



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Г. Смирнов, М. А. Москалева, Двухшаговый метод определения диэлектрической проницаемости неоднородного тела в волноводе, *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки*, 2017, выпуск 4, 106–118

DOI: 10.21685/2072-3040-2017-4-10

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.81

16 января 2025 г., 08:11:14



ДВУХШАГОВЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ НЕОДНОРОДНОГО ТЕЛА В ВОЛНОВОДЕ¹

Аннотация.

Актуальность и цели. Определение характеристик образца материала, помещенного в волновод, по измерениям электромагнитного поля является актуальной задачей в радиоэлектронике. Целью работы является изучение математической модели дифракции электромагнитных волн на неоднородном теле, расположенном в прямоугольном волноводе.

Материалы и методы. Рассмотрена прямая задача дифракции электромагнитных волн на неоднородном теле, помещенном в волновод. Данная задача сведена к решению интегродифференциального уравнения. Для решения полученного уравнения используется проекционный метод Галеркина. Сформулирована обратная задача определения диэлектрической проницаемости неоднородного тела в волноводе. Обратная задача сведена к решению интегрального уравнения первого рода и пересчету функции диэлектрической проницаемости через ток поляризации.

Результаты. Построен двухшаговый метод определения диэлектрической проницаемости неоднородного тела, расположенного в волноводе. Получены численные результаты решения обратной задачи дифракции восстановления диэлектрической проницаемости тела в прямоугольном волноводе.

Выводы. Полученные результаты могут быть применены на практике, например при изучении различных нанокompозитных материалов и сложных наноструктур методом неразрушающего контроля.

Ключевые слова: краевая задача, обратная задача дифракции, тензор диэлектрической проницаемости, тензорная функция Грина, интегродифференциальное уравнение.

Yu. G. Smirnov, M. A. Moskaleva

THE TWO-SWEEP METHOD FOR HETEROGENEOUS BODY'S PERMITTIVITY DETERMINATION IN A WAVEGUIDE

Abstract.

Background. The determination of characteristics of a material sample placed in a waveguide by measuring the electromagnetic field is an actual problem in radio electronics. The objective of the work is to study a mathematical model of electromagnetic waves scattering on volumetric heterogeneous bodies in a rectangular waveguide.

Materials and methods. The direct problem of electromagnetic waves on a heterogeneous body placed in a waveguide is considered. This problem is reduced to solving the integro-differential equation. To solve the resulting equation, the projection method of Galerkin is used. The inverse problem of permittivity determination

¹ Работа выполнена при поддержке гранта Министерства образования и науки РФ № 1.894.2017/4.6 «Суперкомпьютерное моделирование для решения прикладных задач электродинамики».

of a heterogeneous body in a waveguide is formulated. The inverse problem is reduced to solving an integral equation of the first kind and recalculating the function of permittivity through the polarization current.

Results. The two-sweep method for heterogeneous body's permittivity determination in a waveguide is constructed. Numerical results of the solution of the inverse problem of the diffraction recovery of body's permittivity in a rectangular waveguide are obtained.

Conclusions. The results can be applied in practice, for example, in studying of various nanocomposite materials and complex nanostructures by the nondestructive method of testing.

Key words: boundary value problem, inverse problem of diffraction, permittivity tensor, tensor Green's function, integrodifferential equation.

Введение

Определение параметров диэлектрической и магнитной проницаемости различных нанокompозитных материалов и сложных наноструктур является актуальным направлением в нанотехнологии и наноэлектронике. В ряде случаев эти параметры недоступны для экспериментального измерения, поскольку исследуемые материалы имеют композитный характер. В этих случаях можно использовать методы математического моделирования и решать задачи численно. Данная работа посвящена определению диэлектрической проницаемости тела, расположенного в волноводе, при помощи двухшагового метода.

Рассмотрим обратную краевую задачу для определения тензорной функции диэлектрической проницаемости $\hat{\epsilon}(x)$ неоднородного тела, расположенного в волноводе. При этом магнитная проницаемость образца считается равной μ_0 .

Задача определения тензорной функции магнитной проницаемости $\hat{\mu}(x)$ материала решается аналогично с учетом симметрии уравнений Максвелла относительно электрического и магнитного полей. При этом диэлектрическая проницаемость образца считается равной ϵ_0 . Поэтому рассмотрим только случай диэлектрической проницаемости.

Постановка прямой задачи дифракции

Пусть объемное тело Q расположено в прямоугольном волноводе [1–4] $P = \{x : 0 < x_1 < a, 0 < x_2 < b, -\infty < x_3 < +\infty\}$, поверхность волновода ∂P идеально проводящая. Данное тело характеризуется постоянной магнитной проницаемостью μ_0 и положительной (3×3) матрицей-функцией (тензором) диэлектрической проницаемости $\hat{\epsilon}(x)$. Компоненты $\hat{\epsilon}(x)$ представляют собой ограниченные функции в области \bar{Q} , $\hat{\epsilon} \in L_\infty(Q)$, а также $\hat{\epsilon}^{-1} \in L_\infty(Q)$ [5].

