Литература

1. Чаплыгин С. А. // Избр. тр. М., 1976.
2. Кигурадзе И. Т. // Сообщ. АН ГССР. 1963. Т. 30, № 2. С. 129—136.

Одесский государственный университет им. И. И. Мечникова

Поступила в редакцию 29 июня 1984 г.

УДК 517.925.5

М. И. ГИЛЬ

ОБ УСЛОВИЯХ ДИССИПАТИВНОСТИ И СУЩЕСТВОВАНИЯ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ВЕДУЩЕЙ ЛИНЕЙНОЙ ЧАСТЬЮ

Рассмотрим в n-мерном евклидовом пространстве R^n уравнение

$$\frac{dx}{dt} = Ax + F(x, t) \quad (t \geqslant 0), \tag{1}$$

где A — постоянная $(n \times n)$-матрица; функция $F: R^n \times [0, \infty) \to R^n$ кусочно-непрерывна по t и удовлетворяет в некоторой области $\Omega \subset R^n$ неравенству

$$\|F(x, t)\| \leqslant q\|x\| + C \quad (x \in \Omega, \ t \geqslant 0); \tag{2}$$

q и C — положительные константы; $\|\cdot\|$ — евклидова норма.

Ниже получена двусторонняя оценка норм решений уравнения (1), которая является новой, на наш взгляд, даже в линейном случае (см. [1]). С помощью этой оценки найдены условия диссипативности, которые, как нам кажется, проще в применении к уравнению (1), чем теорема Йосидзавы (см. [2]). Кроме того, указаны условия неограниченности решений уравнения (1), а при $n=2$ — условия существования предельных циклов, дополняющие известные результаты [3—5]. Всюду ниже предполагается существование решений уравнения (1), их единственность и непрерывная зависимость от начальных условий.

Пусть $\sigma(A)$ — совокупность собственных значений матрицы $A = (a_{jk})$; $\alpha = \max\limits_k \operatorname{Re}\lambda_k$, $\beta = \min\limits_k \operatorname{Re}\lambda_k$ $(\lambda_k \in \sigma(A))$; $|A|_2 = \left(\sum\limits_{j,k=1}^{n} |a_{jk}|^2\right)^{1/2}$, $v = \left(|A|_2^2 - \sum\limits_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2\right)^{1/2}$. В наших рассуждениях существенную роль играет крайний справа корень полинома

$$Q(\lambda) = \lambda^n - qP(\lambda), \tag{3}$$

где $P(\lambda) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \lambda^{n-k-1} v^k (k!)^{-1/2}$, r является единственным положительным и простым корнем, причем $r^n \leqslant qP(\delta_0)$ $(\delta_0 = 1 + \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n-1} v^k (k!)^{-1/2})$ (см. [6]).

Положим $b_1(\nu) = CP(\nu) Q^{-1}(\nu)$,

$$b_2(\nu) = \frac{CP(\nu)}{\nu^n} \sup_{t \geqslant 0} e^{-rt} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_1} e^{\lambda t} \lambda^n Q^{-1}(\lambda)(\lambda - \nu)^{-1} d\lambda,$$

$$a = \sup_{t \geqslant 0} e^{-rt} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_2} e^{\lambda t} P(\lambda) Q^{-1}(\lambda)\, d\lambda \quad (0 < \nu < \infty).$$

Здесь Γ_1, Γ_2 — гладкие контуры, охватывающие корни $Q(\lambda)$, причем Γ_1 не охватывает $\nu = r$.

Теорема. *Пусть при всех $t \in [0, T]$ $(T \leqslant \infty)$ и заданном начальном векторе $x(0) \in \Omega$ решение $x(t)$ уравнения* (1) *лежит в Ω и выполняется неравенство* (2). *Если при этом $\alpha < 0$ и $-\alpha \neq r$, то справедлива оценка*

$$\|x(t)\| \leqslant (a\|x(0)\| + b_2(-\alpha)) \exp[(\alpha + r)t] + b_1(-\alpha). \tag{4}$$

Если же $\beta > 0$ и $\beta \neq r$, то

$$\|x(t)\| \geqslant a^{-1}\{\exp[(\beta - r)t](\|x(0)\| - b_1(\beta)) - b_2(\beta)\}. \tag{5}$$

