varepsilon = \varepsilon K_\varepsilon, \text{ если } x \in \Gamma_{+l}^\varepsilon \cup \Gamma_{-l}^\varepsilon; \\ \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \nu} = \varepsilon F_j \nu_j, \text{ если } x \in S_\varepsilon. \end{cases} \tag{58}$$

Заметим, что $F_j = -F_j^\varepsilon$ на S_ε.

Из лемм 1, 2 и оценки (3) получаем неравенства

$$\begin{gathered} \| L_{1,\varepsilon} \|_{L_2(\Omega_\varepsilon^+)} \leqslant K_5, \quad \| F_j^\varepsilon \|_{L_2(\Omega_\varepsilon^+)} \leqslant K_6 \quad (j = 2, \ldots, n), \\ \| L_{2,\varepsilon} \|_{L_{2,\varepsilon}(\Omega^-)} \leqslant K_7. \end{gathered} \tag{59}$$

Покажем, что имеют место оценки

$$\| M_{1,\varepsilon} \|_{L_2(\Omega_\varepsilon^+)} \leqslant K_8 \varepsilon^{1/2}, \quad \| M_{2,\varepsilon} \|_{L_2(\Omega^-)} \leqslant K_9 \varepsilon^{1/2}. \tag{60}$$

Действительно, в силу определения $M_{1,\varepsilon}$, $M_{2,\varepsilon}$ достаточно доказать, что

$$\| \widetilde{\Psi}_j \|_{L_2(\Omega_\varepsilon)} + \| \nabla_y \widetilde{\Psi}_j \|_{L_2(\Omega_\varepsilon)} \leqslant K_{10} \varepsilon^{1/2}, \tag{61}$$

и аналогично

$$\| \widetilde{N} \|_{L_2(\Omega_\varepsilon)} + \| \nabla_y \widetilde{N} \|_{L_2(\Omega_\varepsilon)} \leqslant K_{11} \varepsilon^{1/2}. \tag{62}$$

Заметим, что в области Ω_ε содержится не более чем $d\varepsilon^{1-n}$ множеств вида $\varepsilon \Pi(-\infty, \infty) \cap \{x : -l < x_1 < l\}$, $d = \mathrm{const} > 0$. Поэтому, учитывая оценки (13)—(16), (38), получим

$$\| \widetilde{\Psi}_j \|_{L_2(\Omega_\varepsilon)}^2 + \| \nabla_y \widetilde{\Psi}_j \|_{L_2(\Omega_\varepsilon)}^2 \leqslant K_{12} \varepsilon^n \varepsilon^{1-n} = K_{12} \varepsilon,$$

$$\| \widetilde{N} \|_{L_2(\Omega_\varepsilon)}^2 + \| \nabla_y \widetilde{N} \|_{L_2(\Omega_\varepsilon)} \leqslant K_{13} \varepsilon^n \varepsilon^{1-n} = K_{13} \varepsilon.$$

Кроме того,

$$\|K_\varepsilon\|_{H_{1/2}(\Gamma^\varepsilon_{+l}\cup\Gamma^\varepsilon_{-l})}\leqslant K_{14}\varepsilon^{-1/2}. \qquad (63)$$

Учитывая теорему 1 и оценки (59), (60), получим неравенство

$$\|u^1_\varepsilon-u_\varepsilon\|_{H_1(\Omega^+_\varepsilon)}+\|u^1_\varepsilon-u_\varepsilon\|_{H_1(\Omega^-)}\leqslant K_{15}\varepsilon^{1/2}. \qquad (64)$$

Итак, справедлива

Теорема 2. *Пусть* u_ε *— обобщенное решение задачи* (1), V_0 *— решение задачи* (43), N_j $(j=2,\ldots,n)$ *— решение задачи* (41). *Тогда*

$$\|u_\varepsilon-V_0\|_{H_1(\Omega^-)}+\left\|u_\varepsilon-V_0-\varepsilon\sum_{j=2}^{n}N_j\frac{\partial V_0}{\partial x_j}\right\|_{H_1(\Omega^+_\varepsilon)}\leqslant K_{16}\varepsilon^{1/2}.$$

Рассмотрим теперь спектральную задачу, соответствующую задаче (1):

$$\begin{cases}\Delta u^m_\varepsilon+\lambda^m_\varepsilon u^m_\varepsilon=0 \text{ в } \Omega_\varepsilon;\\ \left.\dfrac{\partial u^m_\varepsilon}{\partial x_1}\right|_{x_1=-0;\ \hat{x}\in\sigma_\varepsilon}=0;\\ \dfrac{\partial u^m_\varepsilon}{\partial \nu}=0 \text{ на } S_\varepsilon,\ u^m_\varepsilon=0 \text{ на } \Gamma_\varepsilon;\\ u^m_\varepsilon \text{ — 1-периодическая по } \hat{x} \text{ функция,}\end{cases} \qquad (65)$$

где λ_ε^m — неубывающая последовательность собственных значений задачи (65), причем каждое собственное значение повторяется столько раз, какова его кратность.