Граница ∂Q области Q кусочно-гладкая [6]. В $P \setminus \bar{Q}$ среда изотропна и однородна с постоянными диэлектрической проницаемостью $\epsilon_0 (> 0)$ и магнитной проницаемостью $\mu_0 (> 0)$.

Будем решать следующую задачу дифракции. Необходимо найти электромагнитное поле $\mathbf{E}, \mathbf{H} \in L_2(Q)$. Данное поле имеет временную зависимость

вида $\exp(-i\omega t)$, где ω – круговая частота. Источник стороннего поля – электрический ток $\mathbf{j}^0 \in L_{2,loc}(P)$.

Будем искать «слабые» (обобщенные) решения системы уравнений Максвелла:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{H} = -i\omega \hat{\epsilon} \mathbf{E} + \mathbf{j}_E^0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = i\omega \mu_0 \mathbf{H}. \end{cases} \quad (1)$$

Сформулируем обобщенные краевые условия на границе ∂P . Если u – достаточно гладкое векторное поле в P , то через $u_\nu|_{\partial P}$, $u_\tau|_{\partial P}$ будем обозначать нормальную и касательную составляющие поля u на ∂P . В негладком случае дадим определение для равенств $u_\nu|_{\partial P} = 0$, $u_\tau|_{\partial P} = 0$. Пусть $u \in L_2(P; C^3)$. Тогда если $\operatorname{div} u \in L_2(P)$, то $u_\nu|_{\partial P} = 0$ означает, что

$$(u, \operatorname{grad} v) = -(\operatorname{div} u, v) \quad \forall v \in H^1(P);$$

если $\operatorname{rot} u \in L_2(P)$, то $u_\tau|_{\partial P} = 0$ означает, что

$$(u, \operatorname{rot} w) = -(\operatorname{rot} u, w) \quad \forall w \in L_2(P): \operatorname{rot} w \in L_2(P);$$

где $H^1(P)$ – пространство Соболева.

Для решений (1) должны также выполняться условия на бесконечности [7]: поля \mathbf{E} и \mathbf{H} при $|x_3| > C$ для достаточно больших $C > 0$ имеют представление:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbf{E}^0 \\ \mathbf{H}^0 \end{pmatrix} + \sum_p R_p^{(\pm)} \exp(i\gamma_p^{(1)}|x_3|) \begin{pmatrix} \lambda_p^{(1)} \Pi_p \mathbf{e}_3 - i\gamma_p^{(1)} \nabla_2 \Pi_p \\ -i\omega \epsilon_0 (\nabla_2 \Pi_p) \times \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} + \\ &+ \sum_p Q_p^{(\pm)} \exp(i\gamma_p^{(2)}|x_3|) \begin{pmatrix} i\omega \mu_0 (\nabla_2 \Psi_p) \times \mathbf{e}_3 \\ \lambda_p^{(2)} \Psi_p \mathbf{e}_3 - i\gamma_p^{(2)} \nabla_2 \Psi_p \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\mathbf{e}_{1,2,3}$ – орты в декартовой системе координат, $\gamma_p^{(j)} = \sqrt{k_0^2 - \lambda_p^{(j)}}$, $\operatorname{Im} \gamma_p^{(j)} > 0$ или $\operatorname{Im} \gamma_p^{(j)} = 0$, $k\gamma_p^{(j)} \geq 0$; $\lambda_p^{(1)}$, $\Pi_p(x_1, x_2)$ и $\lambda_p^{(2)}$, $\Psi_p(x_1, x_2)$ ($k_0^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0$, k_0 – волновое число свободного пространства) – полные системы собственных чисел и ортонормированных в $L_2(\Pi)$ собственных функций двумерного оператора Лапласа $-\Delta$ в прямоугольнике $\Pi := \{(x_1, x_2): 0 < x_1 < a, 0 < x_2 < b\}$ с условиями Дирихле и Неймана соответственно, $\nabla_2 \equiv \mathbf{e}_1 \partial/\partial x_1 + \mathbf{e}_2 \partial/\partial x_2$. Для коэффициентов разложений (3) имеют место оценки

$$R_p^{(\pm)}, Q_p^{(\pm)} = O(p^m), \quad p \rightarrow \infty, \quad (3)$$

для некоторого $m \in \mathbb{N}$.

С физической точки зрения условия (2) означают, что рассеянное поле является суперпозицией нормальных волн, расходящихся от тела Q [7]. Условия (3) обеспечивают экспоненциальную сходимость рядов (2), а также возможность почленного дифференцирования этих рядов по переменным x_j любое число раз.

Для \mathbf{E} , \mathbf{H} должны выполняться краевые условия на стенках волновода

$$\mathbf{E}_\tau|_{\partial P} = 0, \mathbf{H}_\nu|_{\partial P} = 0, \quad (4)$$

если выполняются уравнения Максвелла, то второе условие следует из первого, и его можно опустить. Но если рассматривать оператор Максвелла, порождаемый левой частью (1), то надо ставить оба условия.