Доказательство. Докажем вначале неравенство (4). Уравнение (1) эквивалентно уравнению

$$x(t) = \exp(At)\, x(0) + \int\limits_0^t \exp[A(t-s)]\, F(x, s)\, ds.$$

Отсюда и из (2)

$$\|x(t)\| \leqslant \|\exp[At]\, x(0)\| + \int_0^t \|\exp[A(t-s)]\| (q\|x(s)\| + C)\, ds.$$

Воспользуемся доказанным в [7] неравенством $\|\exp(At)\| \leqslant \exp(\alpha t)\, d(t)$, где $d(t) = \sum_{k=0}^{n-1} t^k v^k (k!)^{-3/2}$. Так как

$$C\int_0^t \exp[\alpha(t-s)]\, d(t-s)\, ds \leqslant C\int_0^\infty \exp[\alpha t]\, d(t)\, dt = \frac{CP(-\alpha)}{(-\alpha)^n} \equiv C_1,$$

то получаем неравенство

$$\|x(t)\| \leqslant \exp(\alpha t)\, d(t)\, \|x(0)\| + q\int_0^t \exp[\alpha(t-s)]\, \|x(s)\|\, d(t-s)\, ds + C_1.$$

Имеем

$$\exp[-\alpha t]\, \|x(t)\| \leqslant \eta(t), \qquad (6)$$

где η — решение уравнения

$$\eta(t) = d(t)\, \|x(0)\| + q\int_0^t d(t-s)\, \eta(s)\, ds + C_1 \exp[-\alpha t]$$

[8, с. 517]. Будем решать это уравнение с помощью преобразования Лапласа. Пусть $g(\lambda), \bar{d}(\lambda)$ — преобразования Лапласа соответственно от $\eta(t)$ и $d(t)$, λ — двойственная переменная. Учитывая, что преобразование свертки равно произведению преобразований, получаем

$$g(\lambda) = \|x(0)\|\, \bar{d}(\lambda) + qg(\lambda)\, \bar{d}(\lambda) + (\lambda+\alpha)^{-1} C_1.$$

При этом $\bar{d}(\lambda) = \sum_{k=0}^{n-1} v^k (k!)^{-1/2} \lambda^{-k-1}$. Пользуясь обратным преобразованием Лапласа и опуская несложные выкладки, получаем

$$g(\lambda) = \|x(0)\|\, J_1(t) + C_1 J_2(t), \qquad (7)$$

где

$$J_1(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_3} \exp(\lambda t)\, P(\lambda)\, Q^{-1}(\lambda)\, d\lambda,$$

$$J_2(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_3} \exp(\lambda t)\, \lambda^n (\lambda+\alpha)^{-1} Q^{-1}(\lambda)\, d\lambda,$$

Γ_3 — гладкий контур, охватывающий все полюсы подынтегральной функции. По теореме о вычетах $J_1(t) \leqslant a\exp(rt)$, а $J_2(t)$ равен сумме двух слагаемых $J_{21}(t)$ и $J_{22}(t)$, первый из которых—вычет подынтегральной функции в точке $\lambda = -\alpha$, второй—сумма вычетов в корнях $Q(\lambda)$. Имеем

$$J_{21}(t) = \exp(-\alpha t)(-\alpha)^n Q^{-1}(-\alpha),$$

$$J_{22}(t) \leqslant \exp(rt) \sup_{t\geqslant 0} \frac{1}{2\pi i} \exp(-rt) \int_{\Gamma_3} \exp(\lambda t)\, \lambda^n Q^{-1}(\lambda)(\lambda+\alpha)^{-1} d\lambda.$$

Отсюда и из (7) и (6), учитывая полученную оценку для $J_1(t)$, получаем неравенство (4).

Докажем неравенство (5). Зафиксируем произвольное $T_1 \in [0, T]$ и положим $\tau = T_1 - t$, $y(\tau) = x(T_1 - \tau)$, $F_1(y, \tau) = -F(y, T_1 - \tau)$ $(0 \leqslant \tau \leqslant T_1)$. Уравнение (1) принимает вид

$$\frac{dy}{d\tau} = -Ay + F_1(y, \tau) \quad (0 \leqslant \tau \leqslant T_1),$$

F_1, очевидно, удовлетворяет условию (2). Повторяя приведенные выше рассуждения, получим

$$\|y(\tau)\| \leqslant (a\|y(0)\| + b_2(\beta)) \exp[(-\beta + r)\tau] + b_1(\beta).$$

Поскольку $y(0) = x(T_1)$, $y(T_1) = x(0)$, а T_1 произвольно, отсюда и следует (5), что и требовалось доказать.