Используя теорему 2 и теорему о спектре последовательности сингулярно возмущенных операторов [1], получаем следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть* λ_ε^m *— неубывающая последовательность собственных значений задачи* (65); λ^m *— неубывающая последовательность собственных значений задачи*

$$\begin{cases}\Delta u^m+\lambda^m u^m=0 \text{ в } \Omega^-;\\ \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n}h^+_{ij}\frac{\partial^2 u^m}{\partial x_i\partial x_j}+\lambda^m u^m=0 \text{ в } \Omega^+;\\ [u^m]|_\gamma=0,\ \left.\dfrac{\partial u^m}{\partial x_1}\right|_{x_1=+0}=[\operatorname{meas}\omega_0]^{-1}\left.\dfrac{\partial u^m}{\partial x_1}\right|_{x_1=-0};\\ u^m=0 \text{ на } \Gamma_{-l}\cup\Gamma_{+l};\\ u^m \text{ — 1-периодическая по } \hat{x} \text{ функция,}\end{cases}$$

причем каждое собственное значение повторяется столько раз, какова его кратность. Тогда

$$|1/\lambda^m_\varepsilon-1/\lambda^m|\leqslant K_{17}\varepsilon^{1/2}.$$

Замечание. В задаче (1) мы рассматривали область Ω специального вида и условие периодичности для u_ε по $\hat{x}$. Все результаты, изложенные выше, и в частности теорема 2, справедливы также и для произвольной области Ω, если задача (47) для функции V_0 имеет достаточно гладкое (класса C^2) решение в $\overline{\Omega}^+$ и $\overline{\Omega}^-$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Олейник О. А., Иосифьян Г. А., Шамаев А. С. Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. М., 1990.
2. Jäger W., Oleinik O. A., Shamaev A. S. On a homogenization problem for the Laplace operator in a partially perforated domain with the Neumann condition on holes. Preprint 93—53. Oktober 1993, Heidelberg.
3. Олейник О. А., Шапошникова Т. А. Об усреднении краевой задачи для оператора Лапласа в частично перфорированной области с малой концентрацией полостей и условием Неймана на их границе//Rend. Lincei, Mat. e Appl. 1995. **6**. 133—142.
4. Берс Л., Джон Ф., Шехтер М. Уравнения с частными производными. М., 1966.
5. Олейник О. А. Краевые задачи для эллиптических и параболических уравнений с разрывными коэффициентами//Изв. АН СССР. Сер. Математика. 1961. **25**(**1**). 3—20.

Поступила в редакцию
20.03.96

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1996. № 5

Л. Н. Сретенский

НЕОКОНЧЕННАЯ РУКОПИСЬ О НАУЧНОЙ ЖИЗНИ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА *

Если мысленно вернуться к университетской научной жизни физико-математического факультета начала двадцатых годов, то в памяти возникнут воспоминания об исключительно интенсивной деятельности математиков, сплошь занятых исследованиями и обсуждением вопросов, группирующихся около вопросов теории функций, главным образом действительного переменного. Эти обсуждения велись и в коридорах математического отделения факультета, и в официальных заседаниях Математического общества и Научно-исследовательского института математики и механики, организованного в 1922 году. Среди громадной вереницы докладов, посвященных вопросам аксиоматики математики, сходимости тригонометрических рядов, новым вопросам возникшей в то время топологии, изредка, бывало, промелькнет какой-нибудь доклад по теоретической механике или гидродинамике. И таким образом могло создаться впечатление о некотором застое научной жизни в области механики в кругах, близких или принадлежащих Московскому университету. Вместе с тем можно отметить, что число студентов, окончивших математическое отделение факультета по специальности «механика», было крайне незначительным по отношению к числу студентов, кончавших факультет по специальности «математика».

Силою обстоятельств физико-математический факультет обладал к началу Октябрьской Революции небольшим штатом профессоров механиков, и глава всей московской школы механиков, человек, чье имя всем нам дорого, — Николай Егорович Жуковский, занятый разработкой аэродинамики, стал переносить центр всей научной деятельности в Техническое училище.

В 1917 году положение несколько изменилось: после шестилетнего отсутствия вернулся в университет С. А. Чаплыгин. Но вынужденный отход от участия в жизни университета не мог пройти незаметным и без следствий: интересы С. А. Чаплыгина были в то время уже

* Рукопись Л. Н. Сретенского (1902—1973) печатается в оригинале.