Для $u \in H^1(P)$ существуют граничные значения из пространства $H^{1/2}(\partial P)$ в смысле теории следов. Почти везде на ∂P определен вектор нормали. Поэтому можно говорить о равенствах следов $u_\nu|_{\partial P} = 0$, $u_\tau|_{\partial P} = 0$, что будет равносильно этим равенствам в смысле данного выше определения.

В (3) \mathbf{E}^0 и \mathbf{H}^0 известное поле (падающая волна) – решение рассматриваемой краевой задачи в отсутствие неоднородного тела Q , $\hat{\epsilon}(x) = \epsilon_0 \hat{I}$, $x \in P$ (\hat{I} – единичный тензор):

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}^0 = -i\omega \epsilon_0 \mathbf{E}^0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E}^0 = i\omega \mu_0 \mathbf{H}^0, \quad (5)$$

с краевыми условиями

$$\mathbf{E}_\tau^0|_{\partial P} = 0, \mathbf{H}_\nu^0|_{\partial P} = 0. \quad (6)$$

Эти решения могут быть выражены аналитически через \mathbf{j}_E^0 с помощью тензора Грина [1].

Решение поставленной задачи, описанной выше, сводится к интегро-дифференциальному уравнению [8] относительно поля \mathbf{E} :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x) = & \mathbf{E}^0(x) + k_0^2 \int_Q \hat{G}_E(x, y) \left(\frac{\hat{\epsilon}(y)}{\epsilon_0} - \hat{I} \right) \mathbf{E}(y) dy + \\ & + \operatorname{grad} \operatorname{div} \int_Q \hat{G}_E(x, y) \left(\frac{\hat{\epsilon}(y)}{\epsilon_0} - \hat{I} \right) \mathbf{E}(y) dy. \end{aligned} \quad (7)$$

Дискретизация прямой задачи дифракции

Выберем параметры волновода так, чтобы $\pi/a < k_0 < \pi/b$. Данное условие способствует распространению в волноводе только одной моды волны.

Пусть $\mathbf{E}^0(x) = \mathbf{e}_2 A^{(+)} i\omega\mu_0 \frac{\pi}{a} \sin \frac{\pi x_1}{a} e^{-i\gamma_1^{(2)} x_3}$ – известное падающее поле (мода в волноводе), $A^{(+)}$ – (известная) амплитуда падающей волны, $\gamma_1^{(2)} = \sqrt{k_0^2 - \frac{\pi^2}{a^2}}$.

Рассмотрим подробнее вопрос построения матричных элементов для прямой задачи дифракции. Представим уравнение (7) в виде системы трех скалярных уравнений. Для этого введем ток

$$\mathbf{J}(y) = \left[\frac{\hat{\varepsilon}(y)}{\varepsilon_0} - \hat{I} \right] \mathbf{E}(y). \quad (8)$$

Тогда электрическое поле выражается через ток по формуле

$$\mathbf{E}(y) = \left[\frac{\hat{\varepsilon}(y)}{\varepsilon_0} - \hat{I} \right]^{-1} \mathbf{J}(y).$$

Получившаяся система трех скалярных уравнений имеет вид

$$\sum_{i=1}^3 \xi_{li} J^i(x) - k_0^2 \int_Q G(x,y) J^l(y) dy - \frac{\partial}{\partial x_l} \operatorname{div}_x \int_Q G(x,y) \mathbf{J}(y) dy = E^{0l}(x), \quad (9)$$

где $l = 1, 2, 3$.

Будем искать компоненты приближенного решения \bar{J} в виде

$$\bar{J}^1 = \sum_{k=1}^N \alpha_k^1 f_k^1(x), \quad \bar{J}^2 = \sum_{k=1}^N \alpha_k^2 f_k^2(x), \quad \bar{J}^3 = \sum_{k=1}^N \alpha_k^3 f_k^3(x),$$

где f_k^i – базисные функции.

Ниже проводится построение сеточных базисных функций f_k^i . Будем считать, что тело Q – параллелепипед: $Q = \{x : a_1 < x_1 < a_2, b_1 < x_2 < b_2, c_1 < x_3 < c_2\}$. Разобьем тело Q на элементарные параллелепипеды:

$$\Pi_{klm} = \{x : x_{1,k} < x_1 < x_{1,k+1}, x_{2,l} < x_2 < x_{2,l+1}, x_{3,m} < x_3 < x_{3,m+1}\},$$

$$x_{1,k} = a_1 + \frac{a_2 - a_1}{n} k, \quad x_{2,l} = b_1 + \frac{b_2 - b_1}{n} l, \quad x_{3,m} = c_1 + \frac{c_2 - c_1}{n} m,$$

где $k, l, m = 0, \dots, n-1$.