Напомним [2], что уравнение называется диссипативным, если существует такое число d, что для любого его решения $x(t)$

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\|x(t)\|\leqslant d. \tag{8}$$

Следствие 1. *Пусть условие (2) выполняется при всех $x \in R^n$, все решения уравнения* (1) *неограниченно продолжимы вправо и*

$$\alpha+r<0. \tag{9}$$

Тогда уравнение (1) диссипативно, причем константа d в (8) удовлетворяет неравенству $d\leqslant b_1(-\alpha)$.

Следствие 2. *Пусть условие (2) выполняется при всех $x \in R^n$ и*

$$\beta-r>0. \tag{10}$$

Тогда всякое решение уравнения (1) *с начальным вектором* $x(0)$ *при* $\|x(0)\|>b_1(\beta)$ *не ограничено.*

Будем говорить, что уравнение (1) асимптотически линейно, если

$$\lim_{x\to\infty}\|x\|^{-1}\|F(x,\ t)\|=0 \tag{11}$$

равномерно по t.

Следствие 3. *Для диссипативности асимптотически линейного уравнения достаточно, чтобы матрица A была гурвицевой.*

Действительно, из (11) следует, что условие (2) выполняется со сколь угодно малой константой q, а из $q\to 0$ следует, что $r\to 0$.

В случае $n=2$, как нетрудно видеть, $v\leqslant|a_{12}-\overline{a}_{21}|$, $r=0{,}5q+\sqrt{0{,}25q^2+qv}$.

Следствие 4. *Пусть $n=2$, $F(x,\ t)=F(x)$ непрерывна и удовлетворяет условию 2) при всех $x\in R^n$. Если при этом*

$$\alpha+0{,}5q+\sqrt{0{,}25q^2+qv}<0 \tag{12}$$

и не все траектории уравнения (1) стремятся при $t\to\infty$ к положениям равновесия, то это уравнение имеет по меньшей мере один предельный цикл, лежащий в круге

$$\{x\in R^2\mid \|x\|\leqslant C[\alpha^2-q(v-\alpha)]^{-1}(v-\alpha)\}. \tag{13}$$

Действительно, по следствию 1 при сделанных предположениях уравнение (1) диссипативно, причем предельные траектории лежат в круге (13). По известной теореме 4.1 [5, с. 186] всякое ограниченное решение обладает предельным множеством, которое является либо периодическим решением, либо особой точкой, т. е. уравнение (1) обладает периодическим решением. Так как всякая замкнутая траектория лежит в круге (13), то траектория, начинающаяся вне этого круга, не замкнута, т. е. имеется предельный цикл.

Рассмотрим для примера уравнение

$$y''+f(y')+\varphi(y)=0, \tag{14}$$

где $\varphi(y)$, $f(z)$ — непрерывные скалярные функции, причем f имеет единственный корень при $z=0$ и $f'(0)<0$, а φ имеет конечное число корней p_k, в окрестности которых она дифференцируема, и $\varphi'(p_k)\neq 0$ $(k=1,\ \ldots,\ m)$, m—число корней. Пусть $M_1y-k_1\leqslant f(y)\leqslant M_1y+k_1$, $M_2y-k_2\leqslant\varphi(y)\leqslant M_2y+k_2$ $(M_i,\ k_i\geqslant 0;\ i=1,\ 2)$. Полагая $f_1=M_1z-f$, $\varphi_1=M_2y-\varphi$, можно переписать рассматриваемое уравнение в виде $z'=-M_1z-M_2y+f_1(z)+\varphi_1(y)$, $y'=z$. Очевидно выполняется условие (2) при $q=0$, $C=k_1+k_2$, а матрица рассматриваемой системы гурвицева. По следствию 4 эта система обладает предельным циклом.

Приведенные рассуждения, касающиеся уравнения (14), дополняют теорему Рейссига [4, с. 150].

Литература

1. Изобов Н. А.//Итоги науки и техники. Мат. анализ. 1973. Т. 12. С. 71—146.
2. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. М., 1967.
3. Баутин Н. Н., Леонтович Е. А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М., 1976.
4. Рейссиг Р., Сансоне Г., Конти Р. Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений. М., 1974.
5. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1970.
6. Гиль М. И.// Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1981. № 6. С. 158—162.
7. Гиль М. И.//Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19, № 8. С. 1452—1454.
8. Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В. Теория показателей Ляпунова. М., 1966.

Хабаровский комплексный научно-исследовательский институт Дальневосточного научного центра АН СССР

Поступила в редакцию 13 февраля 1984 г.