Будем считать, что шаг по каждой координате постоянен. Кроме обычной нумерации, нам удобно будет ввести трехиндексную нумерацию сеточных базисных функций. Определим сеточные базисные функции f_{klm}^i ($i = 1, 2, 3$) следующим образом:

$$f_{klm}^i = \begin{cases} 1, & x \in \bar{\Pi}_{klm}, \\ 0, & x \notin \bar{\Pi}_{klm}. \end{cases}$$

Построенное множество сеточных базисных функций удовлетворяет необходимому условию аппроксимации в $L_2^3(Q) = L_2(Q) \times L_2(Q) \times L_2(Q)$.

После определения сеточных базисных функций расширенную матрицу для нахождения неизвестных коэффициентов $\alpha_k^1, \alpha_k^2, \alpha_k^3$ удобно представить в блочной форме:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} A_{11} & A_{12} & A_{13} & B_1 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & B_2 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & B_3 \end{array} \right). \tag{10}$$

Элементы столбцов B_k и матриц A_{kl} определяются из соотношений:

$$B_k^i = E_0^k(x_i),$$

$$A_{kl}^{ij} = \xi_{kl} f_i^l(x_j) - \delta_{kl} k_0^2 \int_Q G^k(x_j, y) f_i^l(y) dy - \frac{\partial}{\partial x_k} \int_Q \frac{\partial}{\partial x_l} G^l(x_j, y) f_i^l(y) dy,$$

где координаты точек коллокации имеют вид

$$x_i = (x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}) \quad x_{i1} = (i_1 + 1/2)h_1, \quad x_{i2} = (i_2 + 1/2)h_2, \\ x_{i3} = (i_3 + 1/2)h_3, \quad k, l = 1, 2, 3; \quad i, j = 1, \dots, N.$$

Таким образом, представлены расчетные формулы для матричных коэффициентов метода коллокации для решения сингулярного интегродифференциального уравнения.

Пусть $X_1 = \frac{\pi x_1}{a}, X_2 = \frac{\pi x_2}{b}, Y_1 = \frac{\pi y_1}{a}, Y_2 = \frac{\pi y_2}{b}, H_1 = \frac{\pi h_1}{a}, H_2 = \frac{\pi h_2}{b}$. Тогда компоненты тензора Грина примут следующий вид:

$$G_E^1 = \frac{2}{ab} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\gamma_{nm}|x_3-y_3|}}{\gamma_{nm}(1+\delta_{0n})} \cos nX_1 \sin mX_2 \cos nY_1 \sin mY_2, \tag{11}$$

$$G_E^2 = \frac{2}{ab} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{-\gamma_{nm}|x_3-y_3|}}{\gamma_{nm}(1+\delta_{0m})} \sin nX_1 \cos mX_2 \sin nY_1 \cos mY_2, \tag{12}$$

$$G_E^3 = \frac{2}{ab} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\gamma_{nm}|x_3-y_3|}}{\gamma_{nm}} \sin nX_1 \sin mX_2 \sin nY_1 \sin mY_2. \tag{13}$$

Так как базисные функции равны единице, только внутри элементарного параллелепипеда Π_{klm} , интегралы в интегральном уравнении вычисляются аналитически. Проинтегрировав компоненты тензора Грина по элементарному параллелепипеду, будем иметь

$$G_I^1 = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_{nm}^0(x_3)}{nm\gamma_{nm}^2} \cos(nX_1) \sin(mX_2) \times$$

$$\begin{aligned} & \times \cos(nH_1(i_1 + 0,5)) \sin\left(\frac{nH_1}{2}\right) \sin(mH_2(i_2 + 0,5)) \sin\left(\frac{m}{2}H_2\right) + \\ & + \frac{2H_1}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_{0m}^0(x_3)}{m\gamma_{0m}^2} \sin(mX_2) \sin(mH_2(i_2 + 0,5)) \sin\left(\frac{m}{2}H_2\right), \\ G_I^2 &= \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_{nm}^0(x_3)}{nm\gamma_{nm}^2} \sin(nX_1) \cos(mX_2) \times \\ & \times \sin(nH_1(i_1 + 0,5)) \sin\left(\frac{n}{2}H_1\right) \sin\left(\frac{m}{2}H_2\right) \cos(mH_2(i_2 + 0,5)) + \\ & + \frac{2H_2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_{n0}^0(x_3)}{n\gamma_{n0}^2} \sin(nX_1) \sin(nH_1(i_1 + 0,5)) \sin\left(\frac{n}{2}H_1\right), \\ G_I^3 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{8f_{nm}^0(x_3)}{\pi^2 mn\gamma_{nm}^2} \sin(nX_1) \sin(mX_2) \times \\ & \times \sin(nH_1(i_1 + 0,5)) \sin\left(\frac{n}{2}H_1\right) \sin(mH_2(i_2 + 0,5)) \sin\left(\frac{m}{2}H_2\right), \end{aligned}$$

где

$$f_{nm}^0(x_3) = \begin{cases} \left(\exp(-(x_3 - (i_3 + 1)h_3)\gamma_{nm}) - \exp(-(x_3 - i_3h_3)\gamma_{nm}) \right), \\ x_3 > (i_3 + 1)h_3, \\ \left(\exp(-i_3h_3 - x_3)\gamma_{nm} - \exp(-((i_3 + 1)h_3 - x_3)\gamma_{nm}) \right), \\ x_3 < i_3h_3, \\ \left(2 - \exp(-(x_3 - i_3h_3)\gamma_{nm}) - \exp(-((i_3 + 1)h_3 - x_3)\gamma_{nm}) \right), \\ i_3h_3 < x_3 < (i_3 + 1)h_3. \end{cases}$$

Таким образом, блоки матрицы будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} A_{11}^{ij} &= \xi_{11} - k_0^2 G^1(x_j, y) - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} G^1(x_j, y), \quad A_{12}^{ij} = -\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} G^2(x_j, y), \\ A_{13}^{ij} &= -\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3} G^3(x_j, y), \quad A_{21}^{ij} = -\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} G^1(x_j, y), \\ A_{22}^{ij} &= \xi_{22} - k_0^2 G^2(x_j, y) - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} G^2(x_j, y), \quad A_{23}^{ij} = -\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} G^3(x_j, y), \\ A_{31}^{ij} &= -\frac{\partial^2}{\partial x_3 \partial x_1} G^1(x_j, y), \quad A_{32}^{ij} = -\frac{\partial^2}{\partial x_3 \partial x_2} G^2(x_j, y), \end{aligned}$$

$$A_{33}^{ij} = \xi_{33} - k_0^2 G^3(x_j, y) - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} G^3(x_j, y),$$

Более подробно вычисление блоков матрицы представлено в [1]. Решаем полученную систему проекционным методом и находим значение функции $\mathbf{J}(y)$.

Обратная задача дифракции

Рассмотрим обратную задачу восстановления диэлектрической проницаемости неоднородного тела в волноводе. Подобные задачи имеют практическое значение при изучении различных метаматериалов, нанокompозитных материалов и при моделировании материалов с заданными свойствами, так как обратная задача позволяет определять структуру образца в волноводе с помощью электромагнитного поля (под структурой можно понимать тензор диэлектрической проницаемости и толщины в том случае, если материал является композитным). Также данные задачи возникают на практике, например при изучении различных кристаллов методом неразрушающего контроля.

Данная задача состоит в определении диэлектрической проницаемости тела по результатам измерения параметров поля вне тела. Для этого выбираем точки наблюдения (x_c), расположенные за пределами тела. Пример расположения точек наблюдения представлен на рис. 1.

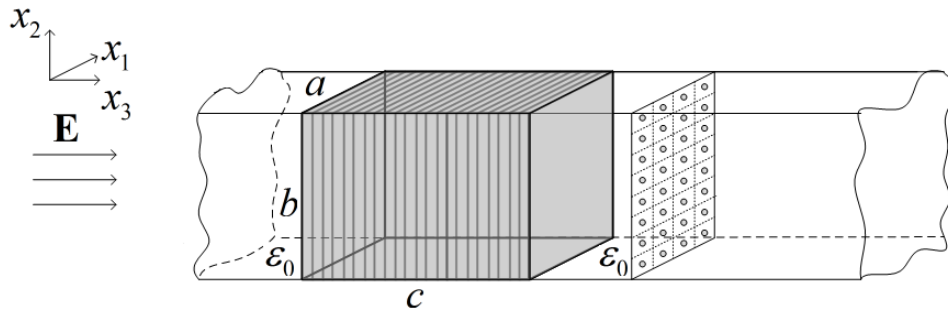


Рис. 1. Тело, заключенное в волновод

Проведем дискретизацию задачи. Будем предполагать, что тело Q содержится в параллелепипеде Π , который расположен в волноводе, $Q \subset \Pi$, $\Pi = \{x : a_1 < x_1 < a_2, b_1 < x_2 < b_2, c_1 < x_3 < c_2\}$ ($0 \leq a_1 < a_2 \leq a, 0 \leq b_1 < b_2 \leq b, c_1 < x_3 < c_2$). Выберем равномерную прямоугольную сетку в Π размера $N_1 \times N_2 \times N_3$, образованную параллелепипедами:

$$\Pi_{klm} = \{x : x_{1,k} < x_1 < x_{1,k+1}, x_{2,l} < x_2 < x_{2,l+1}, x_{3,m} < x_3 < x_{3,m+1}\},$$

$$x_{1,k} = a_1 + \frac{a_2 - a_1}{N_1} k, \quad x_{2,l} = b_1 + \frac{b_2 - b_1}{N_2} l, \quad x_{3,m} = c_1 + \frac{c_2 - c_1}{N_3} m,$$

где $k = 0, \dots, N_1 - 1, l = 0, \dots, N_2 - 1, m = 0, \dots, N_3 - 1$.

Пусть тело Q состоит из q подобластей Q_j таких, что

$$Q = \bigcup_j Q_j, \quad Q_i \cap Q_j = \emptyset, i \neq j.$$

Кроме того, пусть подобласти Q_j состоят из объединения элементарных параллелепипедов (ячеек) сетки $Q_j = \bigcup_l \Pi_l$. Внутри каждой ячейки будем считать диэлектрическую проницаемость постоянной. Падающее поле есть плоская волна (приходящая из бесконечности) вида

$$\mathbf{E}^0(x) = \mathbf{e}_2 A^{(+)} i\omega\mu_0 \frac{\pi}{a} \sin \frac{\pi x_1}{a} e^{-i\gamma_1^{(2)} x_3}.$$

Расположим точки наблюдения в некоторой плоскости S , параллельной грани тела, перпендикулярной оси Ox_3 ; плоскость S расположена на некотором расстоянии d от тела Q . Более точные результаты восстановления неоднородности можно получить, располагая точки наблюдения в нескольких плоскостях, параллельных друг другу (таким образом, точки наблюдения будут расположены в некотором ограниченном объеме пространства). Пример представлен на рис. 2.

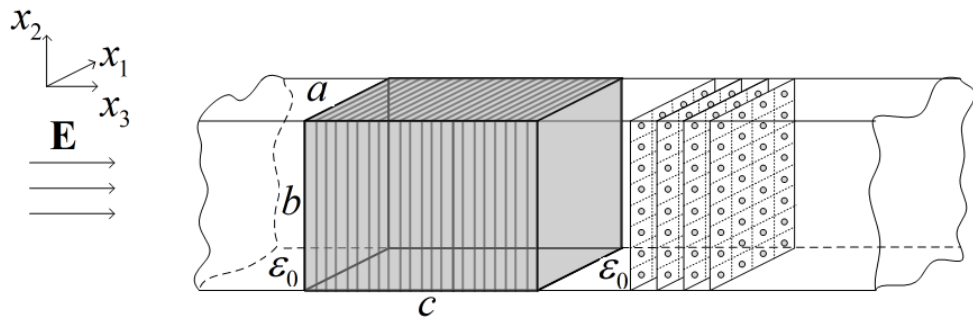


Рис. 2. Вариант расположения точек наблюдения x_c

Рассчитаем дифракционное поле в точках наблюдения. Для этого решим прямую задачу дифракции (1)–(6) и определим числовые характеристики поля $\mathbf{E}(x)$ внутри тела Q , решая следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x) = & \mathbf{E}^0(x) + k_0^2 \int_Q \hat{G}_E(x, y) \left(\frac{\hat{\epsilon}(y)}{\epsilon_0} - \hat{I} \right) \mathbf{E}(y) dy + \\ & + \text{grad div} \int_Q \hat{G}_E(x, y) \left(\frac{\hat{\epsilon}(y)}{\epsilon_0} - \hat{I} \right) \mathbf{E}(y) dy, \quad x \in Q. \end{aligned}$$

Используя найденные значения поля $\mathbf{E}(x)$, вычислим значение поля в точках наблюдения x_c по формуле

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x_c) = \mathbf{E}^0(x_c) + k_0^2 \int_Q \hat{G}_E(x_c, y) \mathbf{J}(y) dy + \\ + \text{grad div} \int_Q \hat{G}_E(x_c, y) \mathbf{J}(y) dy, \quad x_c \notin Q, \end{aligned} \quad (14)$$

затем решаем его относительно неизвестной функции

$$\mathbf{J}(y) = \left[\frac{\hat{\varepsilon}(y)}{\varepsilon_0} - \hat{I} \right] \mathbf{E}(y).$$

Таким образом, мы рассчитали дифракционное поле в точках наблюдения, необходимое для дальнейшего решения исследуемой задачи, которое также может быть получено экспериментальным путем.

Далее переходим ко второму этапу решения задачи, который заключается в нахождении неоднородности тела. Для этого решаем уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{J}(x_c)}{\left(\frac{\hat{\varepsilon}(y)}{\varepsilon_0} - \hat{I} \right)} - \mathbf{E}^0(x_c) = k_0^2 \int_Q \hat{G}_E(x_c, y) \mathbf{J}(y) dy + \\ + \text{grad div} \int_Q \hat{G}_E(x_c, y) \mathbf{J}(y) dy, \quad x_c \notin Q, \end{aligned} \quad (15)$$

которое является интегральным уравнением первого рода. Именно в решении данного уравнения состоит наиболее сложная часть решения обратной задачи восстановления диэлектрической проницаемости тела. Для повышения эффективности решения уравнения можно применять различные методы регуляризации или преобуславливания.

Из уравнения (15) находим $\mathbf{J}(x)$ и определяем диэлектрическую проницаемость тела $\hat{\varepsilon}(y)$ в каждой ячейке, используя уравнение

$$\frac{\mathbf{J}(x)}{\left(\frac{\hat{\varepsilon}(y)}{\varepsilon_0} - \hat{I} \right)} - \left(k_0^2 \int_Q \hat{G}_E(x, y) \mathbf{J}(y) dy + \text{grad div} \int_Q \hat{G}_E(x, y) \mathbf{J}(y) dy \right) = \mathbf{E}^0(x), \quad x \in Q.$$

В качестве примера приведем визуализацию результатов определения диэлектрической проницаемости тела в волноводе. Размеры волновода и электродинамические параметры: $a = 0,02$ м, $b = 0,02$ м, $c = 0,02$ м, $k_0 = 250$ м⁻¹. Размер расчетной сетки $12 \times 12 \times 12$. На рис. 3 представлено исходное значение модуля диэлектрической проницаемости тела, полученное в результате моделирования.

На рис. 4 представлено восстановленное значение модуля диэлектрической проницаемости тела.

Максимум модуля разности между исходным и восстановленным значением диэлектрической проницаемости составляет порядка 10^{-9} . Для вос-

становления данных о неоднородности тела были использованы исходные значения без внесения погрешности.

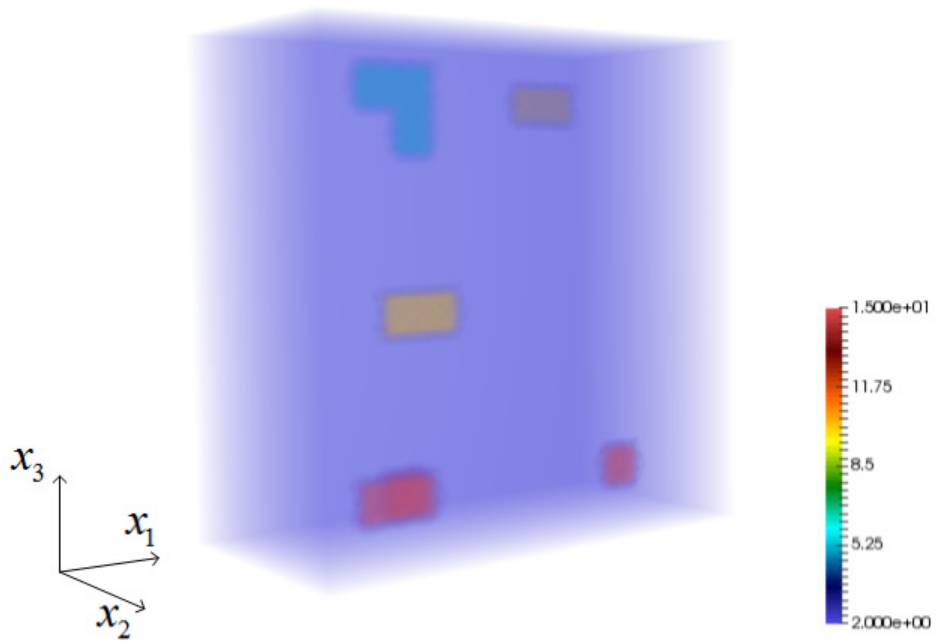


Рис. 3. Исходное значение модуля диэлектрической проницаемости тела

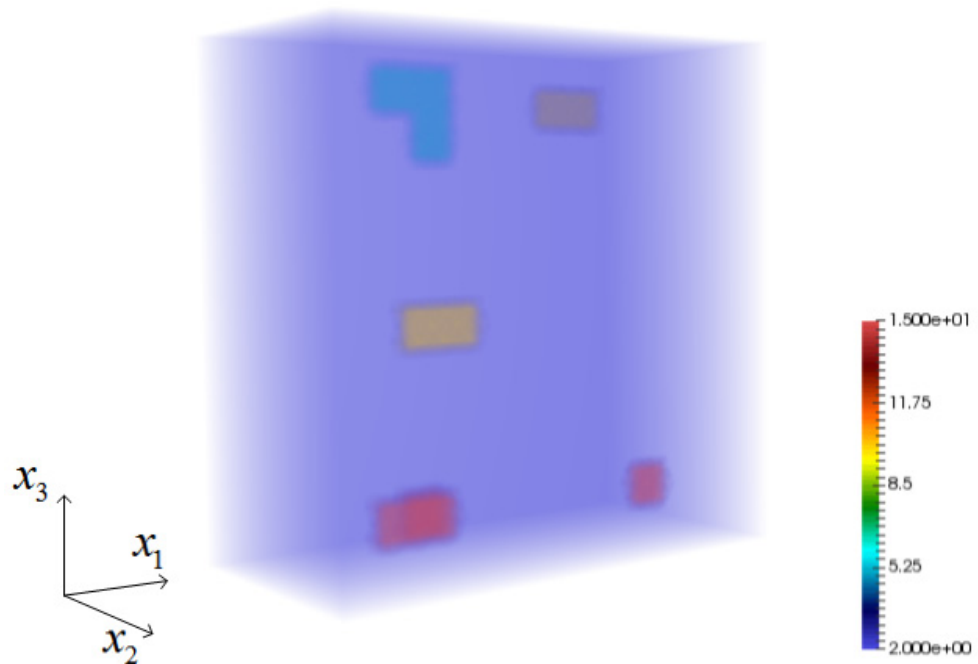


Рис. 4. Восстановленное значение модуля диэлектрической проницаемости тела

Заключение

Таким образом, нелинейная задача восстановления диэлектрической проницаемости неоднородного тела в волноводе сведена к решению линейной задачи и пересчета функции диэлектрической проницаемости уравнения, соответственно предложенный алгоритм реализуется в два шага.

Среди преимуществ данного метода можно указать, что при его использовании не требуется выбор начального приближения; также данный метод позволяет работать с большими расчетными сетками и выявлять более 1000 неоднородностей. Предложенный метод также позволяет восстанавливать диэлектрическую проницаемость анизотропного тела и тела, имеющего комплексную диэлектрическую проницаемость.

Библиографический список

1. **Медведик, М. Ю.** Обратные задачи восстановления диэлектрической проницаемости неоднородного тела в волноводе / М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2014. – 76 с.
2. **Медведик, М. Ю.** Применение ГРИД-технологий для решения объемного сингулярного интегрального уравнения для задачи дифракции на диэлектрическом теле субиерархическим методом / М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2008. – № 2. – С. 2–14.
3. **Медведик, М. Ю.** Численное решение объемного сингулярного интегрального уравнения методом коллокации / М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2009. – № 4. – С. 55–71.
4. **Медведик, М. Ю.** Субиерархический метод решения задачи дифракции электромагнитных волн на диэлектрическом теле в прямоугольном волноводе / М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов // Радиотехника и электроника. – 2011. – Т. 56, № 8. – С. 940–945.
5. **Смирнов, Ю. Г.** Исследование электромагнитной задачи дифракции на диэлектрическом теле методом объемного сингулярного интегрального уравнения / Ю. Г. Смирнов, А. А. Цупак // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2004. – Т. 44, № 12. – С. 2252–2267.
6. **Смирнов, Ю. Г.** Математические методы исследования задач электродинамики / Ю. Г. Смирнов. – Пенза : Инф.-изд. центр ПГУ, 2009. – 268 с.
7. **Ильинский, А. С.** Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах / А. С. Ильинский, Ю. Г. Смирнов. – М. : ИПРЖР, 1996. – 176 с.
8. **Смирнов, Ю. Г.** Метод коллокации решения объемного сингулярного интегрального уравнения в задаче определения диэлектрической проницаемости материала / Ю. Г. Смирнов, М. Ю. Медведик, Д. И. Васюнин // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2009. – № 3. – С. 71–87.

References

1. Medvedik M. Yu., Smirnov Yu. G. *Obratnye zadachi vosstanovleniya dielektricheskoy pronitsaemosti neodnorodnogo tela v volnovode* [Inverse problems of heterogeneous body's dielectric permittivity recovery in a waveguide]. Penza: Izd-vo PGU, 2014, 76 p.
2. Medvedik M. Yu., Smirnov Yu. G. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2008, no. 2, pp. 2–14.

3. Medvedik M. Yu., Smirnov Yu. G. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2009, no. 4, pp. 55–71.
4. Medvedik M. Yu., Smirnov Yu. G. *Radiotekhnika i elektronika* [Radio engineering and electronics]. 2011, vol. 56, no. 8, pp. 940–945.
5. Smirnov Yu. G., Tsupak A. A. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki* [Journal of calculus mathematics and mathematical physics]. 2004, vol. 44, no. 12, pp. 2252–2267.
6. Smirnov Yu. G. *Matematicheskie metody issledovaniya zadach elektrodinamiki* [Mathematical methods of researching problems of electrodynamics]. Penza: Inf.-izd. tsentr PGU, 2009, 268 p.
7. P'inskiy A. S., Smirnov Yu. G. *Difraktsiya elektromagnitnykh voln na provodyashchikh tonkikh ekranakh* [Diffraction of electromagnetic waves on conducting thin screens]. Moscow: IPRZhR, 1996, 176 p.
8. Smirnov Yu. G., Medvedik M. Yu., Vasyunin D. I. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2009, no. 3, pp. 71–87.

Смирнов Юрий Геннадьевич

доктор физико-математических наук,
профессор, заведующий кафедрой
математики и суперкомпьютерного
моделирования, Пензенский
государственный университет (Россия,
г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: mmm@pnzgu.ru

Smirnov Yuriy Gennad'evich

Doctor of physical and mathematical
sciences, professor, head of sub-department
of mathematics and supercomputer
modeling, Penza State University
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Москалева Марина Александровна

научный сотрудник,
научно-исследовательский центр
«Суперкомпьютерное моделирование
в электродинамике», Пензенский
государственный университет (Россия,
г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: m.a.moskaleva1@gmail.com

Moskaleva Marina Aleksandrovna

Researcher, the research center
“Supercomputer modeling
in electrodynamics”, Penza State
University (40 Krasnaya street,
Penza, Russia)

УДК 517.3, 517.6

Смирнов, Ю. Г.

Двухшаговый метод определения диэлектрической проницаемости неоднородного тела в волноводе / Ю. Г. Смирнов, М. А. Москалева // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2017. – № 4 (44). – С. 106–118. DOI 10.21685/2072-3040-2017-4-10